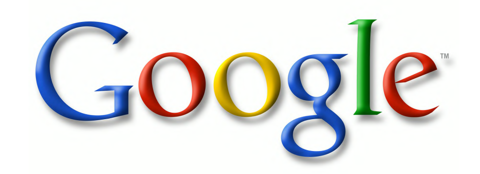














PRINCIPIEN DER METAPHYSIK

VON

BRANISLAV PETRONIEVICS

DR. PHIL.

ERSTER BAND

ERSTE ABTHEILUNG

ALLGEMEINE ONTOLOGIE UND DIE FORMALEN KATEGORIEN

MIT EINEM ANHANG

ELEMENTE DER NEUEN GEOMETRIE

UND III TAFELN MIT 50 GEOMETRISCHEN FIGUREN



Motto:
Die richtigen mathematischen Begriffe sind der Schlüssel zur Auflösung der Welträtsel.

HEIDELBERG.
CARL WINTER'S UNIVERSITÄTSBUCHHANDLUNG
1904.



PRINCIPIEN DER METAPHYSIK

VON

BRANISLAV PETRONIEVICS

DR. PHIL.

ERSTER BAND

ERSTE ABTHEILUNG

ALLGEMEINE ONTOLOGIE UND DIE FORMALEN KATEGORIEN

MIT EINEM ANHANG:

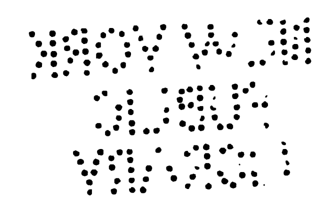
ELEMENTE DER NEUEN GEOMETRIE

UND III TAFELN MIT 56 GEOMETRISCHEN FIGUREN



Motto
Die richtigen mathematischen Begriffe sind der Schlüssel zur Auflösung des Welträtsels.

HEIDELBERG.
CARL WINTER'S UNIVERSITÄTSBUCHHANDLUNG
1904.



Vorwort.

In dem Werk, dessen erste Abtheilung ich hiermit der Öffentlichkeit übergebe, habe ich jenen so oft gemachten und ebenso oft misslungenen oder wenigstens nur theilweise gelungenen Versuch gemacht, das grosse Räthsel der Welt zu lösen und damit die Metaphysik als Wissenschaft zu begründen. Wie ich die Aufgabe der Metaphysik fasse, darüber giebt die Einleitung einen klaren Ueberblick; was ich aber als eine unumgängliche Voraussetzung zur Lösung dieser ihrer Aufgabe betrachte, will ich hier darlegen.

An gross angelegten, tief gefassten und sogar — und zwar nicht nur im Einzelnen — erfolgreich unternommenen und durchgeführten metaphysischen Systemen fehlt es nicht. Dass diese Systeme aber nur Systeme blieben und nicht zu einem endgültigen System führen konnten, lag es nicht so sehr an ihnen selbst als an einer ausser ihnen liegenden und von ihnen selbst ohne Discussion angenommenen Voraussetzung. Diese Voraussetzung bezieht sich auf die innere Struktur des Raumes und der Zeit als der allgemeinen unabstrahierbaren Formen des Seins. Ausser der Metaphysik nämlich, deren Aufgabe in Bezug auf den Raum und die Zeit darin liegt ihre Art und Weise der Realität und ihre innere Struktur zu erforschen, ist es noch die Mathematik, die sich ebenso mit der inneren Struktur der beiden und in erster Reihe derjenigen des Raumes beschäftigt. So oft und so eindringend sich nun die Metaphysik im Laufe ihrer historischen Entwickelung mit der inneren Struktur des Raumes auch beschäftigt hat, und so oft sie dabei auch von den allgemein angenommenen Voraussetzungen der Mathematik abgewichen hat, sie hat doch nie den Muth gehabt, die Mathematik selbst einer Kritik zu unterziehen, d. h. in entsprechendem Falle eine Umbildung derselben vorzunehmen. Seit der alte Zeno in seinen berühmten Beweisen die beiden entgegengesetzten Theorien des Finitismus und

des Infinitismus begründet hat, ist der Streit zwischen beiden Jahrhunderte lang geführt worden, und obgleich in der Mathematik der Infinitismus längst gesiegt hat, hat er in der Philosophie noch immer seinen Gegner nicht besiegt. Und doch ist das Schauspiel dieses Zweispaltes ein gar merkwürdiges: wenn der mathematische Infinitismus richtig ist, dann ist es ja von der Philosophie nur ein Scheingefecht, wenn sie denselben bestreitet, wenn der philosophische Finitismus aber richtig ist, dann ist es ein grosser Fehler der Mathematiker, dass sie ihre Wissenschaft auf einer völlig unsoliden Basis noch immer aufgebaut halten!

Der Grund dieses seltsamen Zwiespaltes zwischen der Mathematik und der Philosophie in der Frage der inneren Struktur des Raumes scheint mir darin zu liegen, dass die Philosophie unterlassen hat, die Mathematik von finitistischer Grundlage aus zu reformieren, wenn es die Mathematiker schon von vorneherein ablehnen auf dieser Grundlage ihre Wissenschaft aufzubauen. Der philosophische Finitismus hat sich auch in der That einige Male in den älteren Zeiten bemüht, dieser seiner Aufgabe zu entsprechen, aber die Versuche die in dieser Richtung gemacht worden sind waren so unvollkommen, dass sie gar keinen Einfluss auf die Mathematik auszuüben im Stande waren. Den ersten ausgeführten Versuch dieser Art finden wir bei der berühmten arabischen Schule der Mutakallimun. Sie haben zum ersten Male ernstlich versucht, den Raum aus einfachen Raumpunkten (die bei ihnen zugleich einfache materielle Substanzen resp. Atome sind) zusammensetzen zu lassen. Ausser diesem allgemeinen Princip der discreten Geometrie scheinen aber die Mutakallimun keine Ausführung im Einzelnen versucht zu haben. Zwar haben sie viele geometrische Figuren für einen Sinnenschein erklärt, aber welche Figuren dabei als geometrisch mögliche zurückbleiben, scheinen sie nicht näher untersucht zu haben. Auf eine Schwierigkeit, die von grundlegender Bedeutung für die discrete Geometrie ist, sind die Mutakallimun von ihren Gegnern früh aufmerksam gemacht worden, ohne dieselbe überwunden zu haben. Wenn jede Linie aus Punkten besteht, dann muss die Grösse der Linie gleich der Anzahl der in ihr enthaltenen Punkte sein, in welchem Falle dann die Diagonale in einem Quadrat gleich seiner Seite sein müsste, da sie die gleiche Zahl von Punkten enthält. Diese Schwirigkeit schien den Mutakallimun unüberwindlich und so haben sie nicht nur die Möglichkeit des Quadrats sondern auch der irrationalen Linien überhaupt bezweifelt. In der Scholastik hat man das Problem der Zusammensetzung des Raumes viel verhandelt, es waren auch viele

Anhänger des Finitismus da, aber unfruchtbar wie sie war hat sie keinen wirklich neuen Gesichtspunkt zur Lösung des Problems beigebracht.

Viel höher als derjenige der Mutakallimun steht der Versuch der discreten Geometrie, den Giordano Bruno gemacht hat. In seinem Werke „De triplici minimo“ hat er die metaphysische Grundschwierigkeit, die Aristoteles gegen die Möglichkeit der Zusammensetzung des Raumes aus einfachen Punkten resp. gegen die Berührung zweier einfachen Punkte vorgebracht, durch die Unterscheidung zweier Punktenarten erfolgreich überwunden. Aristoteles behauptet bekanntlich, dass sich zwei einfache Raumpunkte deshalb nicht miteinander berühren können weil wenn sie dies thäten sie es als Ganze thun müssten, wodurch sie miteinander zusammenfallen müssten, also nicht zwei Punkte sein könnten. Bruno unterscheidet, um dieser aristotelischen Schwierigkeit zu entgehen, den Punkt als Minimum, als den kleinsten realen Raumbestandtheil, von dem Punkte als Terminus, als der Berührungsgrenze zweier Punkte miteinander. Die realen Punktenminima berühren sich miteinander nicht unmittelbar und als solche (in welchem Falle der aristotelische Einwand gelten würde, vgl. „De triplici minimo“ I, cap. VII, p. 29 und 30) sondern vermittelst der Berührungsgrenzen, die wohl ebenso untheilbare Punkte darstellen, die aber nicht selbstständig sondern eben nur als die gemeinsame Grenze zweier Minima bestehen können. Infolgedessen betrachtet Bruno die Grösse des Minimus als 1 diejenige des Terminus als 0 (vgl. die Definitionen beider ib. IV, cap. VII p. 145) so dass nur aus den Minima der Raum wachsen resp. als Grösse zusammengesetzt werden kann, aus den Terminis nicht (ib. I, cap. X, p. 41 und III, cap. II). Weiter unterscheidet Bruno unter den Minima zwei Arten, indem er das Minimum der Fläche von dem Minimum des Körpers unterscheidet: das Flächenminimum ist kreisförmig, dasjenige des Raumes kugelförmig. (ib. I, cap. XII, p. 46). Indem ich weitere Details übergehe* will ich nur noch erwähnen, dass Bruno die oben erwähnte Schwierigkeit der Gleichkeit der Diagonale des Quadrats mit seiner Seite auf die Weise löst, dass er die in der Diagonale liegenden Punkte nicht als ein-

* Die Versuche der discreten Geometrie oder, wie er sie nennt, der mathematischen Atomistik bespricht ziemlich eingehend Lasswitz in seiner „Geschichte der Atomistik vom Mittelalter bis auf Newton“ II Bde Hamburg und Leipzig 1890, nach dem ich die obige kurze historische Skizze entworfen habe. In Bezug auf Bruno habe ich noch das Originalwerk herangezogen (erschienen in „Jordani Bruni Nolani Opera, c. F. Tocco et H. Vitteli, vol I. pars III, Fiorentiae 1889).

ander berührende Punkte betrachtet, woraus einerseits folgt, dass sie weiter voneinander abstehen als die sich berührenden Punkte in den Seiten und andererseits, dass die Diagonale überhaupt keine reelle d. h. keine Gerade überhaupt darstellt. Bruno macht weiter zum ersten Male den Versuch vom Standpunkte der discreten Geometrie zu entscheiden, welche Figuren geometrisch möglich und welche unmöglich sind, und obgleich er dabei die fundamentale Bedeutung des Dreiecks und des Quadrats in gewissem Sinne eingesehen hat, so hat er doch im Ganzen so fehlerhafte und unzusammenhängende Sätze darüber aufgestellt, dass sie für den Aufbau der discreten Geometrie ohne Werth sind. Ausser Bruno sind als Vertreter und bis zu einem gewissen Grade als selbständige Förderer der discreten Geometrie Roger Bacon, Basso und Lubin zu betrachten. Bedeutung für dieselbe hat noch Maurolycus, der zum ersten Male die Figuren bestimmt zu haben scheint, die den Raum lückenlos ausfüllen, eine Frage die in der Scholastik infolge des „horror vacui" eine grosse Rolle gespielt hat.

Dies sind in der Hauptsache diejenigen die ich als meine Vorgänger auf dem Gebiete der discreten Geometrie anführen kann. So erfolgreich nun der grösste unter ihnen, Bruno, auch in der grundlegenden Unterscheidung des reellen Mittel- und des irreellen Zwischenpunktes (so nenne ich nämlich jene beiden Punktenminima) gewesen ist, so hat er doch dabei die geometrische Natur des irreellen Zwischenpunktes so verkannt, dass infolgedesen der weitere Aufbau der discreten Geometrie ganz unmöglich war. Die Grösse des Zwischenpunkes setze ich gleich 1 und dadurch bin ich in der Lage zu demjenigen Begriff zu gelangen, der von grundlegender Bedeutung für die discrete Geometrie ist, und das ist der Begriff der mittelbaren Berührung. *Mit diesem Begriffe steht und fällt die discrete Geometrie.* Erst auf Grund dieses Begriffs ist man in der Lage jene Schwierigkeit der Gleichkeit der Diagonale und der Seite in einem Quadrat zu beheben: die reellen Punke der Diagonale berühren sich zwar nicht unmittelbar, sie sind aber auch nicht ohne Berührung, sondern ihre Berührung ist eben eine mittelbare. Mit dieser Unterscheidung der beiden Berührungsarten steht es nun in Verbindung, dass ich die Grösse des Raumes allein nach den Berührungsentfernungen der realen Punkte und nicht nach der Anzahl dieser oder etwa beider bemesse, welchen Grundsatz ich eingehend begründet habe. Auf Grund dieser Principien war es dann leicht zu entscheiden, welche von den sinnlich wahrgenommenen Figuren geometrisch construirbar sind und welche nicht, welche Bestimmung

ich auch in Bezug auf den n-dimensionalen Raum ausgeführt habe, wobei sich das merkwürdige Resultat ergab, dass der volle ausgebreitete Raum nicht mehr denn sechs Dimensionen haben könne.

Die Vorzüge die die neue Geometrie in vielen geometrischen Einzelproblemen vor der geltenden hat, lässt sich leicht aus den betreffenden Abschnitten des Werkes und dem Anhang, in dem dieselbe systematisch dargestellt ist, ersehen; ich will hier jedoch die bemerkenswerthesten dieser Vorzüge hervorheben. Erstens ist die Bewegung in der neuen Geometrie völlig ausgeschlossen worden, ein Vorzug, den die geltende Geometrie trotz vieler Bemühungen nicht erlangen konnte. Die Beweise für die Congruenz der Dreiecke z. B. sind in unserer Geometrie ganz ohne die durch Bewegung bewirkte Deckung derselben durchgeführt worden, es ist sogar diese Deckung angesichts der qualitativen Ungleichartigkeit der Dreiecksseiten in einigen Fällen nicht einmal möglich. Nur an einer Stelle scheint es, das wir diesen Begriff der Bewegung nicht vermeiden konnten: bei dem höchst wichtigen und schwierigen Uebergange der dreieckige Ebene in die quadratische (vgl. Lehrsatz 40, I Th. 1 Ab.). Jeder aufmerksame Leser wird aber, glaube ich, leicht finden, dass die Bewegung, deren wir uns dort bedient haben, nur in übertragenem Sinne zu nehmen ist und nur dem leichteren Verständniss der Sache zu Liebe herangezogen worden ist. Der zweite Vorzug der neuen Geometrie liegt darin, dass in ihr die Hülfslinien nicht mehr nöthig sind und zwar einfach deshalb, weil alle möglichen Raumgebilde als solche in dem Raume selbst, sobald er discret gefasst wird, gegeben sind, so dass statt in einer Figur die Hülfslinien ziehen zu müssen man dieselben nur in Betracht zu ziehen braucht. Im Zusammenhang damit steht es zugleich, dass wir Ausdrücke wie „in einem Punkte ausserhalb einer Geraden eine Parallele ziehen“ etc. eigentlich nicht mehr gebrauchen sollten denn in der neuen Geometrie giebt es keine Raumgebilde, die in dem fertigen Raume zu ziehen wären, sondern nur solche die in ihm bestehen und nur constatiert zu werden brauchen; wo aber diese Ausdrücke doch vorkommen sind sie wiederum nur als Anbequemungen an das Frühere zu betrachten.

Ausser diesen beiden Hauptvorzügen der neuen Geometrie vor der alten, die mehr methodischer Natur sind, hat sie noch viele andere nicht minder wichtige. So z. B. lassen sich die elementaren geometrischen Begriffe der Geraden, der Richtung, der Dimension etc. in der neuen Geometrie streng eindeutig definieren, während alle die in dieser Hinsicht versuchten Definitionen der geltenden

Geometrie als absolut misslungen zu betrachten sind. Ausserdem werden in der neuen Geometrie die merkwürdigen Eigenschaften der geometrischen Gebilde unmittelbar verständlich, während sie in der geltenden Geometrie ein wahres Misterium sind und bleiben.

Neben den unläugbaren Vorzügen der neuen Geometrie vor der geltenden hat sie auch gewisse Nachtheile. Obgleich diese Nachttheile von den Vorzügen bei weitem überboten werden, so sollen sie doch nicht unerwähnt bleiben. Auf Grund der geltenden Geometrie lassen sich nämlich für gewisse geometrische Gebilde recht allgemeine Lehrsätze aufstellen, während dies in der discreten Geometrie infolge der qualitativen Gliederung derselben nicht mehr möglich ist. Ausserdem entfällt mit dem Unendlichkeitsbegriff auch die grosse Einfachkeit und umfassende Allgemeinheit der Beweisführung gewisser Lehrsätze, die auf Grund der Grenzmethode zu erlangen ist, hinweg. Ein klassisches Beispiel dieser Art bildet der stereometrische Lehrsatz von der Raumgleichkeit der Pyramiden mit der gleichen Grundfläche und gleicher Höhe, ein Lehrsatz der in der geltenden Geometrie nur auf Grund der Grenzmethode bewiesen wird, während der entsprechende Lehrsatz für die Prismen auch auf elementarem Wege d. h. ohne den Unendlichkeitsbegriff nur recht umständlich deduciert werden kann. In der neuen Geometrie muss der Pyramidensatz ganz ebenso umständlich deduciert werden wenn er ohne den Unendlichkeitsbegriff deduciert werden soll, und ich habe in dem Anhang eine solche Deduction versucht, eine Deduction übrigens, die man auch auf dem Gebiete der geltenden Geometrie leicht hätte machen können, wenn man nur nicht das so bequeme Mittel der Grenzmethode vor sich gehabt hätte.

Nachdem ich nun so im Wesentlichen den Inhalt der discreten Geometrie dargelegt habe, will ich nur noch einige Worte über meine Darstellung derselben sagen. In dem Werke selbst habe ich, nachdem ich die geltende Geometrie einer ziemlich eingehenden Kritik in ihren methaphysischen und mathematischen Grundlagen unterzogen habe, die discrete Geometrie in ihren Grundprincipien klar begründet. In dem Anhang habe ich dann die neue Geometrie selbst systematisch zu entwickeln versucht, indem ich mich dabei selbstverständlich nur auf die ersten Elemente beschränkt habe. Von den drei Theilen, in die diese systematische Darstellung zerfällt, ist der erste Theil und besonders der erste Abschnitt desselben der vollständigste; in den beiden letzten Abschnitten des ersten Theiles habe ich nur diejenigen Lehrsätze angeführt die von entscheidender Bedeutung für das Gebände der discreten Geometrie sind; in den

beiden anderen Theilen habe ich mich nur auf das Nothwedigste beschränkt, indem das Hauptgewicht auf die principielle Feststellung der möglichen Räume gelegt wurde. Von den verhältnissmässig wenigen n-dimensionalen Raumformen, die sich bei dieser Feststellung als möglich ergaben, habe ich eingehender nur die vierdimensionale behandelt, um auch in dieser Hinsicht eine gewisse Vollständigkeit meiner Darstellung der Geometrie zu geben. Diese Darstellung der vierdimensionalen Geometrie ist eng an diejenige der dreidimensionalen angebunden worden. Im Ganzen ist dabei ausser den Sätzen über das Verhältniss des Parallelismus der Geraden, Ebenen resp. der dreidimensionalen Räume in dem drei- und dem vierdimensionalen Raume nur noch der Satz über den Rauminhalt der Prismen und der Pyramiden in beiden Räumen ausgeführt, wobei bei späteren Beweisen in vielen Fällen auf die früheren ähnlichen nur hingewiesen wurde. Da ich allerdings das was man einen Mathematiker von Fach nennt nicht bin, so wird man mir wohl verzeihen, wenn ich vielleicht hie und da einen Fehler im Beweisverfahren begangen haben sollte. Ich weiss recht gut, dass jene systematische Darstellung nur der erste Entwurf eines Systems der neuen Geometre ist (so ist z. B. auf die trigonometrische Frage keine Rücksicht genommen etc.) und ich bitte deshalb, dieselbe nur als einen solchen zu betrachten. Ich weiss aber ebenso gut dass, mögen meine Beweisführungen im einzelnen auch irrig sein mögen die Verschiebungen noch so vieler Lehrsätze bei ihrer endgiltigen systematischen Anordnung vorkommen, meine Darstellung der discreten Geometrie im Wesentlichen die Grundlagen derselben festgelegt hat, und dass, wenn sich die discrete Geometrie behaupten will, sie dies nur auf Grund der von mir dargelegten Principien thun kann.

So gross nun die Bedeutung der discreten Geometrie als rein mathematischer Disciplin auch ist und so überraschend neu und bedeutungsvoll manche ihrer Resultate sind, so hat sie doch im Rahmen unseres Werkes nur eine untergeordnete Bedeutung. Zwar ist der Theil des Gesammtwerkes, der hier zur Veröffentiichung gelangt, fast der Hälfte seines Umfangs nach ein rein mathematischer, trotzdem aber ist derselbe als selbstständiges Werk betrachtet — und als solches kann derselbe seiner ganzen Anlage nach ganz gut betrachtet werden — seinem Inhalte noch viel mehr philosophisch als mathematisch. Ursprünglich lag es mir auch gar nicht im Plane eine Umbildung der geltenden Geometrie vorzunehmen, es lag mir nur daran, das metaphysische Weltproblem aufzulösen. Die geltende Geometrie erwies sich aber bei meinen diesbezüglichen Bemühungen

als ein so grosses Hinderniss, dass ich bald zum Bewusstsein kam, dieses Hinderniss müsse weggeräumt werden, wenn das grosse Welträtsel gelöst werden soll. Und nachdem es mir gelang, das Hinderniss wegzuräumen, habe ich meine ganze Aufmerksamkeit der Lösung jener Hauptaufgabe zugewendet.

Nachdem das Problem des Raumes und der Zeit mathematisch aufgelöst wurde und das Princip der Identität sich daher als vollgültig erwies, war die Lösung der ontologischen Grundprobleme nicht mehr so schwierig wie früher. Das Problem der beziehungslosen und der beziehungsvollen Welt war leicht auflösbar, sobald die Discretion als das metaphysische Grundprincip erkannt wurde, und sie konnte dies nicht eher sein, als bevor man sie auf dem mathematischen Gebiete als solche erkannte. Ebenso war das Problem des Werdens leicht auflösbar, sobald man die Unendlichkeit aus der Welt der Vielheit, der Mannigfaltigkeit und der Veränderung völlig ausgeschlossen hatte, denn es ergab sich dann mit metaphysischer Notwendigkeit, dass das Unendliche nur als eine absolut einfache, unausgedehnte qualitätslose Substanz zu fassen ist. So [illegible] ein entschiedener Gegner des Unendlichkeitsbegriffs [illegible] als Mathematiker auch bin, als Metaphysiker glaube ich, dass ohne die Zuhilfenahme dieses Begriffs, wenn er nur von allen seinen endlichen Beimischungen befreit wird, die der wichtigsten ontologischen Probleme nicht auflösbar ist, wie ich dies im vierten Kapitel des ersten Abschnitts eingehend dargelegt habe.

Bei dieser Auflösung der ontologischen und der mathematischen Probleme habe ich eine Voraussetzung gemacht, die ohne Zweifel starken Anfechtungen ausgesetzt werden wird. Dies ist die Voraussetzung des realen Negationsactes. Dass der Negationsact nicht ein rein formaler Trennungs- und Unterscheidungsact ist, sondern dass er als solcher etwas reelles ist, so schwierig es auch sein mag die Art und Weise dieser seiner Realität zu begründen, dafür habe ich im Ganzen vier Hauptbeweise angeführt. In dem zweiten Kapitel befindet sich der erste Beweis dafür, den ich aus [illegible] angegeben Gründen den *logischen* Beweis nennen möchte; der zweite der, wie mir scheint, der einleuchtendste und wichtigste von allen ist, ist der im vierten Kapitel des ersten Abschnitts angeführte, den ich aus leicht einzusehenden Gründen den *[illegible]* nennen möchte; der dritte Beweis, der zwar nicht am einleuchtendsten, der aber dafür sicherlich der exacteste ist, ist der im zweiten Kapitel des zweiten Abschnitts angeführte *[illegible]*, indem nur durch die Voraussetzung des reellen Negationsactes eine Schwierigkeit in

den Fundamenten der discreten Geometrie behoben werden kann, für deren Ueberwindung ich sonst keinen Ausgang erblicke; und schliesslich der vierte Beweis ist der im dritten Kapitel desselben Abschnitts aus der Natur der Bewegung gefolgerte, den ich infolgedessen den *kinematischen* nennen möchte. Jene Voraussetzung glaube ich nun durch diese vier Beweise so genügend begründet, dass ich mit Recht an derselben festzuhalten vermag.

Ob sich auf den in diesem Werke dargelegten allgemeinontologischen und mathematisch-mechanischen Principien das Gebäude der speciellen Metaphysik und theilweise auch dasjenige der exacten Wissenschaft aufbauen lässt oder nicht, kann nur die Anwendung und speciellere Ausgestaltung derselben lehren. Ob mein Versuch in dieser Richtung, der in den weiteren Abtheilungen des Gesammtwerkes unternommen werden wird, erfolgreich sein wird oder nicht, weiss ich nicht. Ich werde im Falle dass dieser letztere Versuch misslingt eher geneigt sein dies meinen mangelhaften Kräften zur Ausführung einer solchen Aufgabe zuzuschreiben, als in den Grundlagen dieses Werkes logische Mängel zuzugestehen. Denn abstrakte Wahrheiten auffinden und sie konkret anwenden ist nicht eins und dasselbe, und wenn man in dem Ersten erfolgreich gewesen, so ist das sicherlich noch lange keine Bürgschaft dafür, dass man es auch in dem Zweiten sein werde.

Dr Branislav Petronievics.

Einleitung.

Metaphysik ist seit jeher als Wissenschaft von den ersten Principien des Seins oder von den letzten Gründen aller Dinge definiert worden. Die Möglichkeit einer solchen Wissenschaft — wenn dieser Name auf dieselbe noch passt — mag man noch so sehr bestreiten, dass der menschliche Geist aber den Begriff derselben klar fassen und formulieren kann, ist unzweifelhaft. Bevor wir nun näher auf die Bestimmung der Aufgabe der Metaphysik eingehen ist zuvor die Entscheidung der Frage über ihre Möglichkeit durchaus notwendig. Diese Frage habe ich nun in meinem erkenntnisstheoretischen Werke* eingehend dahin beantwortet, dass die Metaphysik möglich ist, und hier will ich nur noch eine sehr wichtige Ergänzung jener Ausführungen liefern, die zugleich für die von mir in dem vorliegenden Werke gebrauchten metaphysischen Untersuchungsmethoden entscheidend ist.

Die Metaphysik wie alle Erkentniss überhaupt muss, wie ich dies in der Erkenntnisslehre ausgeführt habe (vgl. Kap. I, II und V), von der unmittelbaren Erfahrung ausgehen und dieselbe ist offenbar nur dann möglich, wenn die unmittelbare Erfahrung absolute ansichseiende Realitet hat, wenn es in derselben keinen Schein giebt. Dass die unmittelbare Erfahrung als absolut real anerkannt werden muss habe ich schon in der Erkenntnisslehre bewiesen, widme aber demselben Thema auch das ganze erste Kapitel des vorliegenden Werkes, in dem sich jene absolute Realität als unumstössliche Wahrheit von allen Seiten ergeben wird. Auf Grund dieser Grundwahrheit, auf der das gesammte vorliegende Werk beruht, habe ich in der Erkenntnisslehre nachgewiesen, dass der Ursprung der Erkenntniss einzig und allein in der unmittelbaren Bewusstseinserfahrung (eines bewussten

* Principien der Erkenntnisslehre. Prolegomena zur absoluten Metaphysik. Von Branislav Petronievics, Dr. ph. Berlin 1900. Verlag von Ernst Hofmann & Comp

Individuums) liegen kann, da das Denken als psychische Funktion aus konkretem Erfahrungsmaterial besteht, welches Material in erster Reihe in den Erinnerungsbildern als solchen liegt (vgl. Kap. V der Erkenntnisslehre). Das Erinnerungsbild ist als Bewusstseinsinhalt ebenso absolut real wie die Empfindung und wie jeder andere Bewusstseinsinhalt, dasselbe kann infolgedessen nur als ein seiner Intensität nach schwächerer Bewusstseinsinhalt von derselben Art wie es der entsprechende reale starke Inhalt ist betrachtet werden, wie dies von Hume mit besonderer Klarheit behauptet worden ist.

Wenn es nun mit absoluter Gewissheit feststeht, dass das Denken als psychische Funktion durchaus aus Erfahrungselementen besteht, so führt sich die Frage der metaphysischen Erkenntniss darauf zurück, ob man auf Grund der Erfahrung letzte Seinsprincipien finden und aufstellen kann. Diese Frage ist offenbar nur ein Theil der viel allgemeineren Frage ob und wie das rationale d. h. unbedingt gewisse allgemeingiltige und notwendige Wissen auf Grund der Erfahrung möglich ist. Der konsequenteste Vertreter des obigen psychologischen Empirismus, Hume (Berkeley ist als Begründer desselben zu betrachten, Locke hatte nur die allgemeine Maxime davon ausgesprochen), ist zugleich der erste, der sich diese Frage mit genügender Klarheit gestellt hat und damit der Begründer des logischen Empirismus geworden ist (den psychologischen Empirismus muss man nämlich streng von dem logischen unterscheiden, aus der psychologischen Erfahrungstheorie des Denkens, wie sie oben kurz charakterisiert wurde, folgt nicht so ohne weiters die Läugnung der logischen Allgemeingiltigkeit des Denkens). Ein so grosser Skeptiker Hume nun auch in Bezug auf manche fundamentale Erkenntnissprincipien auch war, so hat er doch die Möglichkeit der unbedingt gewissen Erkenntniss auf Grund der Erfahrung *im Princip* nicht geläugnet, er hat sogar jenen fundamentalen Erkenntnissprincipen nur deshalb die unbedingte Gewissheit abgesprochen, weil sie sich auf Grund des von ihm aufgestellten logischen Erfahrungsprincips nicht rechtfertigen liessen. Dieser Sachverhalt kann für denjenigen, der das Hume'sche System in beiden seiner Hauptwerke studiert hat, nicht verborgen bleiben, obgleich der Sprachgebrauch besonders in dem späteren Werke nur allzu geeignet ist denselben zu verdunkeln. In seinem grösseren Werke (vgl. A Teatise on human nature, B. I, p. III, sect. 1 „of knowledge") bezeichnet Hume diejenige Erfahrungserkenntniss für unbedingt gewiss d. h. in logischem Sinne allgemeingiltig und apodictisch, die sich auf die in der Natur der Vorstellungen selbst (resp. der Objecte) liegenden Relationen bezieht,

während sich die wahrscheinliche Erkenntniss auf die rein äusserlichen von der Natur der Vorstellungen nicht abhängigen Relationen bezieht, indem er unter die ersten Relationen diejenigen der Ähnlichkeit, des Gegensatzes, der Qualitätengrade und der Quantität und der Zahl subsumiert, und unter den zweiten diejenigen der Identität, der zeitlichen und räumlichen Beziehungen und der Causalität. Bei der ersten Erkenntniss können wir rein aus den Vorstellungen d. h. den Erinnerungsbildern Schlüsse machen, die dann für die Erfahrungsobjecte im engeren Sinne d. h. Wahrnehmungsobjecte giltig sind (was offenbar im Sinne Hume's nur deshalb möglich ist, weil unsere Vorstellungen mit jenen Objecten wesensgleich sind, weil sie ihnen abgebildet sind — vgl. den Schluss des oben citierten Abschnitts), bei der zweiten Erkenntniss können wir dies nicht thun, und müssen demnach in der Erfahrung im engeren Sinne, d. h. in den Wahrnehmungsobjecten den besonderen Ursprung der entsprechenden Relationen suchen. Das und nichts anders bedeutet der besonders im späteren Werke mehrfach gebrauchte Ausdruck Hume's dass der Ursprung der mathematischen Erkenntnis in der reinen Vernunft und derjenige der Causalität in der Erfahrung liegt, „die reine Vernunft" bei Hume ist mit der reinen apriorischen Vernunft der reinen Rationalisten durchaus nicht identisch. Aus diesem Missverständniss der grundlegenden Lehre Hume's hat der spätere radicale Empirismus Hume einer Inconsequenz beschuldigt und auch die mathematische Erkenntniss „auf Erfahrung" zurückzuführen gesucht.

Ich habe die obige Lehre Hume's in kurzen Zügen nur deshalb vorgeführt um zu zeigen, dass er die Möglichkeit einer unbedingt gewissen Erkenntniss auf Grund des psyhologischen Empirismus mit grosser Einsicht zugelassen und vertheidigt hat. Die Frage kann sich nur darum drehen, ob das von Hume aufgestellte Kriterium dieser Erkenntniss ein richtiges ist, und wenn nicht, ob ein anderes Kriterium derselben möglich und denkbar ist? Unbedingt gewiss d. h. allgemeingiltig im logischen Sinne ist nur diejenige Wahrheit, deren Gegentheil unmöglich ist, die also als solche unveränderlich ist: Hume hat demgemäss nur diejenigen Relationen der Objecte für unbedingt gewiss gehalten, die in den entsprechenden Vorstellungen liegen, deren Änderung nicht ohne die Änderung der Vorstellungen selbst möglich ist. Dass die Summe der Winkel im Dreiecke gleich 2 R ist, ist für Hume eine in der Vorstellung des Dreiecks selbst liegende Relation, die nur mit der Aufhebung dieser Vorstellung selbst aufhören kann, und demnach für jede Vorstellung resp. jedes entsprechende Object gilt. Dagegen soll die Relation der Causalität

deshalb nicht unbedingt gelten, weil sie ganz ebenso wie etwa die räumliche Entfernung zweier Objecte ganz äusserlich ist, in der einzelnen Vorstellung als solcher liegt nichts was sie mit einer anderen Vorstellung notwendigerweise verknüpfen würde. Dieses von Hume aufgestellte Criterium ist wohl im allgemeinen gesprochen richtig, aber unbestimmt und ungenügend, denn in vielen Fällen ist es ungewiss, welche Relationen eben die in den Vorstellungen resp. Objecten liegenden und mit ihnen untrennbar verbundenen sind. Desshalb müssen wir andere speciellere Kriterien aufsuchen, die uns in den Stand setzen werden zu entscheiden, ob eine gegebene Erfahrungsthatsache — um diesen allgemeinen Ausdruck, der alle Arten des Erfahrungsseins und nicht bloss diejenigen der Verhältnisse und Beziehungen umfasst, zu gebrauchen — eine logische Notwendigkeit darstellt oder nicht.

Ich nenne eine Erfahrungsthatsache im logischen (qualitativen) Sinne *einfach*, wenn sie als solche eine logische Notwendigkeit darstellt, d. h. nicht anders sein noch gedacht werden kann als sie ist resp. gedacht wird, und demgemäss eine Erfahrungsthatsache *zusammengesetzt*, wenn sie keine logische Notwendigkeit darstellt, d. h. auch anders sein und gedacht werden kann als sie ist resp. gedacht wird. Neben diesem allgemeinen logischen Unterschiede der Erfahrungsthatsachen müssen noch gewisse specielle Unterschiede derselben festgestellt werden, damit einerseits die Untersuchung ihrer logischen Notwendigkeit leichter erfolgen kann und andererseits eine Verwirrung der Ausdrücke dabei vermieden werde. Eine Thatsache kann offenbar noch in zwei Hinsichten einfach sein: einerseits in dem Sinne dass sie *numerisch einfach* ist, d. h. in einer einfacheren Gestalt nicht gedacht werden könne, und andererseits *quantitativ einfach*, wenn sie nämlich so einfach ist, dass sie nur aus einem einzigen Gliede besteht. Es ist nach dieser Begriffsbestimmung selbstverständlich, dass eine in quantitativem Sinne einfache Thatsache zugleich numerisch einfach ist, während eine numerisch einfache Thatsache auch quantitativ zusammengesetzt sein kann, wenn sie nämlich aus zwei oder mehreren Gliedern besteht. Im Ganzen können also die Erfahrungsthatsachen nach drei Gesichtspunkten einfach und zusammengesetzt sein: nach dem Gesichtspunkte der Qualität, der Zahl und der Quantität, und die Untersuchung ob eine Thatsache in logischem d. h. qualitativem Sinne einfach oder zusammengesetzt ist muss offenbar zugleich die Bestimmung des Verhältnisses dieser drei Gesichtspunkte zueinander umfassen.

Die Streitfrage des logischen Empirismus und des logischen

Rationalismus führt sich nun darauf zurück, ob es in der unmittelbaren Erfahrung einfache d. h. in logischem (qualitativem) Sinne unveränderliche Thatsachen giebt, oder ob alle Erfahrungsthatsachen zusammengesetzt seien, d. h. in logischem Sinne veränderliche und zufällige Thatsachen sind. Diese Frage im allgemeinen zu entscheiden ist nicht möglich, da die angebliche allgemeine Entscheidung wiederum auf der Voraussetzung gewisser einfachen Erfahrungsthatsachen beruhen müsste, die eben überhaupt in Frage stehen, die Frage kann demnach nur so entschieden werden, wenn zunächst diese allgemeinen einfachen Erfahrungsthatsachen als solche festgestellt werden, was offenbar nicht anders denn durch die Erfahrung selbst geschehen kann. Diese zunächst festzustellenden einfachen Thatsachen müssen offenbar diejenigen sein die sowohl in qualitativem wie in numerischem Sinne einfach sind, d. h. die die letzten absolut unzurückführbaren Thatsachen darstellen, aus denen dann zunächst die qualitativ einfachen aber numerisch zusammengesetzten folgen.

Bevor wir nun zur Auffindung der besagten Kriterien schreiten müssen wir zuvor die Erfahrungsthatsachen nach jenen drei oben charakterisierten Gesichtspunkten, die ihren logischen Werth bestimmen, untersuchen, d. h. wir müssen untersuchen wie sich jene drei Gesichtspunkte zueinander verhalten indem sie eine Erfahrungsthatsache zu einer logischen Notwendigkeit resp. Zufälligkeit machen.

Dabei ist nun das Verhältniss der numerischen zu der logischen (resp. qualitativen) Einfachkeit resp. Zusammengesetztheit von grundlegender Bedeutung und wir wenden uns zunächst demselben zu. Während wir für eine numerisch einfache Thatsache ohne weiters behaupten können, dass sie zugleich qualitativ einfach ist, können wir dies für eine numerisch zusammengesetzte Thatsache offenbar nicht mehr in so bestimmter Weise thun. Eine numerisch zusammengesetzte Thatsache ist in qualitativem Sinne offenbar dann einfach, wenn sie sich auf die absolut einfachen Thatsachen (direkt oder indirekt) so zurückführen lässt, dass sie aus ihnen *in eindeutiger Weise* folgt, denn nur in diesem Falle ist sie ebenso unveränderlich und logisch notwendig wie es die absolut einfachen Thatsachen selbst sind, während wenn sie sich auf einfache Thatsachen nicht so zurückführen lässt, dass sie aus ihnen in eindeutiger Weise folgt, sie dann keine logische Notwendigkeit mehr darstellt, da dann aus jenen einfachen Thatsachen auch eine andere ihr ganz entgegengesetzte Thatsache folgen kann. Setzt man einmal einfache Thatsachen voraus, dann muss man.

sobald man ursprünglich eine Vielheit von solchen zulässt, auch Folgethatsachen zulassen, die sowohl in eindeutiger wie in mehrdeutiger Weise aus ihnen folgen. Logisch absolut zufällige, d. h. überhaupt keinen Grund ihrer Existenz habende Thatsachen kann man dann überhaupt nicht zulassen, denn sobald man eine Mehrheit von absolut einfachen Thatsachen in der Erfahrung angenommen hat hat man eo ipso damit numerisch zusammengesetzte Thatsachen zugelassen, und dann kann nur noch die Frage sein, ob alle diese Thatsachen auch in qualitativem Sine einfach sind oder nicht, was wiederum zunächst nur die Erfahrung entscheiden kann. Nun bietet uns die Erfahrung einander so widerstreitende Thatsachen dar, dass sie unmöglich zugleich alle als logisch einfache Thatsachen gelten können, und dann können wir diejenigen die dies nicht sind nur als mehrdeutige Folgen der einfachen Thatsachen auffassen. So sind z. B. sowohl die Eindimensionalität der Zeit wie die Dreidimensionalität des Raumes in numerischem Sinne zusammengesetzte Thatsachen: während aber die Eindimensionalität der Zeit leicht als eine in qualitativem Sinne einfache Thatsache erkannt werden kann, erkennt man erst nach eingehender Untersuchung dass die Dreidimensionalität des Raumes eine auch in logischem Sinne zusammengesetzte Thatsache ist, d. h. dass der Raum auch eine andere höhere oder geringere Zahl von Dimensionen haben kann. So sind z. B. die Thatsachen mancher geradliniegen und aller krummliniegen Figuren in numerischem Sinne zusammengesetzte Thatsachen: eine eingehendere Untersuchung stellt nun fest, dass jene erste Thatsache in qualitativem Sinne einfach, während die zweite auch in qualitativem Sinne zusammengesetzt ist. Schliesslich müssen wir nur noch — was eine unmittelbare Folgerung der obigen Ausführungen ist — hinzufügen, dass die quantitative Zusammengesetztheit dasselbe Verhältniss zu der qualitativen Einfachkeit wie die numerische hat, d. h. dass eine logisch einfache Thatsache quantitativ sowohl einfach wie zusammengesetzt sein kann während umgekehrt eine logisch zusammengesetzte Thatsache nie quantitativ einfach sein kann (da das quantitativ Einfache zugleich numerisch und demnach auch qualitativ einfach ist), und damit ist unsere Untersuchung über das Verhältniss jener dreien Gesichtspunkte einer Erfahrungsthatsache, wenn deren logischer Werth in Frage steht, vollendet.

Wären uns nun die numerisch einfachen Thatsachen als solche so in der unmittelbaren Erfahrung gegeben dass man gleichsam nur die Hände auszustrecken brauchte um sie zu fangen, dann wäre es nach dem eben Ausgeführten leicht zu entscheiden welche

Rationalismus führt sich nun darauf zurück, ob es in der unmittelbaren Erfahrung einfache d. h. in logischem (qualitativem) Sinne unveränderliche Thatsachen giebt, oder ob alle Erfahrungsthatsachen zusammengesetzt seien, d. h. in logischem Sinne veränderliche und zufällige Thatsachen sind. Diese Frage im allgemeinen zu entscheiden ist nicht möglich, da die angebliche allgemeine Entscheidung wiederum auf der Voraussetzung gewisser einfachen Erfahrungsthatsachen beruhen müsste, die eben überhaupt in Frage stehen, die Frage kann demnach nur so entschieden werden, wenn zunächst diese allgemeinen einfachen Erfahrungsthatsachen als solche festgestellt werden, was offenbar nicht anders denn durch die Erfahrung selbst geschehen kann. Diese zunächst festzustellenden einfachen Thatsachen müssen offenbar diejenigen sein die sowohl in qualitativem wie in numerischem Sinne einfach sind, d. h. die die letzten absolut unzurückführbaren Thatsachen darstellen, aus denen dann zunächst die qualitativ einfachen aber numerisch zusammengesetzten folgen.

Bevor wir nun zur Auffindung der besagten Kriterien schreiten müssen wir zuvor die Erfahrungsthatsachen nach jenen drei oben charakterisierten Gesichtspunkten, die ihren logischen Werth bestimmen, untersuchen, d. h. wir müssen untersuchen wie sich jene drei Gesichtspunkte zueinander verhalten indem sie eine Erfahrungsthatsache zu einer logischen Notwendigkeit resp. Zutälligkeit machen.

Dabei ist nun das Verhältniss der numerischen zu der logischen (resp. qualitativen) Einfachkeit resp. Zusammengesetztheit von grundlegender Bedeutung und wir wenden uns zunächst demselben zu. Während wir für eine numerisch einfache Thatsache ohne weiters behaupten können, dass sie zugleich qualitativ einfach ist, können wir dies für eine numerisch zusammengesetzte Thatsache offenbar nicht mehr in so bestimmter Weise thun. Eine numerisch zusammengesetzte Thatsache ist in qualitativem Sinne offenbar dann einfach, wenn sie sich auf die absolut einfachen Thatsachen direkt oder indirekt so zurückführen lässt, dass sie aus ihnen *in eindeutiger Weise* folgt, denn nur in diesem Falle ist sie ebenso unveränderlich und logisch notwendig wie es die absolut einfachen Thatsachen selbst sind, während wenn sie sich auf einfache Thatsachen nicht so zurückführen lässt, dass sie aus ihnen in eindeutiger Weise folgt, sie dann keine logische Notwendigkeit mehr darstellt, da dann aus jenen einfachen Thatsachen auch eine andere ihr ganz entgegengesetzte Thatsache folgen kann. Setzt man einmal einfache Thatsachen voraus, dann muss man,

sobald man ursprünglich eine Vielheit von solchen zulässt, auch Folgethatsachen zulassen, die sowohl in eindeutiger wie in mehrdeutiger Weise aus ihnen folgen. Logisch absolut zufällige, d. h. überhaupt keinen Grund ihrer Existenz habende Thatsachen kann man dann überhaupt nicht zulassen, denn sobald man eine Mehrheit von absolut einfachen Thatsachen in der Erfahrung angenommen hat hat man eo ipso damit numerisch zusammengesetzte Thatsachen zugelassen, und dann kann nur noch die Frage sein, ob alle diese Thatsachen auch in qualitativem Sine einfach sind oder nicht, was wiederum zunächst nur die Erfahrung entscheiden kann. Nun bietet uns die Erfahrung einander so widerstreitende Thatsachen dar, dass sie unmöglich zugleich alle als logisch einfache Thatsachen gelten können, und dann können wir diejenigen die dies nicht sind nur als mehrdeutige Folgen der einfachen Thatsachen auffassen. So sind z. B. sowohl die Eindimensionalität der Zeit wie die Dreidimensionalität des Raumes in numerischem Sinne zusammengesetzte Thatsachen: während aber die Eindimensionalität der Zeit leicht als eine in qualitativem Sinne einfache Thatsache erkannt werden kann, erkennt man erst nach eingehender Untersuchung dass die Dreidimensionalität des Raumes eine auch in logischem Sinne zusammengesetzte Thatsache ist, d. h. dass der Raum auch eine andere höhere oder geringere Zahl von Dimensionen haben kann. So sind z. B. die Thatsachen mancher geradliniegen und aller krummliniegen Figuren in numerischem Sinne zusammengesetzte Thatsachen: eine eingehendere Untersuchung stellt nun fest, dass jene erste Thatsache in qualitativem Sinne einfach, während die zweite auch in qualitativem Sinne zusammengesetzt ist. Schliesslich müssen wir nur noch — was eine unmittelbare Folgerung der obigen Ausführungen ist — hinzufügen, dass die quantitative Zusammengesetztheit dasselbe Verhältniss zu der qualitativen Einfachkeit wie die numerische hat, d. h. dass eine logisch einfache Thatsache quantitativ sowohl einfach wie zusammengesetzt sein kann während umgekehrt eine logisch zusammengesetzte Thatsache nie quantitativ einfach sein kann (da das quantitativ Einfache zugleich numerisch und demnach auch qualitativ einfach ist), und damit ist unsere Untersuchung über das Verhältniss jener dreien Gesichtspunkte einer Erfahrungsthatsache, wenn deren logischer Werth in Frage steht, vollendet.

Wären uns nun die numerisch einfachen Thatsachen als solche so in der unmittelbaren Erfahrung gegeben dass man gleichsam nur die Hände auszustrecken brauchte um sie zu fangen, dann wäre es nach dem eben Ausgeführten leicht zu entscheiden welche

numerisch zusammengesetzte Thatsache in logischem Sinne einfach und welche zusammengesetzt ist, da sich dies unmittelbar aus der Combination jener Thatsachen ergeben würde. In Wahrheit liegen aber die numerisch einfachen Thatsachen so tief verborgen in der unmittelbaren Erfahrung, dass es oft recht complicierter Gedankenreihen bedarf, um sie an's Tageslicht zu bringen. Die Kriterien also die entscheiden, welche Erfahrungsthatsache logisch einfach und welche logisch zusammengesetzt ist, sind schliesslich nur Kriterien zur Entscheidung welche Thatsache numerich einfach ist, da wenn wir diese kennen es dann leicht ist, die logisch zusammengesetzten Thatsachen zu entdecken. Wie können wir aber zu diesen Kriterien gelangen? Diese Kriterien müssen doch schliesslich, nach unseren erkenntnisstheoretischen Principien, wiederum der unmittelbaren Erfahrung entnomenen werden, was wiederum nichts anderes bedeutet, als dass sie selbst numerisch einfache Erfahrungsthatsachen darstellen müssen.

Aus dem Letzteren folgt nun unzweifelhaft, dass wir, wenn wir jene Kriterien entdecken wollen, wenigstens eine Erfahrungsthatsache haben müssen, dessen numerische Einfachkeit ohne weiters einleuchtend ist. Und thatsächlich haben wir eine solche Thatsache. Dies ist die Thatsache des absoluten Unterschieds des Seins von dem Nichtsein, eine Thatsache deren grundlegende Bedeutung wir schon in der Erkenntnisslehre festgestellt haben. Die numerische Einfachkeit dieser Thatsache ist so unzweifelhaft, dass ich nur auf meine diesbezüglichen Ausführungen in der Erkenntnisslehre (vgl. Kap. III und V) und in dem ersten Kapitel dieses Werkes hinzuweisen brauche, um sofort zur Benützung derselben zu dem hier verfolgten Zweck zu übergehen. Wie kann ich aber von dieser scheinbar so inhaltslosen rein formalen Thatsache, die einfach dass das Sein = Sein ist aussagt, dazu gelangen, in dem Inhalte dieses Seins die Thatsachen zu entdecken, die numerisch einfach sind? Wenn man aber bedenkt, dass das Sein nicht etwas bedeutet was neben dem Seinsinhalte gleichsam als ein Träger desselben bestünde, sondern dass das Sein des Seinsinhalts eben in diesem Inhalt als solchem liegt (vgl. darüber das erste Kapitel), so muss die Einfachkeit jener grundlegenden Thatsache auf das Vorhandensein der numerisch einfachen Thatsachen in diesem Seinsinhalt hinweisen, von denen sie gleichsam nur ein zusammenfassender und deshalb auch äusserlich sichtbarer Ausdruck ist. Die numerisch einfachen Thatsachen des Erfahrungsinhalts müssen demnach so beschaffen sein dass aus ihnen die numerische Einfachkeit der grund-

legenden Erfahrungsthatsache ohne weiters folgt, aus dieser Thatsache können wir demnach rückwärts jene Thatsachen erschliessen. Gäbe es nun in der unmittelbaren Erfahrung keine Thatsachen, die einander völlig widerstreitend sind und von denen doch jede den gleichen Anspruch auf numerische Einfachkeit erhebt, so wäre uns ja leicht die numerisch einfachen Thatsachen als solche zu erkennen und sie von den numerisch zusammengesetzten zu scheiden, da ja von zwei Thatsachen gleicher Art diejenige numerisch einfach ist, die sich auf die andere Thatsache von derselben Art nicht zurückführen lässt, dieses formale Kriterium würde dann also schon vollkommen genügen. Da dem aber nicht so ist, da es in der Erfahrung einander ganz widerstreitende Thatsachen giebt, so müssen wir ein besonderes Kriterium aufsuchen, das uns in jedem Falle in die Lage versetzt zu entscheiden, welche Thatsache numerisch resp. logisch einfach und welche logisch zusammengesetzt ist.

Dass es solche einander direct widerstreitenden Thatsachen in unserer unmittelbaren Erfahrung gibt, will ich an drei Beispielen zeigen, die zugleich von typischer Bedeutung sind. In meinem Bewusstsein sind einerseits von mir vollkommen abhängige und andererseits vollkommen unabhängige Veränderungen gegeben, und diese beiden Thatsachen widerstreiten einander offenbar so, dass es unmöglich ist beide zugleich für numerisch einfach zu erklären, ja es muss die eine von beiden offenbar für logisch zusammengesetzt erklärt werden, da sich nicht voraussetzen lässt dass in dem Ich, für sich — so wie es sich gegeben ist — gedacht, neben den Veränderungen die dasselbe unmittelbar in seinen Bewusstseinsinhalten hervorbringen kann noch Veränderungen bestehen können, die von ihm nicht ausgehen (vgl. Kap. IV d. Erkenntnisslehre). Ebenso sind in meinem Bewusstsein neben den in der Zeit relativ beständig und unverändert verbleibenden Seinsbestandtheilen Seinsbestandtheile gegeben die unbeständig und veränderlich sind, die erste Thatsache stellt das beständige in das Nichtsein nicht übergehende Sein, die zweite aber stellt das veränderliche für und in meinem Bewusstsein wirklich in's Nichtsein übergehende Sein, beide Thatsachen sind so einander widerstreitend dass es unmöglich ist dass beide in gleicher Weise im Bewusstsein ursprüngliche d. h. numerisch resp. logisch einfache Thatsachen sind. Ebenso ist der einfache Gegenwartspunkt der Zeit eine einfache untheilbare Einheit, während ich einen einfachen Raumpunkt nicht wahrnehme, und diese beiden Thatsachen widerstreiten einander vollständig, da es unmöglich ist vorauszusetzen, die Quantität der Zeit wäre aus einfachen Theilen zu-

sammengesetzt und diejenige des Raumes nicht. In allen diesen drei Fällen muss die eine der zwei Thatsachen offenbar für einen reinen Schein erklärt werden, d. h. wenn die eine Thatsache für logisch einfach und ursprünglich erklärt wird, dann wird damit eo ipso die andere für secundär und damit, wenn man auf dem Standpunkte der Ich-erfahrung durchaus verbleibt und keine Realität mehr zulassen will, für reinen absoluten Schein erklärt. Im ersten Falle wird dann, wenn die Thatsache der von mir unabhängigen Veränderungen für ursprünglich erklärt wird, die entgegengesetzte Thatsache der von mir abhängigen Veränderungen damit eo ipso für vollkommen scheinbar erklärt et vice versa; im zweiten Falle wird, wenn die Thatsache des unbeständigen Seins für ursprünglich erklärt wird, diejenige des beständigen für einen blossen Schein der Wahrnehmung et vice versa erklärt; im dritten Falle wird ebenso, wenn die Thatsache des einfachen Zeitaugenblickes für ursprünglich erklärt wird, die Abwesenheit des entsprechenden einfachen Punktes beim Raume für blossen Schein erklärt et vice versa.

Wie man aus dem eben Ausgeführten ersieht, sind wir bei den einander widerstreitenden Erfahrungsthatsachen, von denen jede den Anspruch auf logische Ursprünglichkeit erhebt, genöthigt, wenn wir der einen von beiden diese Ursprünglichkeit zuerkennen, dabei die andere für den blossen Schein der Wahrnehmung zu erklären, und es bleibt dabei dann völlig unbestimmt welche von ihnen für den Schein und welche für real d. h. ursprünglich zu erklären ist, nur ist, wenn die eine für real gilt, die andere blosser Schein et vice versa. Können wir nun aber ernstlich genommen eine Erfahrungsthatsache für einen Schein erklären? Wenn wir dies thäten, dann kämen wir damit offenbar mit jener Grundthatsache des absoluten Unterschieds des Seins von dem Nichtsein in's Konflikt, da uns ja dann nichts hindern könnte auch diese Thatsache für einen blossen Schein zu erklären, was jedoch unmöglich ist. Und doch müssten wir dies Letztere thun, wenn es uns nicht auf irgend eine Weise gelingen würde, bei jener Erklärung einer Erfahrungsthatsache für ursprunglich ganz zu vermeiden die andere Thatsache damit für blossen Schein zu erklären. Ich muss offenbar diesen Thatsachenkonflikt in jedem Falle so lösen können, dass dabei keine von beiden Thatsachen als solche, als Wahrnehmungsthatsache, für einen Schein erklärt werde. Und in der That habe ich bereits in der Erkenntnisslehre für die zwei ersten Fälle die Lösung des Konflikts in dieser Weise durchgeführt. Dort habe ich gezeigt, wie jener erste Thatsachenkonflikt

nur so gelöst werden kann, wenn wir die Meinung aufgeben, dass unser unmittelbares Bewusstsein mit der absoluten Realität selbst so zusammenfällt dass es ausserhalb desselben nichts reales mehr giebt, d. h. wenn wir eine ausserhalb unseres individuellen Bewusstseins bestehende Aussenwelt anerkennen. In diesem Falle wird die Thatsache der unabhängigen auf diejenige der abhängigen Veränderungen zurückgeführt, die unabhängigen Veränderungen werden als die von der Aussenwelt abhängigen Veränderungen erkannt und anerkannt, in diesem Falle wird also der betreffende Erfahrungsschein auf die Incongruenz eines wahrgenommenen Theilobjectes des Seins mit dem Gesammtsein zurückgeführt, das als solches als Theilobject in Congruenz mit dem letzteren steht, also keinen Schein darstellt, nur als Object eines Bewusstseins, insofern das Bewusstsein einen Theil des Gesammtseins darstellt, steht dasselbe in einer Incongruenz mit ihm (im Bewusstsein ist die entsprechende Veränderung unabhängig, in dem Gesammtsein abhängig). Ich werde nun in dem folgenden Werk noch besonders zeigen, dass der zweite Thatsachenkonflikt in unserem Bewusstsein verschwindet, wenn das Gesammtsein als seinem Inhalte nach grösser denn unser Bewustsein erkannt wird, so dass auch in diesem Falle der Schein nur auf der Incongruenz eines bewussten Theilobjectes des Seins mit dem Gesammtsein beruht.

Nur der dritte Fall erlaubt keine Correctur in dieser Weise, man muss vielmehr, wenn man die betreffenden Thatsachen näher betrachtet, anerkennen, dass in diesem Falle ein im Bewusstsein selbst begründeter Konflikt liegt, und dass die eine von beiden als solche wirklich einen Schein in sich enthält. Eine nähere Betrachtung zeigt aber auch zugleich, dass dieser innere immanente Erfahrungsschein nicht so weit geht, die betreffende Wahrnehmungsthatsache zu dem geraden Gegentheil dessen zu machen was sie an sich ist. Wie wir nämlich an der betreffenden Stelle sehen werden, kann die Thatsache des einfachen Zeit- resp. Gegenwartspunktes nur als einfache Erfahrungsthatsache anerkannt werden, so dass die Thatsache des lückenlosen Raumes offenbar einen immanenten Schein enthalten muss, nur geht dieser immanente Schein nicht so weit, dass wir etwa diesen lickenlosen Raum als ein Continuum wahrnähmen — in welchem Falle wir unendlich kleine Theile desselben wahrnehmen müssten, was wir jedoch offenbar nicht thun — während er als solcher an sich d. h. in seinen letzten Theilen ein Discretum wäre (et vice versa). Dass der immanente Schein einer Wahrnehmungsthatsache nicht so weit gehen kann, dass sie uns

das gerade Gegentheil dessen verspiegelt, was sie an sich ist, folgt offenbar aus jener grundlegenden Thatsache der Erfahrung, wonach Sein und Nichtsein als absolute Gegensätze nicht miteinander zusammenfallen, denn der Satz des Widerspruchs, von dem unser obige allgemeine Satz nur eine Anwendung ist, ist nur ein anderer Ausdruck dieser grundlegenden Thatsache selbst. Demnach kann der immanente Schein einer Erfahrungsthatsache nur so weit gehen, dass sie eine Unbestimmtheit in Bezug auf gewisse Bestandtheile derselben enthält, welche Unbestimmtheit wiederum näher besehen nichts anders bedeutet, als dass eine solche Thatsache logisch zusammengesetzt ist, denn eine logisch einfache Thatsache ist als solche in eindeutiger Weise bestimmt, während eine zusammengesetzte offenbar in mehrdeutiger Weise bestimmt also unbestimmt ist. Daraus folgt aber nicht umgekehrt, dass nur die einen immanenten Schein in sich enthaltenden Thatsachen logisch zusammengesetzt sind, da ja auch die beiden oben angeführten Thatsachen, die einen in äusseren ausserhalb des Bewusstseins liegenden Umständen begründeten Schein enthalten, offenbar logisch zusammengesetzt sind.

Erst nachdem wir nun so Thatsachen in unserer Erfahrung kennen gelernt haben, die einen immanenten oder transcendenten Schein in sich enthalten, sind wir im Stande, das endgültige Kriterium zur Bestimmung der logischen Einfachheit einer Erfahrungsthatsache aufzustellen. Eine logisch einfache Thatsache darf nach dem Ausgeführten offenbar zunächst keinen immanenten Schein in sich enthalten. Wir haben nun nach dem über den Umfang des immanenten Erfahrungsscheins Ausgeführten unzweifelhaft ein sicheres Kriterium zur Entscheidung, ob eine Thatsache diesen Schein in sich enthält oder nicht [illegible] *Erfahrungsthatsache* [illegible] dass *sie* [illegible] *Gegentheil* [illegible] *Wahrnehmungs-* [illegible] *Schein* [illegible] *sich nicht* [illegible]. So kann z. B. die Thatsache des einfachen absolut untheilbaren Gegenwartsaugenblickes keinen immanenten Schein enthalten, denn ich kann nach diesem Kriterium nicht voraussetzen, dass dasjenige was ich unmittelbar als einfach wahrnehme an sich zusammengesetzt sei; so kann die Thatsache der Veränderung, für die in unmittelbarer Weise dass sie von mir hervorgebracht ist, nach demselben Kriterium nicht einen immanenten Schein in sich enthalten; und dasselbe gilt für die Thatsache der von mir abhängigen Veränderungen, dasselbe für die Thatsache des veränderlichen und des beständigen Seins u. s. w. Da nun aber von diesen einander di-

rekt-entgegengesetzten widerstreitenden Thatsachen nur die eine in logischem Sinne einfach sein könne, so müssen wir nunmehr offenbar ein besonderes Kriterium zur Entscheidung, welche von ihnen einfach und welche zusammengesetzt ist, suchen. Denn indem wir von ihnen den immanenten Schein ausgeschlossen haben, haben wir damit denselben rein als solchen d. h. als Wahrnehmungsthatsachen den Schein abgesprochen, in jedem dieser Thatsachenpaare aber muss die eine der beiden Thatsachen einen transcendenten Schein enthalten, denn sonst enthielte die grundlegende Erfahrungsthatsache als solche, also die Erfahrung als Ganzes, einen immanenten Schein in sich. Welche von den beiden Thatsachen in jedem solchen Paare stellt nun einen solchen transcendenten Schein dar? Offenbar, wenn die Erfahrung als Ganzes keinen immanenten Schein darstellen soll, *so muss es diejenige von diesen beiden Thatsachen sein die, wenn sie als den transcendenten Schein enthaltend erklärt wird, zugleich den vollkommenen immanenten Schein enthalten müsste.* Von zwei einander widerstreitenden Thatsachen kann nach dem Obigen keine als solche als Wahrnehmungsthatsache einen vollkommenen immanenten Schein enthalten, da beide nun nicht in gleicher Weise in absolutem Sinne reell sein können d. h. in dem Sinne dass sie in dem Bewusstsein als solchem, wenn dieses nämlich als Gesammtrealität betrachtet wird, bestehen, so muss die eine von beiden den transcendenten Schein in sich enthalten. Die eine von beiden muss offenbar so beschaffen sein dass auch im Falle, dass das Bewusstsein in absolutem Sinne (d. h. nicht nur seinem Inhalte sondern auch seinem Umfange nach) die Realität darstellt, dieselbe real bleibt und keinen immanenten Schein in sich enthält, während die andere eben in diesem Falle für blossen Schein erklärt werden muss. Und unser obiges Kriterium sagt gerade dies und nichts anderes: diejenige Thatsache ist ursprünglich die auch wenn das Bewusstsein für die alleinige Realität betrachtet wird reell bleibt, d. h. als Erfahrungsthatsache keinen Schein enthält, und die demnach diese ihre ursprüngliche Natur gerade darin dokumentiert, dass sie, wenn man sie für den transcendenten Schein enthaltend zu erklären versucht, dann als solche den vollkommenen immanenten Schein in sich enthält.

Dass dem wirklich so ist, lässt sich am besten aus den schon bekannten Beispielen ersehen. So kann z. B. von den beiden Thatsachen der abhängigen und der unabhängigen Veränderungen nur die der unabhängigen für die zusammengesetzte d. h. für die den transcendenten Schein enthaltende erklärt werden, denn würden wir dies mit der Thatsache der abhängigen Veränderungen thun, dann

müsste dieselbe als Wahrnehmungsthatsache einen vollkommenen immanenten Schein enthalten, da ja in dem Falle an sich nur die unabhängigen Veränderungen gegeben wären und demnach „an sich“ auch im Bewusstsein nur solche auftreten könnten; mit der Thatsache der unabhängigen Veränderungen ist dies dagegen nicht der Fall wenn wir sie auf diejenige der abhängigen zurückführen, da in diesem Falle die Thatsache derselben im Bewusstsein ganz möglich ist (die entsprechenden Veränderungen sind wohl an sich abhängig, aber nicht von meinem Bewusstsein) dieselbe also als Wahrnehmungsthatsache gar keinen Schein darstellt. Im ersten Falle würden die von mir abhängigen Veränderungen auch für und in meinem Bewusstsein von mir unabhängig sein, sie würden also als solche im Bewusstsein einen vollkommenen Schein enthalten; im zweiten Falle sind die von mir unabhängigen Veränderungen sowohl für mein Bewusstsein wie an sich, d. h. vom Standpunkte der Gesammtwirklichkeit aus von *mir* unabhängig, und man darf sich in diesem Falle durch den Doppelsinn des Wortes „an sich“ nicht täuschen lassen, denn dieses Wort bezeichnet bald nur die äussere Wirklichkeit als solche im Gegensatz zu der inneren bald die Gesammtwirklichkeit. Da nun bei uns weder die innere Wirklichkeit für sich noch die äussere für sich einen Schein enthalten kann (vgl. Kap. I, wo die Frage der Scheinbarkeit der unmittelbaren Erfahrung von der principiellen Seite aus betrachtet wird) so kann das „An sich“ nur im Sinne der Gesammtwirklichkeit genommen worden, und dann sind die von uns unabhängigen Veränderungen an sich wohl von der Aussenwelt abhängig aber von uns unabhängig, so dass dann die Thatsache derselben als Wahrnehmungsthatsache gar keinen Schein enthält. Und ähnlich verhält es sich in allen anderen Fällen: die eine Thatsache stellt, wenn sie einen transcendenten Schein enthält, keinen immanenten Schein dar die andere stellt einen solchen, so dass die letztere dabei logisch einfach die erstere logisch zusammengesetzt ist. Es ist nun nur noch zu bemerken, dass von zwei solchen einander direkt entgegengesetzten Thatsachen (sie stehen als solche im negativ-contradictorischen Gegensatzverhältniss) die logisch einfache zugleich numerisch einfach ist, da ja die logisch zusammengesetzte zugleich numerisch zusammengesetzt ist. Das obige Criterium bestimmt also wirklich die numerisch d. h. absolut einfachen Erfahrungsthatsachen, und damit ist die von uns aufgestellte Aufgabe der Auffindung der Criterien zur Bestimmung einer solche Thatsache gelöst.

Erst nachdem wir ein solches Kriterium besitzen sind wir im Stande, auf Grund der unmittelbaren Erfahrung wirklich zur absolut gewissen Erkenntniss zu gelangen. Dann sind wir nicht wie die Rationalisten genöthigt, ein reines abstraktes von der Erfahrung völlig unabhängiges Vernunftvermögen zu erdichten, um zu einer solchen Erkenntniss zu gelangen, wie wir andererseits nicht wie die Empiriker genöthigt sind auf eine solche Erkenntniss auf Grund der Erfahrung ein für allemal zu verzichten. Beide, sowohl die Rationalisten wie die Empiristen, gehen von einem ungenauen und unkritischen Begriffe der Erfahrung aus, beide gehen in der Hauptsache von der groben sinnlichen Erfahrung aus, und dann ist es kein Wunder, dass beide in derselben nur logisch zusammengesetzte Thatsachen finden und der Rationalist genöthigt ist, eine andere Quelle der unbedingten Erkenntniss zu suchen, die dann der Empiriker mit Recht bestreitet. Indem wir den Begriff der Erfahrung genau bestimmt haben werden wir im Stande sein, besonders drei Wissenschaften, die von grundlegender Bedeutung in unserem Erkenntnisssystem sind, von den in ihnen harrschenden Irrthümmern zu befreien. In erster Reihe ist dies die Mathematik, in der einerseits das Specifisch-Rationale der Erkenntniss seinen schärfsten Ausdruck findet, und die doch andererseits durchaus auf den Thatsachen der groben sinnlichen Erfahrung beruht und kritiklos dieselben akceptiert. Indem wir die mathematische Erkenntniss auf die grundlegenden Erfahrungsthatsachen zurückführen, retten wir das Specifisch-Rationale in derselben; und indem wir die Thatsachen der groben sinnlichen Erfahrung für zusammengesetzt erklären, entwenden wir damit dem Empirismus die gefährliche Waffe, die Rationalität dar Mathematik auf Grund der Erfahrung zu bestreiten. Dasselbe geschieht mit der Metaphysik: sie wird auf unserem Standpunkte einerseits eine rein rationale andererseits eine streng auf Erfahrung fussende Wissenschaft. Und dasselbe gilt schliesslich für die Psychologie: sie hört auf ein Gemisch von metaphysischen Hypothesen und vielen angeblich exakten naturwissenschaftlichen Erklärungen zu sein, und wird in wahrem Sinne dieses Wortes eine empirische Wissenschaft, deren Wahrheiten zugleich unbedingt gewiss sind

Den dargelegten erkenntnisstheoretischen Grundsätzen gemäss werden wir in dem vorliegenden Werke die Metaphysik sammt der Psychologie und theilweise auch die Mathematik auf Grund der unmittelbaren Erfahrung aufbauen.

Der Unterschied zwischen unserer und der üblichen Untersuchungsmethode der Metaphysik lässt sich nach den obigen Ausführungen leicht

einsehen. Die speculativen Metaphysiker haben unbewusst aus derjenigen Quelle ihre Schätze geschöpft, aus der sie einzig und allein geschöpft werden können, aus den verborgenen Tiefen der unmittelbaren Erfahrung, und die rein logische Methode, der sie sich bedienen, ist ja nichts anderes als ein Ausdruck der letzten Erfahrungsthatsachen. Diese Methode konnte und kann aber für sich keine untrüglichen Resultate ergeben, weil sie als solche nur der Ausdruck einiger höchst allgemeiner Erfahrungsthatsachen ist, andere und gerade die Erfahrungsthatsachen, die das eiserne Netz der konkreten Wirklichkeit bilden, bleiben auch unbewusst von ihr ausgeschlossen, und wenn man sich nun nur auf Grund dieser rein logischen Methode dahin begiebt, diese Principien der Wirklichkeit zu bestimmen, dann ist es kein Wunder, dass man nur im Dunklen tappen wird und zu keinen endgültigen Resultaten gelangen kann. Trotzalledem ist aber diese logische Methode nicht falsch, da sie ja der unbewusste Ausdruck der allerallgemeinsten Erfahrungsthatsachen selbst ist, nur ist sie höchst einseitig und für sich genommen unfruchtbar. Man muss vielmehr bei der metaphysischen Untersuchung auf die unmittelbare Erfahrung selbst zurückgehen, und jedes abstrakte Princip dahin untersuchen, ob dasselbe von der unmittelbaren Erfahrung als dessen letzte einfache Thatsache sanktioniert wird oder nicht. In dieser Hinsicht könnte man nun entweder so radikal verfahren, dass jeder einzelne Schritt in der metaphysischen Untersuchung stets auf Grund der unmittelbaren Erfahrung vorgenommen werde, dass man klar und deutlich die Thatsachen der unmittelbaren Erfahrung darlegt, die einen solchen Schritt ermöglichen und rechtfertigen. Man kann aber auch weniger radical verfahren, man kann die obige logische Methode mit dieser empirischen Methode im engeren Sinne combinieren, da ja jene logische Methode selbst nur ein Ausdruck gewisser allgemeiner Erfahrungsthatsachen ist, man also indem man die beiden Methoden combiniert das Feld der Erfahrung damit gar nicht verlässt, nur die abstrakte logische Methode durch den Rückgang auf die Erfahrung (d. h. die specielleren Erfahrungsthatsachen) befruchtet, indem man sie davor bewahrt in leeren Formalismus auszuarten. Befolgte man nun den ersten Weg, d. h. würde man die empirische Methode allein befolgen, dann hätte man neben der Metaphysik zugleich eine ausführliche Psychologie der metaphysischen Erkenntniss resp. die Erkenntnisstheorie der metaphysischen Erkenntniss vor sich, etwas was wohl an sich recht interessant wäre, was aber doch den Hauptzweck, die Gewinnung der metaphysischen Erkenntniss, nur allzu umständlich machen würde. Ich habe deshalb

den zweiten Weg gewählt, indem ich bei jedem wichtigeren Schritt auf die unmittelbare Erfahrung zurückging, und in jeder Frage, in der die rein logische Methode zu ganz entgegengesetzten Resultaten zu führen scheint, die unmittelbare Erfahrung zu Rathe zog. Ich weiss recht gut, dass mein Werk deshalb von vielen Seiten dem Vorwurfe ausgesetzt werden wird, es sei dasselbe nur den Worten nach auf Erfahrung gegründet, dafür kann ich aber nichts thun, ich kann nur hoffen, dass die tiefer Blickenden erkennen werden, wie auch da wo ich ganz und gar nur rein dialektisch zu verfahren scheine die unmittelbare Erfahrung mir dabei der Leitstern gewesen und geblieben ist.

Nachdem ich so die Methode, die ich im Folgenden benutzen werde, gerechtfertigt und begründet habe, gehe ich nunmehr zur näheren Bestimmung der Aufgabe der Metaphysik und des Planes dieses Werkes über. Man hat die Metaphysik seit jeher in die drei Hauptheile der Ontologie, der Kosmologie und der Psychologie eingetheilt, indem man der Ontologie die Untersuchung der letzten Principien des Seins, der Kosmologie die Erklärung derjenigen Hälfte der Erscheinungswelt aus diesen Principien zuweist, die die äussere Wirklichkeit im Gegensatz zu der inneren Wirklichkeit des Bewusstseins darstellt, die sogenannte unbewusste Natur, und der Psychologie die Erklärung der inneren Wirklichkeit, des Geistes, aus den nämlichen ontologischen Principien. Dieser Eintheilung habe ich nichts wesentlich neues hinzuzufügen, ich möchte nur die Kosmologie und die Psychologie, da sie die Anwendung der Ontologie auf die Erscheinungswelt darstellen, als angewandte Ontologie der Ontologie als der reinen entgegenstellen. Dies ist insofern zweckmässig als uns damit eine sachgemässe Eintheilung der reinen Ontologie selbst sehr erleichtert wird, worauf ich bald kommen werde. Ich will nur noch bemerken, dass mir die Aufgabe der Kosmologie in der obigen Fassung zu eng erscheint. Die äussere Wirklichkeit, wenn man in dieselbe wirklich alles das hineinlegen will, was in die innere nicht hineingehört, umfasst mehr als die blosse unbewusste Natur. Streng genommen umfasst die unbewusste Natur nur die unorganische und von der organischen die Pflanzenwelt, die Thierwelt zusammen mit dem Menschen gehört gerade durch das Zukommen des Bewusstseins nicht mehr ganz in diese unbewusste Natur hinein, sie enthält Faktoren, die der inneren Wirklichkeit angehören die innere Wirklichkeit greift hier in die äussere hinein, sie steht in Wechselwirkung mit ihr. Die Kosmologie muss infolgedessen ausser der Naturphilosophie im engeren Sinne

noch das Phänomen des Lebens von seiner inneren Seite aus betrachten, und in diesem Sinne wird sie dann ausser der allgemeinen Lehre von dem Zweck und Werth des organischen Lebens in seinem bewussten Theile noch diejenigen Formen dieses Lebens betrachten müssen, in denen sich eine Einwirkung des Bewusstseins offenbart, im besonderen die wichtigste dieser Formen, die menschliche Gesellschaft. So also wird die Kosmologie ausser der Naturphilosophie im engeren Sinne noch die Lehre von dem Zweck und Werth des Lebens und die Socialphilosophie umfassen. Haben wir nun damit den Umfang der Kosmologie erweitert so werden wir dagegen den Umfang der Psychologie verengen. Da wir zur Gewinnung der metaphysischen Erkenntniss in letzter Instanz nur die unmittelbare Erfahrung zu Rathe ziehen, so muss es eine Wissenschaft geben, die sich mit dieser unmittelbaren Erfahrung als solchen d. h. mit den in ihr gegebenen Thatsachen eigens beschäftigt, und dies ist die Psychologie. Die Aufgabe der Psychologie besteht also im Wesentlichen darin, die unmittelbare Erfahrung so zu beschreiben wie sie ist, um dann dieselbe nach den in ihr liegenden Thatsachen zu erklären. Damit ist nicht ausgeschlossen, dass man auch die Thatsachen der Aussenwelt zur Erklärung der inneren psychologischen Erfahrungsthatsachen heranzieht, sind es ja doch gerade diese inneren Thatsachen selbst, die die Voraussetzung jener äusseren Thatsachen fordern; damit ist aber wohl ausgeschlossen, die Erklärung der psychologischen Thatsachen nach den als „feststehend" betrachteten Thatsachen der Ausenwelt zu *richten*, letzte Instanz zur Erklärung der inneren Erfahrungsthatsachen sind ja schliesslich nur diese Thatsachen selbst, und wenn sie mit den als feststehend betrachteten Thatsachen der Aussenwelt in Konflikt gerathen, dann sind nicht sie sondern diese letzteren angeblich unzweifelhaften Thatsachen in Zweifel zu ziehen. In der Psychologie wird also unsere Aufgabe zunächst darin bestehen, die Thatsachen der unmittelbaren Erfahrung rein der Selbstbeobachtung resp. dem Princip der absoluten Realität der unmittelbaren Erfahrung folgend festzustellen: ihre Erklärung wird dann theils von den metaphysischen Grundvoraussetzungen theils von den in der Naturphilosophie kritisch festgestellten Thatsachen der Aussenwelt aus erfolgen, in der grossen Mehrzahl der Fällen aber werden die einen Erfahrungsthatsachen direkt aus den andern erklärt werden. Kurz gesagt, unsere Psychologie wird sowohl ihren Grundlagen als ihren Resultaten nach empirisch, und zwar empirisch in wahrem Sinne dieses Wortes sein.

Wie ich näher die Aufgabe dieser drei Theile der Metaphysik

fasse, wird bei jeder einzelnen von ihnen zur Sprache gebracht werden. Hier will ich nur die Aufgabe des ersten Theils der Metaphysik, der zunächst im Folgenden zur Darstellung gelangt, näher bestimmen. Das Seinsproblem oder das ontologische Problem lässt sich der Natur der Sache nach in drei Einzelprobleme zergliedern. Das erste von ihnen ist das allgemein-ontologische Problem, welches darin besteht, die letzte innere Struktur des Seienden zu bestimmen, seine allgemeine Existenzform festzustellen. Ist das Seiende, also alles was existiert, als absolute ansichseiende Wirklichkeit zu fassen, oder giebt es Seinsbestandtheile die nicht in absolutem Sinne real sind? Stellt das Seiende eine Vielheit von ursprünglich ganz unverbundenen in keinen Beziehungen zueinander stehenden Seinselemente dar, oder sind diese Seinselemente ursprünglich in Beziehungen verflochten, die sie zu den blossen Theilen des einen Seins als Ganzen herabsetzen? Stellt das Seiende seiner inhaltlichen Existenzform nach das beharrende Sein oder das ruhelose Werden? Diese drei Fragen erschöpfen im Wesentlichen das allgemein-ontologische Problem, denn die erste Frage bestimmt das *Dass*, die letzten zwei das *Was* des Seienden, indem die erste von diesen die mehr formale und die zweite die mehr reale Seite dieses Was bestimmen.

Das zweite und das dritte Grundproblem der Ontologie beziehen sich auf die Struktur des Seienden in seinen speciellen wesentlichen Existenzformen. Diese wesentlichen Existenzformen des Seienden tragen seit jeher den Namen der Kategorien, und da die Kategorien, wie wir es weiter unten sehen werden, in formale und reale zerfallen, so zerfällt auch das Problem der speciellen Ontologie in die zwei Probleme, von denen das eine sich auf die Bestimmung der formalen und das andere auf diejenige der realen Kategorien bezieht. Da die Hauptkategorie in der ersten Gruppe die Quantität und diejenige in der zweiten die Qualität ist, so ist das erste Problem als das *quantitative* und das zweite als das *qualitative* zu bezeichnen. Das quantitative Weltproblem bezieht sich unmittelbar auf die quantitative Struktur des Raumes und der Zeit als der allgemeinen Ordnungsformen des Seins. Das qualitative Weltproblem bezieht sich auf die qualitative Struktur des Seinsinhalts, welcher in diesen Formen des Raumes und der Zeit erscheint. Eine nähere Untersuchung würde nun zeigen, dass die qualitative Struktur des Seinsinhalts von der quantitativen Struktur desselben resp. seiner Formen des Raumes und der Zeit abhängt, so dass infolgedessen das quantitative Weltproblem vor dem qualitativen behandelt werden muss. Dies folgt auch daraus, dass die

formalen Kategorien als die inhaltsleereren allgemeiner sind und demnach mit jenen allgemeinsten Existenzformen des Seins, mit denen sich das allgemein-ontologische Problem beschäftigt, in näherer Beziehung stehen als die realen Kategorien. Deshalb behandeln wir gleich nach dem allgemein-ontologischen das quantitative und dann zuletzt das qualitative Weltproblem.

So notwendig nun diese Scheidung der drei Probleme voneinender auch ist, so stehen sie doch in so einer engen Beziehung zueinander, dass eine einheitliche Zusammenfassung aller drei durchaus notwendig ist, wenn die Ontologie ihre Aufgabe wirklich für gelöst betrachten will. Ich habe deshalb dem ersten und dem zweiten Abschnitte, in denen ich die drei Probleme behandelt habe, einen dritten folgen lassen, in dem ich das ontologische Problem noch einmal in seinem Gesammtgehalt behandelt habe. Diese Behandlung verfolgt aber dabei nicht nur eine zusammenfassende Darstellung der drei Probleme sondern, was viel wichtiger ist, sie will dabei das ontologische Problem so vertiefen, dass kein ungelöstes Problem mehr darin zurückbleibt. Dieser dritte Abschnitt enthält Untersuchungen von Sachen, die bisher in der Metaphysik sehr selten berührt worden sind, ich habe in demselben einen Standpunkt eingenommen, der gleichsam vor und über der Welt steht, ich habe da den Versuch gemacht zu zeigen, wie das Sein gleichsam gemacht wird, wie dasselbe aus Seinen *allerletzten* Gründen folgt und ist. Eine solche Betrachtung unterscheidet sich von der gewöhnlichen metaphysischen Betrachtung der Dinge, auch wenn diese noch so sehr in das Abstrakte reicht, so sehr, dass ich sie im Gegensatz zu dieser als „hypermetaphysisch" bezeichnen möchte. Und wo ich im Texte auf diesen dritten Abschnitt hinweise, thue ich es nicht etwa deshalb weil ich damit eine Sache, deren Erklärung mir bis dahin noch nicht gelungen ist, auf eine spätere Stelle verschiebe in der Hoffnung dass diese mir dort gelingen werde, sondern ich thue es nur deshalb, weil sie mir allerdings noch weiterer Erklärungen bedürftig erscheint. Derjenige dem diese letzten Höhen der Metaphysik ganz schwindelig erscheinen, möge sich dann mit dem begnügen was ich an den betreffenden Stellen als Erklärung gegeben habe, denn diese letzteren Erklärungen, wenn sie das Maass des von der Metaphysik gewöhnlich Gebotenen nicht überschreiten, stehen jedenfalls nirgends hinter ihnen zurück.*

* Das ganze Werk werde ich äusserlich in zwei Bände und jeden Band in zwei Abtheilungen theilen. Der erste Band wird die reine, der zweite die angewandte Ontologie umfassen; die erste Abtheilung des ersten Bandes umfasst die allgemeine

Und zuletzt noch eine Bemerkung. In der folgenden Darstellung habe ich überall die methodischen Grundsätze, die hier in dieser Einleitung auseinandergesetzt worden sind, wiederholt, um sie so stets in Erinnerung zu halten und in jedem einzelnen Falle zu zeigen, wie sie anzuwenden sind. Dabei habe ich nun zugleich einige Unterscheidungen, die oben vorgenommen worden sind, ausgelassen um die Sache nicht zu sehr zu complicieren, und glaube, dass man wohl in jedem einzelnen Falle wird errathen können, welche von diesen Unterscheidungen ausgelassen worden sind. Ebenso habe ich in Mehrzahl der Fällen am Ende jedes Kapitels und Abschnitts die Aufgabe des nächsten kurz charakterisiert, indem ich dabei auch die hier charakterisierten Aufgaben noch näher determiniert habe.

Ontologie und die formalen Kategorien (resp. das allgemein-ontologische und das quantitative Problem); die zweite die realen Kategorien und die allerletzten Principien (resp. das qualitative und die hypermetaphysischen Probleme). Die erste Abtheilung des zweiten Bandes wird die Kosmologie (resp. Naturphilosophie, Axiologie und Gesellschaftsphilosophie) umfassen und die zweite die Psychologie. Jede einzelne Abtheilung bildet ein relatives Ganzes für sich, so dass jede derselbe als selbständiges Werk betrachtet werden kann, was besonders von der ersten und der letzten gilt.



Erster Abschnitt.

Allgemeine Eigenschaften des Seienden und die Aufstellung des Negationsprincips.

Erstes Kapitel.

Sein und Schein.

Die erste Frage, die sich der Philosoph im Anfang seiner grossen und ausserordentlichen Untersuchungen zu stellen hat, lautet: existiert wirklich etwas? Der Philosoph will die Struktur der Realität erforschen, die Struktur dieser so zweifel- und rätselhaften Realität, und dabei muss er sicherlich zunächst dessen sicher sein, ob das Object seiner Untersuchungen wirklich besteht oder nicht? Der ächte Denker darf keine Frage umgehen, so schwierig sie ihm und so nichtssagend sie dem gemeinen Menschenverstande auch erscheinen mag: er soll ja der lebendige helle Spiegel des gesammten Daseins sein und so muss er mit seinem Verstande das Dasein bis in seine letzten Tiefen durchdringen, in demselben alles beleuchten, damit keine Spur von Dunkelheit und Unklarheit mehr darin zurückbleibt Und welche Frage kann dem wahren Weltforscher tiefer, näher und grundlegender erscheinen, als diese Frage nach der realen Existenz des Daseins selbst.

Die Frage nach der realen Existenz der Realität könnte man nun nicht erheben, wenn man nicht Zweifel an ihrer wahren Realität hegte, wenn man nicht dächte, sie könnte doch wohl bloss scheinbar sein! Es fragt sich also, ob die uns gegebene Welt die Realität an sich, die absolute wahre Realität darstellt, oder ob sie als solche bloss scheinbar sei, in welchem Falle dann weiter die Frage erhoben werden muss, ob dieser uns gegebenen scheinbaren Realität nicht

eine andere absolute ansichseiende zu Grunde liege, oder ob die scheinbare Realität der Welt das einzig Existierende sei, also die ganze Realität überhaupt einen blossen an sich nichtigen Schein darstellt?

Cartesius war der erste Denker, der diese grundlegende Frage mit genügender Klarheit stellte, und dadurch ist er nicht nur Begründer der neueren, sondern Begründer der exacten Philosophie überhaupt geworden. Die reale Existenz der gegebenen Welt zieht Cartesius in Zweifel und fragt sich, ob es irgend etwas im Gebiete derselben giebt, dessen reale Existenz nicht mehr in Zweifel gezogen werden kann, dessen absolute Realität unbedingt anerkannt werden muss. Und diesen festen Punkt, diese absolut unbezweifelbare Realität findet Cartesius in dem eigenen Ich. Aber leider geht Cartesius zu weit in seiner Skepsis in Bezug auf das was in dem Ich als absolute Realität zu betrachten ist: dass die Realität ursprünglich nur als Bewusstseinsinhalt des bewussten Ich gegeben ist, daran zweifelt Cartesius nicht, das ist für ihn mit Recht ein selbstverständlicher Satz. Der skeptische Cartesius findet aber seine Skepsis nicht dadurch befriedigt, dass damit die Existenz der Aussenwelt ganz zweifelhaft geworden ist, er geht viel weiter und zieht die reale Existenz der Bewusstseinsinhalte selbst in Zweifel, nur das reine, sich ganz und ungetheilt in jedem der vielen Bewusstseinsinhalte fühlende Ich, die rein formale Einheit des Bewusstseins wird für die absolut unzweifelhafte Realität erklärt, das Cogito in dem Satze *cogito ergo sum* bezieht sich auf das reine denkende, d. h seiner Bewusstseinsinhalte bewusste Ich, nicht auch auf diese

Ich setze nun als bekannt voraus, wie Cartesius weiter aus seinem ersten Satze cogito ergo sum, allerdings auf einem durchaus unempirischen Wege, zur Realitätsrettung all' jener im Anfang in Zweifel gesetzen Realitäten gelangt, und will mich nur auf diesem seinen ersten Grundsatze selbst aufhalten und zeigen, wie derselbe nicht das in seiner Realität unbedingt Gesicherte in seinem vollen Umpfange zum Ausdruck bringt.* Cartesius hat nämlich durch diesen seinen ersten Satz die erste und allerursprünglichste Erfahrungsthatsache nicht richtig analysiert, er hat das grundlegende Urver-

* In meinen „Principien der Erkenntnisslehre“ habe ich in dem zweiten Kapitel den cartesianischen Grundsatz vom erkenntnisstheoretischen Standpunkte aus bereits analysiert und die vorliegende Analyse bringt eine Ergänzung dazu vom metaphysischen Standpunkte aus, wodurch erst mein eigener Standpunckt in dieser grundlegenden Frage vollständig begründet erscheint.

hältniss von Subject und Object, von Bewusstseinsform und Bewusstseinsinhalt nicht richtig angegeben, und zwar indem er die Realität des Subjects für primärer und ursprünglicher ansieht als diejenige des Objects. Es ist nun unzweifelhaft richtig, dass wir der Existenz des Bewusstseinsinhalts nur vermittelst der Bewusstseinsform innewerden können, aber daraus folgt nicht dass die Bewusstseinsform zu ihrem Bewusstwerden nicht des Bewusstseinsinhalts ebensosehr bedarf, wie das Umgekehrte unzweifelhaft der Fall ist Nur dann wäre dies der Fall, wenn *Fichte* mit seiner Postulierung des reinen Selbstbewusstseins Recht hätte wenn die Bewusstseinsform sich selbst zum ursprünglichen Inhalte hätte, und der Bewusstseinsinhalt gleichsam nur ein Apendix, obgleich ein von ihr selbst producierter Apendix wäre. Dem ist aber nicht so: nach dem Zeugniss unserer unmittelbarem Erfahrung besteht jenes reine Selbstbewusstsein nicht so sehr wir uns unseres einheitlichen Ich auch bewusst sind, so sehr wissen wir doch ebenso, dass dieses Ich nicht als eine reale unmittelbar wahrgenommene Wesenheit gegeben ist, sondern nur als die rein formale Einheit unseres von ihr wahrgenommenen Bewusstseinsinhalts. Und wenn wir uns nun in die Natur dieser reinen Bewusstseinsform und in ihr Verhältniss zu den Bewusstseinsinhalten vertiefen, so finden wir, dass das Wesen der Bewusstseinsform in dem reinen Constatieren, in dem reinen Wahrnehmen der Bewusstseinsinhalte besteht, dass sie selbst als solche völlig leer und absolut inhaltslos ist und von dem Dasein des Bewusstseinsinhalts erfüllt ist. Ist dem nun so, dann kann offenbar von der alleinigen Ursprünglichkeit der Bewusstseinsform nicht mehr die Rede sein Es ist wahr, dass, obgleich die Bewusstseinsform ursprünglich leer und inhaltslos ist, trotzdem der Bewusstseinsinhalt nur vermittelst derselben als solcher, d. h. als bewusster Inhalt existiert und dabei die Bewusstseinsform zugleich sowohl des Inhalts als ihrer selbst bewusst ist, woraus ohne weiters folgt, dass beide absolut *coordinierte Facta* sind. In demselben Acte in dem ich der Existenz meines Ich d. h. meiner Bewusstseinsform innewerde, in demselben Acte werde ich auch der Existenz meines Bewusstseinsinhalts inne, d. h. ich werde dessen inne, dass die Bewusstseinsform ohne den Bewusstseinsinhalt leer bliebe, also nicht bestünde, und dass ohne die Bewusstseinsform der Bewusstseinsinhalt unbewusst bliebe, ob er aber auch zu sein aufhörte, das wissen wir zunächst nicht ja es scheint auf den ersten Blick ganz möglich, die Existenz des Bewusstseinsinhalts sich auch unabhängig von der Existenz der Bewustseinsform zu denken, wie ja auch thatsächlich

der naive Mensch — allerdings nur für gewisse Bewusstseinsinhalte — dies als möglich zulässt. Dies zeigt, dass in dem ersten und allerursprünglichsten Intuitionsacte unserer Erkenntnis die Unentbehrlichkeit der Bewusstseinsform zur Existenz des Bewusstseinsinhalts nicht so sehr als notwendig erscheint, wie die Unentbehrlichkeit des Bewusstseinsinhalts zur Existenz der Bewusstseinsform notwendig erscheint. Diese unmittellar und auf den ersten Blick einleuchtente Abhängigkeit der Bewusstseinsform von dem Bewusstseinsinhalte wiegt vollauf jene Ursprünglichkeit des bewussten Gegebenseins derselben im Verhältniss zu dem bewussten Inhalte auf, und dadurch ist die absolute Coordiniertheit beider in der ursprünglichen Erfarungsthatsache absolut unzweifelhaft.

Wenn nun in dem unmittelbaren Bewusstsein Form und Inhalt absolut untrennbare coordinierte Fakta sind, wenn der Inhalt *als bewusster* (denn nur so viel können wir im Anfang behaupten) nur in und durch die einheitliche Form existiern und wenn umgekehrt die Form als solche nur durch den Inhalt existieren kann, dann ist es unzweifelhaft, dass beide den gleichen Anspruch auf Realität erheben können, und dass, wenn die Realität der Bewusstseinsform nicht in Zweifel gezogen werden kann, ebenso die Realität des Inhalts nicht in Zweifel gezogen werden kann. Mag der Bewusstseinsinhalt meinetwegen — so wie es der naive Mensch meint — auch ausserhalb der Bewusstseinsform bestehen, *wenn* derselbe im Bewusstsein gegeben ist, dann ist seine Existenz ebenso absolut unbezweifelbar, wie die Existenz der Bewusstseinsform anerkanntermaassen absolut unzweifelhaft ist Denn dass die Bewusstseinsform als solche in keinem Falle als eine scheinbare Realität angesehen werden kann, ist leicht zu zeigen. Was bedeutet die scheinbare Realität, worin besteht der Schein? Vom Schein könnte man nicht reden, wenn man bei der Realität nicht zwei Momente unterschiede, die voneinander trennbar sein sollen, nämlich das Moment der Existenz, des Dass, des Gegebenseins, und das Moment der Essenz, des Was, des Gegebenen seinem realen Inhalte nach. Wir wollen hier zunächst nicht untersuchen mit welchem Rechte und ob überhaupt mit irgend einem Rechte die Trennung dieser beiden Momente geschieht. was wir feststellen wollen, ist nur die Unmöglichkeit der Anwendung des Scheinsbegriffs — welcher, wie wir gleich zeigen wollen, auf Grund der Trennbarkeit dieser beiden Momente aufgestellt wird — auf die Bewusstseinsform. Der Schein bedeutet eben eine solche Wirklichkeitsart bei der das Moment der Existenz real, dasjenige der Essenz aber irreal ist, d. h. ein Etwas das wohl

besteht, aber nicht in Wahrheit besteht, d h. etwas das seinem realen Inhalte nach völlig nichtig und realitätslos ist. Das Existenzmoment als solches kann bei dem Schein nicht auch als irreal gelten, denn dann wäre der Schein das Nichts selbst, während sich derselbe doch von dem reinen Nichts unterscheiden soll, und zwar dadurch, dass es das als Etwas scheinende Nichts ist, d. h. ein Nichts welches besteht, d. h. existiert, nur nicht in Wahrheit, an sich, d. h. seinem reaben Inhalt nach existiert. Nun das reine Ich kann, wie gesagt, in keinem Falle für blossen Schein gelten. Das reine Ich kann zweifach aufgefasst werden (vgl. darüber das Kap VI der „Principien der Erkentnisslehre"), entweder als reine formale Einheit der Bewusstseinsinhalte, wie sie ja unmittelbar in der Erfahrung gegeben ist, oder als reale Wesenheit, die sich nur in ihrer rein formalen Funktion der Wahrnehmbarkeit der Bewusstseinsinhalte in der unmittelbaren Erfahrung manifestiert. Im ersten Falle nun nicht weil sie dann als solche ohne jeden essentialen Inhalt wäre, und mit dem reinen Existenzmomente des Bewusstseinsinhalts selbst zusammenfiele, als reines Existenzmoment aber notwendigerweise real sein müsste. Im zweiten Falle aber ebenfalls nicht, obgleich die Sache hier nicht so umittelbar einleuchtend ist. Es kann offenbar von der Scheinbarkeit der Bewusstseinsform nur dann die Rede sein, wenn die Scheinbarkeit des Bewusstseinsinhalts schon feststeht, denn ein scheinbares Subject, welches eine reale Realität zu seinem bewusten Inhalte hat, ist ein Widerspruch in sich. Umgekehrt aber, wenn der Bewusstseinsinhalt scheinbar ist, muss das Bewusstseinssubject absolut real sein, denn wenn der Inhalt scheinbar ist, so ist die Voraussetzung des bewussten Subjectes dem derselbe in seinem Schein scheinen wird, absolut notwendig, denn in Wahrheit kann der Schein, da derselbe an und für sich ohne alle und jede Realität ist, nur einem bewussten Subjecte gegenüber real erscheinen, das bewuste Subject muss demnach real sein, ganz abgesehen davon, ob dasselbe die blosse formale Einleit des Bewusstseinsinhalts ist, oder eine Realität für sich darstellt. Schon aus diesen allgemeinen Gründen also ist die Scheinbarkeit der Bewusstseinsform, ganz abgesehen von der Scheinbarkeit resp. der Realität des Bewusstseinsinhalts, absolut ausgeschlossen.

Es fragt sich nun, ob der Bewusstseinsinhalt selbst für einen Schein gelten kann? Dass der Bewusstseinsinhalt seiner Existenz nach real sein muss, auch wenn er als Schein gilt, ist unzweifelhaft, da ja auch beim Schein das Existenzmoment nicht in Zweifel gezogen werden kann. Nun müssen wir fragen, wieso wir dazu

kommen, den Scheinsbegriff auf den uns unmittelbar gegebenen Bewusstseinsinhalt anzuwenden. Nun offenbar müssen wir dem Ursprung des Scheinbegriffs selbst auf den Grund gehen wir müssen fragen, wo der Ursprung dieses Begriffs liegt In der Erkenntnisslehre haben wir nun genügend ausgeführt dass der Ursprung aller unserer auch der abstraktesten Begriffe in der unmittelbaren Erfahrung liegt und diese nichts anderes ist als der Bewusstseinsinhalt selbst Es fragt sich also ob und mit welchem Rechte, wir den Bewusstseinsinhalt ursprünglich für scheinbar ansehen, und wenn nicht, wieso wir dazu kommen es doch zu thun Nun wird jeder, der sich bis zu der unzweifelhaften Erkenntniss aufgeschwungen hat, dass uns unmittelbar einzig und allein unser eigenes Bewusstsein gegeben ist — und in der Erkenntnisslehre ist gezeigt worden wie der naive Mensch selbst, nur unbewusst, auf diesem Standpunkte steht — anerkennen müssen dass sich uns dieser Inhalt unmittelbar und als solcher *vor aller und jeder Reflexion betrachtet* als eine ansichseiende Realität darstellt, wir haben, unmittelbar betrachtet absolut keinen Grund dafür, denselben für einen scheinbaren zu erklären. Der Schmerz den ich fühle stellt sich mir unmittelbar als eine absolute ansichseiende Realität dar; das Rote das ich sehe, der Ton, den ich höre etc stellen sich mir ebenso unmittelbar als absolute ansichseiende Realitäten dar: das Erinnerungsbild des Roten, oder irgend ein anderes Erinnerungs- (oder Phantasie-) bild stellt für sich betrachtet, ebenso eine ganz in sich abgeschlossene Realität dar, die als solche trotz jener Beziehung auf starke und ursprüngliche Bewusstseinsinhalte die ihr innewohnt, absolute und ansichseiende Realität hat Offenbar sind es Gründe besonderer Art, die die denkende Menschheit genöthigt haben, an dieser ansichseienden Realität, die den Bewusstseinsinhalten unzweifelhaft unmittelbar beizulegen ist, zu zweifeln, und den Scheinsbegriff auf diesselben anzuwenden Diese besonderen Gründe werden wir späterhin betrachten, jetzt wollen wir aber den Hauptgrund, oder, besser gesagt, den Hauptanlass der die Menschheit scheinbar berechtigte von jenen besonderen Gründen Gebrauch zu machen, darlegen, und dieser Hauptgrund liegt in dem letzten Ursprung des Scheinsbegrifts. Der Schein das haben wir schon ausgeführt, ist nur auf Grund der Trennung von Existenz — und Essenzmoment beim Seienden möglich und wir müssen demnach fragen ob uns die unmittelbare Erfahrung berechtigt, erstens, eine Unterscheidung dieser beiden Momente überhaupt vorzunehmen, und zweitens die so unterschiedenen Momente als trennbar voneinander zu denken, wie dies ja in dem Scheinsbegriff geschieht Wir würden

sicherlich zu weit gehen, wenn wir so gleich im Anfang nicht nur die Untrennbarkeit von Existenz- und Essenzmoment behaupteten, sondern wenn wir sogar die Zweiheit dieser Momente negierten, um nur so mit einemmale jeder Möglichkeit ihrer Trennbarkeit entledigt zu werden. Erst in einem späteren Kapitel (vgl. Kap. IV) werden wir im Stande sein, die Frage ihrer Zweiheit befriedigend aufzulösen, schon jetzt aber können wir mit Sicherheit ihre absolute Untrennbarkeit behaupten. Wir müssen nur noch gleich im Anfang hervorheben, dass wir jenes bekannte Princip *Hume's*, wonach alles Verschiedene trennbar ist, nicht anerkennen, da zwei verschiedene Bestimmtheiten unmittelbar so aneinander hängen können, dass die eine sich von der anderen absolut nicht trennen lässt, so dass, obgleich beide verschieden sind, doch beide nicht voneinander trennbar sind. Nun ist es für die Existenz und Essenz klar, dass sie absolut untrennbare Bestimmtheiten am Seienden sein müssen. Der erste Anlass zur Unterscheidung dieser beiden Momente am Seienden liegt in der Dualität der beiden Faktoren des unmittelbaren bewussten Constatierungsactes, indem wir dabei die reine Existenz auf die Seite der Bewusstseinsform und die reine Essenz auf die Seite des Bewusstseinsinhalts verlegen. Einer tieferen Reflexion gegenüber verschwindet aber eine solche Unterscheidung vollständig, wir sind, sobald wir gehörig auf das Wesen des reinen Existenzmomentes reflectieren, dessen unmittelbar bewusst, dass dem realen Bewusstseinsinhalte ein eigenes Existenzmoment angehört dass es in dem Begriffe eines gegebenen Seinsinhalts überhaupt liegt, *gegeben* zu sein, und dass sich dieses *Gegeben* nicht auf das Subject bezieht, dem es gegeben sondern auf es selbst als das Gegebene, dass dieses Gegebensein, diese Existenz in ihm selbst liegt, ein untrennbares Moment seiner eigenen Essenz ist. Die Untrennbarkeit des Existenz — und des Essenzmomentes muss für eine unmittelbare Intuition unseres Bewusstseins erklärt werden, eine von denjenigen Intuitionen, die von grundlegender Bedeutung für die Metaphysik sind, und deren Wahrheit sofort einleuchtet, sobald man sich einmal in diesselben vertieft hat.

Diese Untrennbarkeit der Existenz und der Essenz die wir als die letzte Intuition unserer unmittelbaren Erfahrung anerkennen müssen, lässt sich nun auch abstrakt-logisch ausdrücken, was ja schliesslich, wenn auch die abstraktesten logischen Begriffe ihren letzten Ursprung in der unmittelbaren Erfahrung haben, dasselbe bedeutet. Der Scheinsbegriff ist, logisch genommen, ein Widerspruch in sich, denn der Schein soll ein Seiendes bedeuten, das seiner Essenz nach irreal,

d. h. vollkommenes Nichts und doch seiner Existenz nach ein reelles Etwas sein soll. Wenn wir uns aber fragen, worin eigentlich der Schwerpunkt des Seienden liegt, in seinem Was oder in seinem Dass, so liegt er offenbar in dem Was, in dem Inhalt, und der reale Inhalt soll eben bei dem Schein irreal sein. Sagt man aber, dass nicht eigentlich der Inhalt selbst mit dem absoluten Nichts identisch ist, denn er könnte ja als solcher nicht seiend erscheinen, so frage ich, worin soll er sich dann von dem realen Sein unterscheiden. Sagt man aber, dass er sich doch von dem realen Sein unterscheidet, weil er ja bloss scheint, dann hat man eben dadurch in den Inhalt wieder eine Dualität von Existenz- und Essenzmoment hineingelegt und neben dem ursprünglichen Existenzmoment noch ein zweites statuiert, u. s. f. in infinitum, man vermehrt also dadurch nur unnöthigerweise die Anzahl der realen Existenzmomente, von denen das eine und erste vollkommen genügt, und man schliesslich immer wieder zu der absoluten Identificierung des Inhalts mit dem absoluten Nichts gelangt. Fasst man aber bei dem Schein um diesen Schwierigkeiten zu entgehen das Essenzmoment als real und das Existenzmoment als irreal, dann ist die Unmöglichkeit der scheinbaren Realität nur noch evidenter: denn ein realer Inhalt, der nicht existiert, ist eben gar nichts mehr. Das reine Nichts ist dasjenige, was weder Existenz noch Essenz hat, im Gegensatz zu dem realen Etwas als demjenigen was sowohl Existenz wie Essenz hat; der Schein dagegen soll etwas sein, was entweder blosse Existenz ohne Essenz, oder blosse Essenz ohne Existenz hat. Nun, der Schein in der Form blosser Essenz ohne Extstenz, wird als einleuchtende Absurdität sofort von unserem Denken ausgeschieden, denn eine Essenz, die nicht existiert, kann man sich nicht denken. Dagegen lässt sich scheinbar eine Existenz ohne reale Essenz denken; setzen wir nun zunächst dies als möglich voraus, wie es ja allerdings, sobald man Existenz und Essenz als zwei verschiedene Momente auffasst, der Fall ist, so fragt es sich, was nun eigentlich diese blosse reine Existenz bedeutet. Man sieht sogleich ein, dass diesselbe, als solche und ohne alle und jede Spur von Essenz gedacht, eben gar nichts mehr bedeutet, man muss sich eine „scheinbare“ Essenz hinzudenken, um sie ihrer völligen Leerheit zu befreien. Was bedeutet aber diese scheinbare Essenz und was ist sie? Ist sie wirklich eine Essenz, dann ist sie eine reale ansichseiende Essenz und das so gedachte Seiende ist dann reell und nicht scheinbar; ist sie nicht wirklich, dann ist sie ein reines Nichts, besteht also gar nicht, und jene reine Existenz bleibt dabei völlig

leer und absolut unbestimmt. Ueber diese Sachlage täuscht sich das menschliche Denken nur deshalb. weil es zu wenig über den Inhalt seiner Fundamentalbegriffe nachdenkt Wir haben ja nur deshalb Essenz und Existenz als trennbare Momente vorausgesetzt um so die Möglichkeit des Scheinsbegriffs zu ermöglichen: bei näherem Zusehen stellt sich aber zur unseren Verwunderung heraus, dass wir dadurch zwar die ganz allgemeine formale Möglichkeit eines solchen Begriffs ermöglicht, den Begriff selbst aber in seiner specifischen Inhaltlichkeit ganz und gar nicht. Der Begriff des Scheins verschwindet demnach vor einer tieferen Reflexion absolut und vollständig, da er sich der logischen Analyse gegenüber als eine contradictio in adiecto herausstellt.

Nun also, den Scheinsbegriff haben wir so auf zwei verschiedenen Wegen, sowohl auf demjenigen der reinen Erfahrung. wie auf demjenigen des reinen Denkens vernichtet. In Wahrheit aber sind diese beiden Wege am Ende identisch. der zweite ist nichts anderes als eine besondere Form des ersten. Der Satz des Widerspruchs, auf dem sich jene logische Argumentation gründet, ist, wie ich dies in der Erkenntnislehre ausgeführt habe, nichts anderes als der unmittelbare Ausdruck jener ersten Urthatsache der Erfahrung, wonach das uns unmittelbar Gegebene Existenz und Essenz als untrennbare Momente in sich befasst, wonach dieses unmittelbar Gegebene die absolute Realität selbst ist, ohne jede Beimischung von Nichtsein, ohne jede Spur von Schein. Der logische Weg ist insofern in seiner Besonderheit nützlich, inwiefern dadurch jene metaphysische Urthatsache selbst zum präcisen und absolut eindeutigen Ausdruck gebracht wird und deshalb haben wir ja hier — und werden es auch im folgenden überall thun wo es notwendig ist — beide Wege voneinander gesondert.

Der Hauptgrund und der Hauptanlass, der ursprünglich die Bildung des Scheinsbegriffs hervorgerufen hat, war die oberflächliche Trennung des Existenz- von dem Essenzmomente in dem Bewusstseinsinhalte. Dieser Hauptgrund wäre für sich nicht genügend gewesen einen so schwerwiegenden verhängnissvollen Schritt in der unwahren Auffassung der Urbeschaffenheit der Wirklichkeit zu veranlassen, wären nicht andere besondere Gründe hinzugekommen, die denselben gleichsam in Wirksamkeit setzten. Diese besonderen Gründe sind folgender Art. Die Bewusstseinsinhalte sind nicht nur als Bewusstseinsinhalte gegeben d. h nur von dem bewussten Subject in ihrem Dasein abhängig, sondern das denkende Subject bemerkt bald. dass dieselben auch von einer objectiven ausser ihm liegenden Aussenwelt

abhängen, und zwar gilt dies zunächst nur für die Empfindungen. Wegen dieser ihrer Abhängigkeit von der Aussenwelt, beziehen wir nun die Empfindungsvorstellungen auf die Objecte der Aussenwelt als auf ihre Ursache. Es kommt aber dabei vor — und hier liegt das Entscheidende — dass, obgleich ein und derselbe psychische Inhalt regelmässig durch ein und dasselbe äussere Object hervorgerufen wird, es dennoch auch Fälle giebt, wo derselbe durch ein ganz anderes Object hervorgerufen wird und dann sagen wir, dass er uns in Bezug auf das besagte Object täuscht, dass er nicht mehr eine „richtige Wahrnehmung" ist. Wenn nun weiter das innere Wahrnehmungsbild mit dem äusseren Objecte identificiert wird, wie dies auf dem Standpunkte des naiven Menschen geschieht, so verlegt man den Schein in die realen Objecte selbst, und so gelangt man mühelos zu dem Begriffe eines Seienden welches nicht das ist, als was es sich darstellt. Diese Incongruenz zwischen dem inneren Wahrnehmungsbilde und den äusseren Objecten — um uns noch eingehender darüber zu orientieren — ist bei den nahen Gegenständen bei weitem nicht so gross, wie bei den entfernten Gegenständen (z. b. den Sternen), deshalb kann der Standpunkt des naiven Menschen absolut nicht mehr aufrechterhalten werden sobald man dieser zweiten Incongruenz innewird. Aber auch bei den nahen Gegenständen kommen so viele Incongruenzen vor, dass sich der naive Standpunkt bei einer aufmerksamen Betrachtung derselben sofort als eine Ungeheuerlichkeit ersten Ranges herausstellt. Die Spiegelbilder der Gegenstände vor dem Spiegel, die als Wahrnehmungsobjecte absolut den Wahrnehmungsobjecten vor dem Spiegel gleichen, müssen auf dem naiven Standpunkte ebenso real existieren, wie die Wahrnehmungsobjecte vor dem Spiegel, und doch existieren sie nicht als reale Objecte. Der Stab, der im Wasser gebrochen erscheint müsste, wenn Wahrnehmungsobject und das äussere Object identisch wären, selbst wirklich gebrochen sein. Nur wenn man voraussetzt, dass sowohl jene Bilder im Spiegel, wie dieser Stab scheinbare Objecte sind, nur dann lässt sich die Realität der Wahrnehmungsobjecte vor dem Spiegel, und die Realität des geraden Stabes, wenn derselbe nicht im Wasser ist, aufrechterhalten. Der naive Mensch geht nämlich nicht so weit, diese in einzelnen Fällen constatierte Scheinbarkeit der Wahrnehmungsobjecte auf die gesammte Wahrnehmungswelt zu übertragen, er denkt sich diese Welt im Grossen und Ganzen als absolute ansichseiende Realität, nur in einzelnen Fällen, wo jene Incongruenzen auftreten, ist er genöthigt, zu dem Scheinsbegriffe seine Zuflucht zu nehmen, in dem naiven Glauben da-

durch die Realität jener Wahrnehmungswelt nicht im geringsten angetastet zu haben. Noch viel einleuchtender ist aber die Notwendigkeit des Scheinsbegriffs auf dem Standpunkte des naiven Menschen für diejenigen Wahrnehmungsinhalte, die diese Projection nach aussen gar nicht zulassen. Das sind die Erinerrungsbilder, die sich im Traume sogar den Anschein von realen (d. h in der Aussenwelt existierenden) Objecten geben. Die Erinnerungsbilder, die vielleicht auf einer ganz primitiven Stufe des in ersten Denkanfängen befangenen Menschen auch nach aussen projiciert wurden, sind sicherlich die ersten Bewusstseinsinhalte die in das Bewusstsein zurückgenommen wurden, und es ist noch keinem Vertreter der naiven Weltansicht *(Mach, Avenarius)* eingefallen auch hier die sogenannte „Introjection" auszuschalten, obgleich dies, nebenbei bemerkt, ganz consequent wäre. Da die Erinnerungsbilder, wegen ihrer offenkundigen Incongruenz mit den äusseren Objecten, die sie repräsentieren, nicht nach aussen projiciert werden können, so musste man, wenn man die Realität der realen Wahrnehmungsobjecte, d. h. die Projicierung derselben nach aussen, aufrechterhalten wollte, die Scheinbarkeit d. h. die Vorstellungsnatur diesen Erinnerungsbildern beilegen. Man setzt so voraus, dass die Vorstellung resp. das Erinnerungsbild des Rothen nicht ebenso roth ist wie das empfundene und wahrgenommene Roth, welches ja als reale Eigenschaft des realen äusseren Dinges betrachtet wird, ebenso setzt man voraus der vorgestellte Raum sei nicht ebenso ausgedehnt wie der wahrgenommene Raum, dem einzig und allein Ausdehnung als reale Eigenschaft zukommen soll etc. . . Als man nun nachher, durch die vielen Incongruenzen, die man zwischen den sogenannten realen Wahrnehmungsobjecten und den äusseren Objecten fand, die Wahrnehmungsobjecte in das Subject zurücknahm — Cartesius und Galilei waren es, jener mehr auf deductivem, dieser mehr auf inductiv-empirischem Wege, die diese entscheidende philosophische That vollbrachten — hat man wunderbarerweise die Vorstellungsnatur der Erinnerungsbilder mehr oder weniger auf alle anderen psychischen Inhalte übertragen und so ist man zu der verhängnissvollen Ansicht des subjektiven Idealismus gelangt, dessen Grundbegriff eben der Scheinsbegriff ist. Die consequenteste und zugleich die einzig mögliche Ausbildung dieses Standpunktes bei Kant werden wir weiter unten besprechen, jetzt aber wollen wir nachweisen, wie fehlerhaft jene Uebertragung der Vorstellungsnatur der Erinnerungsbilder auf die realen Wahrnehmungsinhalte war.

Der eben erwähnte Irrthum ist leicht einzusehen, und ein

strenges Denken kann denselben nicht mehr verzeihlich finden. Es scheint ja nichts natürlicher zu sein als, da den Erinnerungsbildern nur deshalb die Vorstellungsnatur beigelegt wurde, weil dieselben zuerst in das Subject zurückgenommen wurden (unter Voraussetzung dass sie einmal draussen waren), dass auch den realen, „starken" (um mich des Ausdrucks *Hume's* zu bedienen) Wahrnehmungsinhalten, sobald sie in das Subject zurückgenommen wurden, dieselbe Natur beigelegt wird. In Wahrheit aber — und darin besteht meine Abweichung von allen früheren idealistischen Systemen — sobald die realen Wahrnehmungsobjecte in das Subject zurückgenommen werden, hört jede Berechtigung des Scheins- resp. des Vorstellungsbegriffs für die Bewusstseinsinhalte überhaupt auf. Denn der Vorstellungsbegriff war in Bezug auf die Erinnerungsbilder durchaus nöthig, solange man die realen Wahrnehmungsinhalte mit den äusseren „realen" Objecten identificierte, denn dann musste in Wahrheit das „*im Subjecte sein*" soviel bedeuten wie „*nicht an sich sein*" d. h. *scheinbar sein* und im Gegensatz dazu das „*ausser dem Subjecte sein*" oder „*äusseres Object*" sein soviel wie „*ansichseiend*" bedeuten. Dagegen, wenn auch die realen Wahrnehmungsobjecte im Subjecte sind, und man jener Urdualität des Subjectes und des Objectes dabei innegeworden ist, dann hört dieser Gegensatz vollständig auf, es ist gar nicht mehr nöthig, das im Subjecte Seiende als etwas nicht an sich Seiendes, als etwas Scheinbares und Vorstellungsmässiges zu betrachten. Statt die Idealität der Erinnerungsbilder, die ihnen auf dem naiven Standpunkte notwendigerweise beizulegen ist, auf alle Bewusstseinsinhalte zu übertragen wenn dieser naive Standpunkt aufgegeben wird, ist es in Wahrheit viel sachgemässer die Realität der Wahrnehmungsobjecte dann auch den Erinerungsbildern beizulegen. Damit ist nicht nur die einheitliche Natur aller Bewusstseinsinhalte ganz ebenso statuirt wie dies bei ihrer vorausgesetzten Idealität der Fall ist, sondern noch mehr, man hat keinen Zwiespalt mehr zwischen der äusseren und der inneren Realität, das Seiende im Subjecte ist dann ebenso absolut real und ansichseiend, wie das Seiende ausserhalb des Subjectes. Den Gegensatz von „im Subjecte sein" = „scheinbar sein" und „ausser dem Subjecte sein" = „real sein" auch auf dem idealistischen Standpunkte noch aufrechterhalten wollen, wie dies der subjective Idealismus thut, heisst den wahren Unterschied des Idealismus von dem naiven Realismus nicht begreifen. Wenn der Idealismus Recht hat, dass die Wahrnehmungsobjecte ursprünglich, d. h. auch beim naiven Menschen unbewusst im Subjecte liegen, dann lässt sich jene instinktive und

felsenfeste Ueberzeugung des naiven Menschen von der Realität der Wahrnehmungsobjecte eher auf jene schon erwähnte unmittelbare Anerkennung des Bewusstseinsinhalts als eines ansichseienden Realen zurückführen, als auf die Meinung des naiven Menschen, in ihnen die äussere Realität selbst vor sich zu haben. Vielmehr ist dann diese letztere Annahme des naiven Menschen von dem unmittelbaren Gegebensein der Aussenobjecte selbst nichts anderes als der Ausdruck jener seiner unmittelbaren Ueberzeugung von ihrer absoluten Realität. Wenn dem aber so ist, dann liegt nichts wunderbares mehr darin, wenn wir den in das Subject zurückgenommenen Wahrnehmungsobjecten ihre absolute Realität beibehalten, da ja ihnen diese Realität auch ausserhalb des Subjectes nur deshalb beigelegt wurde, weil man dieselbe an ihnen als *bewussten* Objecten nicht bezweifeln konnte. Es hat also wirklich gar keinen Sinn von einem Schein der Bewusstseinsinhalte auf dem Standpunkte des Idealismus zu sprechen, und wir können an ihrer absoluten Realität keinen Zweifel mehr hegen.

Der Scheinsbegriff verliert also alle und jede Bedeutung, sobald das innere Wahrnehmungsbild von dem äusseren Objecte getrennt wird, sobald das innere Wahrnehmungsbild nur als „*inneres*“ aufgefasst wird. Das innere Wahrnehmungsbild als Wahrnehmungsbild täuscht nicht, ist immer „richtig“ d. h. für sich genommen absolut real und ansichseiend; ebenso ist das äussere Objeet als solches, alt etwas von der Wahrnehmung unabhängiges, eine ansichseiende Realität. Der Schein besteht und kann nur in der incongruenten Beziehung des Wahrnehmungsobjectes auf das äussere Object bestehen, dieses Vertreten kann ein „unrichtiges“ sein, aber weder das Vertretene noch das Vertretende. Der Begriff der Vorstellung als Begriff des reinen Vertretens ist nichts widersprechendes, aber der Begriff der Vorstellung angewandt auf einen und denselben Gegenstand ist etwas widerspuchsvolles. Es ist nichts widersprechendes darin zu finden, dass das innere Wahrnehmungsbild das äussere Object im Subjecte vertritt, wenn sie beide durch eine formale causale Beziehung miteinander verbunden sind, denn in diesem Falle können sowohl das eine wie das andere Glied an sich absolut real sein. Die innere Vorstellung des äusseren Objectes ist nicht dieses Object selbst, ganz abgesehen davon, ob das äussere Object qualitativ gleich oder ungleich mit seiner inneren Vorstellung ist. Sind sie gleich, dann braucht doch das innere Vorstellungsobject nichts ideales zu sein, dasselbe ist dann einfach nur ein anderes im Subjecte bestehendes Exemplar desselben Objectes,

welches auch ausser dem Subjecte gegeben ist; sind sie ungleich, dann ist die Sache nur noch einleuchtender. Wer da meint dass ein und dasselbe Object (in qualitativem, nicht in numerischem Sinne ist dies hier gemeint) nicht zugleich bewusstes und unbewusstes sein kann, der hat kein Recht daraus auf die blosse Idealität des inneren Vorstellungsobjectes zu schliessen, er kann nur den Schluss ziehen, dass das äussere Object mit dem inneren nicht gleiche Eigenschaften haben könne. Der Widerspruch, der in dem Bestehen eines und desselben Objectes ausserhalb und innerhalb des Subjectes besteht, kann doch nicht durch den viel schreienderen Widerspruch der Scheinbarkeit des inneren Vorstellungsobjectes erkauft werden Wenn es ausser uns ein objectives Roth gibt, dann soll unsere Empfindung des Rothen ganz ebenso wie unser Erinnerungsbild des Rothen bloss scheinbar sein, d. h. es soll nicht das Rothe selbst sein, sondern nur das Rothe vorstellen, jenes Rothe, welches ausser uns als ansichseiende Realität besteht. Ich frage aber: was bedeutet ein Rothes, das nicht selber roth ist, sondern das Rothe bloss darstellen soll? Das Rothe, das ich mir in meiner Erinnerung vorstelle und das Rothe, das ich unmittelbar als reale Empfindung in sich wahrnehme, finde ich doch unmittelbar als völlig reale ansichseiende Qualitäten vor. Was berechtigt mich, an diesem unmittelbaren Eindruck meines Bewusstseins zu zweifeln? Offenbar eine ganze Reihe von Irrthümern über das Verhältniss meines Bewusstseins zu der Aussenwelt, Irrthümer, deren ich mich entledigen müsse, wenn ich mein unmittelbares Bewusstsein zum absoluten Angelpunkt meiner Erkenntnis machen will. Statt zu schliessen, dass alle meine Annahmen von der Beschaffenheit der Aussenwelt und ihrem Verhältniss zu meinem unmittelbaren Bewusstsein, die darauf ausgehen, die absolute Realität dieses letzteren umzustossen, eben desshalb irrthümlich sein müssen, fange ich an an demjenigen zu zweifeln, woran man absolut nicht zweifeln darf, sobald man ernstlich über das Weltproblem nachdenken will, sobald man ernstlich dasselbe aufzulösen versuchen will.

Wenn wir uns nun in der Geschichte der Philosophie nach denjenigen grossen Denkern umsehen, die diesen verhängnissvollen Weg der Missachtung des eigenen Bewusstseins betraten, so werden wir *Plato* und *Kant* als solche bezeichnen können. Bekanntlich hat Plato die uns gegebene Wirklichkeit für den blossen Schein, für die blosse Abbildung der ansichseienden Ideenwelt erklärt, in der absolut wirklichen Ideenwelt ist das Urbild, das wirkliche reale Object jedes sinnlich vorgestellten Dinges gegeben, dieses letztere

ist demnach blosse scheinbare Vostellung des ersteren. *Aristoteles*, der die Trennung der subjectiven unmittelbar gegebenen Hälfte der gegebenen Wirklichkeit von der objectiven genügend durchführt hebt einerseits die transcendente Ideenwelt auf, indem er Urbilder unserer Vorstellungen in der äusseren Hälfte der uns gegebenen Wirklichkeit selbst findet, andererseits hebt er zum ersten Male die ansichseiende Realität des unmittelbaten Bewusstseins hervor, indem er gegen die Sophisten und den Heraklit darauf hinweist dass unsere Wahrnehmung immer „richtig" d. h. als inneres psychisches Ding real sein müsse, und dass der Schein nur aus der Incongruenz des Wahrnehmungsbildes mit dem äusseren Objecte entspringt. Nur dass dabei Aristoteles auf dem halben Wege blieb und sein Princip nicht consequent durchführen konnte, was uns nicht verwundern soll, wenn wir bedenken, dass dasselbe Princip in der neueren Philosophie seit Descartes bis Kant von allen hervorragenderen Denkern anerkannt wurde, und doch keiner von ihnen seine wahre Bedeutung und Ausdehnung begriff, bis nicht Kant kam, der den Grundgedanken Plato's, in neuer Form, aussprach, und so das Princip direkt in Abrede stellte. Nach Kant soll nämlich die innere Vorstellung als solche einerseits von dem äusseren Objecte absolut verschieden sein (und darin liegt die Abweichung Kant's von Plato), andererseits soll sie doch die ansichseiende Realität dieses äusseren absoluten Objectes (des „Dinges an sich") voraussetzen (und darin liegt die Abweichung Kant's von der Lehre der indischen Philosophie, wonach die Welt der absolute Schein sein soll), sie soll die subjective Erscheinung dieses objectiven Dinges an sich sein. Erscheinung, nicht Schein, sagt Kant. Reiner Schein wäre unsere Vorstellungswelt, wenn es keine absolute ansichseiende Welt der Dinge an sich gäbe, da aber die Existenz der Dinge an sich unzweifelhaft sein soll, so ist sie Erscheinung und nicht blosser Schein. Wir können, sagt ferner Kant, die Realität der Dinge an sich nicht angeben, nur so viel können wir sagen, dass die Wirklichkeitsart der Dinge an sich eine von derjenigen der subjectiven Vostellungswelt *toto genere* verschiedene sein müsse Bei Kant steht es also wie bei Plato fest, dass es eine absolute ansichseiende Realität giebt, im Verhältniss zu der diese unsere Welt (resp. unser Bewusstseinsinhalt) eine bloss scheinbare Realität hat: bei Plato ist die transcendente Welt der Dinge an sich dieser subjectiven Welt qualitativ homogen, bei Kant ist sie von ihr ganz heterogen.

Nun, die Kant-Platonische Behauptung der blossen Scheinbarkeit unserer subjectiven Erfahrungswelt lässt sich sehr leicht

und endgültig durch den Rückgang auf den letzten Ursprung des Scheisbegriffs, so wie er von uns aufgezeigt worden ist, zerstören. Kant, der selbst ein kritischer Erkenntnisstheoretiker sein will, und die unmittelbare Bewustseinserfahrung für seinen Ausgangspunkt nimmt, müsste, wenn er sich nur genügende Klarheit über die eigentliche Bedeutung der Urthatsache dieses seines Ausgangspunktes verschafft hätte, anerkannt haben, dass die Untrennbarkeit von Existenz- und Essenzmomente jene Urthatsache der Erfahrung darstellt. Denn sobald ich das unmittelbare Bewusstsein für das einzige unmittelbar Gegebene erkläre, brauche ich nur ein bisschen Reflexion darauf zu verwenden was denn eigentlich dieses Einzig- unmittelbaregegebensein meines Bewusstseins bedeutet, und ich werde gleich entdecken, dass es die unmittelbar einleuchtende Untrennbarkeit der Existenz von der Essenz des mir unmittelbar Gegebenen ist, was dasselbe zu dem unmittelbar Gegebenen macht. Diese unmittelbare Wahrheit der absoluten Realität der unmittelbaren Erfahrungswelt kann ich allerdings nie beweisen, weil sie eben die letzte absolut einfache Thatsache darstellt, die sich auf keine einfachere zurückführen lässt. Derjenige aber, der die Scheinbarkeit dieser unmittelbaren Erfahrungswelt behauptet, kann zwar nicht durch positive Gründe widerlegt werden, weil das eben hiesse, dass die Thatsache der absoluten Realität selbst durch positive Gründe beweisbar wäre, aber derselbe kann indirekt widerlegt werden, d h. eben dadurch dass er, sobald er versucht seine eigene These zu beweisen, notwendigerweise die entgegengesetze These als Wahrheit anerkennen muss. Sage ich, der Schein müsse bestehen und es gebe überall nichts Reales (budistischer absoluter Illusionismus), so behaupte ich damit erstens, dass das Bewusstsein das einzig mögliche Sein und zweitens, dass dieses Sein selbst scheinbar ist. Nun aber muss ich nolens volens die absolute reale Existenz dieses subjectiven Scheines behaupten, die reale Existenz aber mit einem Inhalt erfüllt sein muss, wenn sie sich von dem reinen Nichts unterscheiden und den Schein einer scheinbaren Realität hervorbringen soll. Sobald ich also den Schein aufgestellt habe, habe ich schon dadurch die Untrennbarkeit des Existenz- von dem Essenzmomente vorausgesetzt, und bemerke nur nicht dabei wie diese Voraussetzung jene meine Aufstellung vollständig zerstört. (Vgl. hierzu als Ergänzung das im I Kap. der „Princ. d. Erkenntnisslehre“ darüber Ausgeführte). Etwas schwieriger scheint die Widerlegung der relativen Illusionisten, Kant's und Plato's, zu sein. Plato und Kant, und viele andere, die die unmittelbare Erfahrungswelt für einen Schein erklären, läugnen nicht

die Existenz der absoluten ansichseienden Realität überhaupt, sondern nur die Identificierung unserer Erfahrungsrealität mit dieser ansichseienden Realität. Ich will nun zeigen, dass sie sich dabei in einer argen Selbsttäuschung befinden. Sie setzen in Wahrheit nur deshalb die absolute ansichseiende Wirklichkeit ausserhalb des Bewusstseins voraus, weil sie nicht eine in sich widerspruchsvolle Realität zulassen wollen, weil ihnen die alleinige Existenz der scheinbaren Bewusstseinsrealität ein krasser Widerspruch zu sein scheint. Sie sehen also das Widerspuchsvolle einer scheinbaren Realität ein, bleiben dann aber auf dem halben Wege, indem sie, statt die uns unmittelbar gegebene Wirklichkeit für die absolute Realität selbst zu halten, eine andere ausser dieser gegebenen bestehende Wirklichkeit voraussetzen, die nun als solche absolut widerspruchslos sein und ebendamit den Widerspuch der scheinbaren Wirklichkeit gleichsam tilgen soll. Dieses Letztere thut sie nun offenbar ganz und gar nicht, und das ist die arge Täuschung, in der sich diese Denker befinden. Das Widerspruchsvolle der uns gegebenen Realität, wenn sie scheinbar ist, wird dadurch nicht im geringsten umgeändert oder aufgehoben, dass man ihr eine andere ansichseiende Wirklichkeit zu Grunde legt, die von jenem Widerspruche frei ist, jener Widerspruch verschwindet in Wahrheit nur dann, wenn diese Wirklichkeit selbst für ansichseiend und absolut real erklärt wird. Wir haben gesehen wie der Scheinsbegriff auf Grund von vielen Incongruenzen in der Weltauffassung des naiven Menschen notwendigerweise auftreten musste, wenn sich der naive Mensch eine wenigstens scheinbar einheitliche Vorstellung von der Welt bewahren wollte. Die Gründe, welche Plato zu seiner Erklärung der ganzen sinnlichen Erfahrungswelt für einen Schein drängten, waren Gründe einer besonderen metaphysischen Erkentnissrichtung. Der letzte Grund, der Kant zu der Aufstellung seiner Doctrin der Scheinbarkeit der unmittelbaren Erfahrungswelt bestimmt hat, war die Erklärung des Misslingens aller unternommenen Versuche zur Auflösung des Weltproblems, womit Kant zugleich ein für allemal solchen Versuchen mit seiner Doctrin den Boden entziehen wollte. Nun, unserer Auffassung nach mussten alle die bisher unternommenen Versuche einer metaphysischen Welterklärung nicht deshalb misslingen, weil die uns unmittelbar gegebene Wirklichkeit keine Spur von wahrer Realität hätte, sondern deshalb, weil man nicht erkannte, dass sie durch und durch absolut real und ansichseiend ist. Freilich damit man dies erkennt, ist es einerseits notwendig sich zum Bewustsein zu bringen, dass das unmittelbar Gegebene nur deshalb unmittelbar gegeben ist, weil es als be-

wusstes Sein gegeben ist, und andererseits muss man ebenso erkennen, dass das im Bewusstsein und als Bewusstsein Gegebene nur im Bewusstsein und als Bewusstsein gegeben werden und existieren kann, dass also die Aussenwelt strenge von der Innenwelt geschieden werden muss. Sobald man jenes ersteren Faktums innegeworden ist, wird man der Untrennbarkeit des Existenz- von dem Essenzmomente inne, und damit ist der Boden dem Scheinsbegriff principiell entzogen, sobald man (infolge der vielen Incongruenzen der Wahrnehmungs- mit den äusseren Objecten) jene zweite Thatsache erkannt hat, ist auch im speciellen jede Berechtigung des Scheinsbegriffs aufgehoben, und damit das Princip der absoluten Realität des unmittelbar Gegebenen zur absoluten Wahrheit erhoben

Auf Grund dieses Princips nun begeben wir uns auf den grossen Ocean der metaphysischen Speculation hinaus, wo es so viele Klippen und Gefahren aller Art giebt, und wo so viele Schiffbruch gelitten haben. Wir hoffen aber dass unser Schiff allen möglichen Gefahren auf diesem Ocean Stand halten wird, weil dasselbe einerseits selbst so fest gebaut ist und andererseits durch eine wunderbare Einrichtung mit dem tiefen festen Boden jenes grossen Oceans in unmittelbarer Verbindung steht. Unser metaphysisches Princip ist wesentlich Erfahrungsprincip und wir werden in allen unseren Speculationen immer und überall den festen Boden der Erfahrung fühlen. Dem entspricht es nun, dass wir in dem nächsten Kapitel mit der allgemeinen Analyse der unmittelbaren Erfahrung beginnen werden, um auf ihrem Grunde die allgemeinen Kategorialbestimmungen des Seienden zu deducieren.

Zweites Kapitel.

Allgemeine Analyse der unmittelbaren Erfahrung und Feststellung der allgemeinen Kategorialbestimmungen des Seienden.

Nach dem allgemeinen Erkenntnissprincip der absoluten Realität der unmittelbaren Erfahrung können wir die allgemeinen Eigenschaften des Seienden, seine sogenannten Kategorialbestimmungen, nur feststellen, wenn wir die allgemeinen Eigenschaften des in unserem unmittelbaren Bewusstsein selbst gegebenen Seienden feststellen; da aber der Bewusstseinsinhalt, also die objective Hälfte des Bewusstseins, uns einzig und allein als essentialer Inhalt gegeben ist, so kann diese Feststellung nur an dem Bewusstseinsinhalt vorgenommen werden.

Dieser Feststellung muss aber offenbar eine Analyse des Bewusstseins selbst vorausgehen, es muss gezeigt werden worin der Unterschied von Inhalt und Form des Bewusstseins liegt und dann müssen die Elementarbestandtheile und Funktionen sowohl der einen wie der anderen Bewusstseinshälfte dargelegt werden. Wir brauchen wohl nicht besonders hervorzuheben, dass diese Analyse hier so kurz wie möglich sein wird; eine ausführlichere Analyse wird erst in dem zweiten Abschnitte der Ontologie, und die eigentlich ausführliche wird erst in der Psychologie gegeben werden.

Was entdecken wir nun zunächst, wenn wir die unmittelbare Erfahrung betrachten? Wir entdecken zuerst, dass dieselbe in jener schon so oft erwähnten Dualität von Subject und Object gegeben ist, dieses Zerfallen des Bewusstseins in Subject und Object ist die erste und ursprünglichste Thatsache unserer unmittelbaren Erfahrung, diese Thatsache bildet den Inhalt der allgemeinen Gegebenheitsthatsache der unmittelbaren Erfahrung selbst. Ich, der ich meiner Bewusstseinsinhalte bewusst bin, bin dessen bewusst, dass sie eben nur als *meine* Inhalte gegeben sind, dass ich ganz und ungetheilt zugleich in allen meinen Bewusstseinsinhalten bin, dass ich sie alle in einem Augenblicke als ein und dasselbe Ich wahrnehme. Ich bin unmittelbar dessen bewusst, dass ich, Subject meiner bewussten Inhalte bin, als eine untheibare Einheit gegeben bin, während meine bewussten Inhalte immer in einer Vielheit gegeben sind, und dass jene untheilbare Einheit meines Ich *in* dieser Vielheit meiner bewussten Objecte selbst gegeben ist, dass sie diese Vielheit sozusagen vollkommen durchdringt. Diese Einheit des Bewusstseins, diese unmittelbare Zusammengehörigkeit der Einheit des Subjectes mit der Vielheit des Objects, ist eine letzte weiter nicht erklärbare Thatsache unserer unmittelbaren Erfahrung, der wunderbare Knoten der Welt. In dem zweiten Abschnitte der Ontologie werden wir versuchen, diese Thatsache zu einem sozusagen selbstverständlichen Wunder der Welt erscheinen zu lassen.

Wenn wir nun den Bewusstseinsinhalt zunächst analysieren, so stossen wir auf die zwei als solche längst erkannten Elementarbestandtheile in demselben, auf die wir alle die verschiedenen Bewusstseinsinhalte zurückführen, und diese Elementarbestandtheile sind *Empfindung* und *Gefühl*. Der kardinale Unterschied dieser beiden Inhaltsgattungen besteht darin, dass sich die Empfindung auf die Aussenwelt bezieht, während das Gefühl sich auf unser eigenes formales Ich als solches bezieht. In dem Gefühl der Lust und der Unlust werde ich des Werthes meines Daseins inne; da das was

zu dem [illegible] ist der Bewusstseinsinhalt als solcher, sondern die [illegible] das reine Ich ist · denn dieses *hat* einen [illegible] kann sich der in dem Gefühle ausgedrückte [illegible] auf das Ich als solches beziehen Das Gefühl [illegible] Werth des äusseren Objectes, aber es drückt [illegible] für und in Bezug auf das Subject aus. im Gefühl ist [illegible] der Werth des Objectes *für* das Subject ausgedrückt [illegible] *[illegible] des Subjectes* das Primäre in dem Werthausdruck des Gefühls bleibt; deshalb eben ist das Gefühl etwas [illegible] lebendigeres und seelischeres als die Empfindung. es ist das wahrhaft Lebendige in unserem Bewusstsein, das eigentlich Werthvolle in demselben und als solches in Wahrheit der letzte Werthmaassstab aller Dinge. Dagegen ist die Empfindung etwas „sachhaftes", etwas was sich auf das Subject gar nicht unmittelbar bezieht etwas was wir im Gegensatz zu dem Gefühl auf das äussere Object beziehen. Dieser Bedeutungsunterschied der beiden Inhaltsgattungen des Bewusstseins ist im Anfang vollkommen genügend, um beide für ganz verschiedene, auf einander unzurükführbare Elementarbestandtheile des Bewusstheitsinhalts zu erklären

Wenn wir nun besonders aufmerksam das reine Subject analysieren, so werden wir an demselben ebenso zwei Elementarbestandtheile entdecken. Dies wird keine Schwierigkeit in sich enthalten, sobald wir uns darüber Rechenschaft geben, was eigentlich in diesem Falle Elementarbestandtheile bedeuten. Da das einheitliche Ich unmittelbar als rein formale Bewusstseineinheit gegeben ist, so kann von seinen Elementarbestandtheilen nur in dem Sinne des Verhältnisses desselben zu den vielen Bewusstseinsinhalten die Rede sein, es kann nur von der Art und Weise des Bedingtseins des Objectes von der Seite des Subjectes die Rede dabei sein. Wenn wir nun aufmerksam die Art und Weise betrachten, in der das Object von dem Subject abhängt so werden wir sehen, dass dieses zweifach geschieht. Ich bin erstens aller meiner Bewusstseinsinhalte als *meiner* bewusst ich weiss dass sie von mir und nur von mir vorgestellt und wahrgenommen werden, und zweitens ich bin mir ebenso bewusst dass sie in ihrer allgemeinen Existenz von meinem *Willen* abhängig sind. In der Erkenntnisslehre (vgl. kap. IV.) habe ich ausführlich dargestellt wie und in welchem Umfange meine Bewusstseinsinhalte in ihrer allgemeinen und speciellen Existens von mir abhängen, und verweise den Leser, der sich näher davon unterrichten will, auf dieselbe. Hier genügt es festzustellen, dass nach unserem Hauptprincip der absoluten Realität der unmittelbaren Erfahrung. wonach

es nichts Scheinbares in derselben giebt, der freie Wille eine unzweifelhafte Thatsache unserer unmittelbaren Erfahrung ist. Jeder fühlt unmittelbar sich selbst für absolut frei in seinen Willenshandlungen, und unterscheidet von ihnen klar die Handlungen die ohne seinen Willen geschehen: der freie Wille bedeutet aber nichts anderes als den von den Motiven (Vorstellungen und Gefühlen als Bewusstseinsinhalten) unabhängigen Willen, bedeutet nichts anderes als dass der Wille von dem bewussten Ich ausgeht, dass das bewusste Ich selbst es ist, welches in den freien Willensacten agiert. Der Wille ist also neben der Bewusstheit die zweite Art und Weise der Abhängigkeit der Bewusstseinsinhalte von der Bewussteinsform, Wille und Bewusstheit sind die beiden Arten, die beiden Bethätigungen des einheitlichen Subjectes in dem vielheitlichen Object, diese beiden Elementarbestandtheile der Bewusstseinsform haben im Gegensatz zu den beiden Elementarbestandtheilen des Bewusstseinsinhalts nichts inhaltliches und essentiales an sich, sondern sind als blosse Funktionen und Verhältnisse zu bezeichnen. Das Unterscheidende der Willens- von der Bewusstheitsfunktion nun besteht darin, dass erstens die erstere sich als zeitliche Thätigkeit manifestiert, während die zweite keine Veränderung in der Zeit erleidet, wenigstens solange man bewusst ist, also höchstens als zeitlose Thätigkeit zu bezeichnen wäre, und zweitens ist die Bewusstheitsfunktion ein einziger und untheilbarer Wahrnehmungsact, während sich die Willensfunktion in einer Vielheit von Thätigkeitsacten manifestiert, und zwar ist diese Vielheit sowohl simultan als successiv, ich kann nicht nur in verschiedenen aufeinander folgenden Zeitmomenten sondern auch in einem und demselben Zeitmomente, also zugleich, mehrere Willensacte wollen. Wie die Einheit und Untheilbarkeit des einen Subjectes in den vielen Inhalten als eine unmittelbare Thatsache anerkannt werden muss, die zunächst gar nicht weiter erklärbar zu sein scheint, ebenso muss die Einheit dieses Subjectes in der Zweiheit seiner Willens- und Wahrnehmungsfunktion einerseits und in der Vielheit seiner Willensacte andererseits als eine unmittelbare zunächst keiner weiteren Erklärung fähige Thatsache annerkannt werden. Die beiden Thatsachen bedeuten eigentlich eines und dasselbe: das Subject ist eines in den vielen Inhalten nur dadurch, dass dasselbe eines in seiner Wahrnehmungs- und Willensfunktion ist, da diese letzteren nichts anderes ausdrücken, als eben sein Verhältniss zu den vielen Bewusstseinsinhalten. Dass das Subject, welches so eine wichtige Rolle den Bewusstseinsinhalten gegenüber spielt, nicht eine inhaltslose Einheit darstellen kann, sondern irgendwie etwas reales sein muss, soll hier nur

beiläufig erwähnt werden, das Problem desselben wird uns erst im dem zweiten Abschnitt der Ontologie eingehend beschäftigen.

Nachdem wir nun so die Elementarbestandtheile unserer unmittelbaren Erfahrung festgestellt haben, wollen wir nunmehr die allgemeinen Eigenschaften der Erfahrungsinhalte feststellen, und da unter jenen Elementarbestandtheilen nur diejenigen des Objects einen essentialen Inhalt haben, so wird diese Feststellung nur an den Bewusstseinsinhalten vorgenommen werden müssen, und zwar müssen wir sowohl die allgemeinen Eigenschaften der einzelnen Inhalte wie diejenigen ihrer Complexe feststellen, denn in beiden muss sich etwas Specifisches und Eigenartiges manifestieren.

Diese allgemeinen Eigenschaften der Bewusstseinsinhalte sind nun die folgenden: *Qualität*, *Intensität*, *Zustand*, *Ordnung* und *Beziehung*.

Unter *Qualität* versteht man die inhaltliche Besonderheit, durch die sich jeder Bewusstseinsinhalt von anderen unterscheidet, z. B. roth, grün, süss, Lust, schwarz etc.... Wenn Qualitäten unter einander verglichen werden, so findet man dass dieselben entweder disparat-verschieden, oder *entgegengesetzt-verschieden* (schwarz-weiss, Lust-Unlust) oder verschieden und zugeisch teilweise ähnlich (roth-orange), oder ähnlich (die verschiedenen Nüancen von Roth), oder am Ende *ganz gleich* (roth und ein zweites Exemplar desselben Rothen). Für zwei Qualitäten, die einander absolut gleich sind, sagt man dass sie *numerisch* verschieden sind, dass es zwei Exemplare einer und derselben Qualität sind.

Unter *Intensität* versteht man die wunderbare Eigenschaft der Bewusstseinsinhalte, dass jeder derselben in einem höheren oder geringeren Grade seines essentialen Inhaltes gegeben ist. Die Intensität unterscheidet sich von der Extensität dadurch, dass ein extensiver Inhalt aus Theilen besteht, die *aussereinander* liegen, während die vielen Theile des intensiven Inhaltes im Gegensatz dazu nothwendigerweise *ineinander* liegen müssen. So unbegreiflich uns nun auf den ersten Blick diese Eigenschaft der Bewusstseinsinhalte auch scheinen mag, so ist sie doch eine Thatsache der unmittelbaren Erfahrung. Extensität (räumliche Ausdehnung) ist keine allgemeine Eigenschaft aller Bewusstseinsinhalte, sie kommt nur bei einigen derselben vor (bei Licht- und Tastempfindungen), während Intensität unzweifelhaft allgemeine Eigenschaft aller Bewusstseinsinhalte ist. Intensität und Extensität werden in eine gemeinsame Kategorie der *Quantität* zusammengefasst, doch kommen wir darauf später zurück

Unter *Zustand* versteht man die Veränderlichkeit und das Unverändertbleiben der Bewusstseinsinhalte. Es giebt demnach zwei Zustände, in denen sich jeder einzelne Bewusstseinsinhalt befinden kann, nämlich Veränderlichkeit und Unveränderlichkeit. Auch diejenigen Bewusstseinsinhalte, die durch mehrere Zeitaugenblicke hindurch unverändert bleiben, können doch nicht immer unverändert bleiben, sie müssen doch einmal vergehen, ganz ebenso wie sie einmal entstehen mussten und müssen. Veränderung und Unveränderlichkeit sind also die beiden allgemeinen Zustände jedes Bewusstseinsinhalts; dagegen sind Bewegung und Ruhe nur specielle Zustände einiger Bewusstseinsinhalte.

Unter *Ordnung* versteht man die Simultaneität, das Nebeneinandergegebensein, und die Successivität, das Nacheinandergegebensein der Bewusstseinsinhalte, und zwar gehören diese beiden Ordnungsformen nicht den einzelnen Bewusstseinsinhalten als solchen an, sondern drücken das Verhältniss vieler Bewusstseinsinhalte zueinander aus. In der Ordnung des Nebeneinanderseins hat nun jeder einzelne Bewusstseinsinhalt seine bestimmte Stelle, was nicht im Sinne des Raumorts zu verstehen ist (der nur in dem räumlichen ausgedehnten Nebeneinandersein einiger Bewusstseinsinhalte gegeben ist), sondern einfach in dem Sinne, dass jeder Bewusstseinsinhalt, indem er mit allen anderen zugleich gegeben ist, eben ein besonderes Glied in diesem vielheitlichen simultanen Complex darstellt. Im zweiten Abschnitte der Ontologie, besonders aber in der Psychologie werden wir auf die Frage der allgemeinen Örtlichkeit aller Bewusstseinsinhalte zurückkomen, hier genügt es festzustellen, dass, so unbestimmt der Ort vieler unausgedehnter Bewusstseinsinhalte auch sein mag, man doch für jeden behaupten kann, das er einen Ort im Bewusstsein hat. Die Örtlichkeit setzt durchaus nicht einen ausgedehnten continuirlichen Raum voraus, in dem die Orte einzig und allein lägen, sondern wenn eine Vielheit von Bewusstseinsinhalten nebeneinander gegeben ist, so stellt dann einfach jede dieser Qualitäten den anderen gegenüber eine besondere Ortseinheit dar, hat also in diesem Sinne einen bestimmten Ort, da man ja deutlich fühlt, dass die eine eben nicht die andere ist. Das Nebeneinandersein ist ohne Örtlichkeit in diesem Sinne gar nicht denkbar, und zwar ist die Örtlichkeit keine neben der Qualität und dem Nebeneinandersein bestehende besondere Kategorie, sondern einfach der Ausdruck dafür, dass die *vielen* Qualitäten nebeneinander gegeben sind, die Örtlichkeit drückt also die nackte Thatsache dieses Gegebenseins einer Qualität in der simultanen Vielheit der Qualitäten

aus und nichts anderes In diesem Sinne nun ist die Localität offenbar die allgemeine Eigenschaft aller Bewusstseinsinhalte. Wie die Localität in dem Nebeneinandersein, so ist auch die Lokalität in dem Nacheinandersein eine allgemeine Eigenschaft aller Bewusstseinsinhalte: wie es aber dort keinen continuirlich-ausgedehnten Raum giebt in dem alle Bewusstseinsinhalte gleichermassen gegeben wären, so giebt es auch ebensowenig einen einzigen vollkommen continuirlichen Zeitstrom in dem alle Bewusstseinsinhalte gleichermassen zeitlich localisiert wären. Denn wäre dies Letztere der Fall, dann müssten unsere Bewusstseinsinhalte in unaufhaltsamen Werden begriffen sein und ein Unterschied von sich verändernden und unverändert-bleibenden Bewusstseinsinhalten bestände nicht mehr, was jedoch offenkundig den Thatsachen der unmittelbaren Erfahrung widerspricht. Wie es in der Ordnung des Nebeneinanderseins räumlich-ausgedehnte und räumlich-unausgedehnte Bewusstseinsinhalte giebt, ebenso giebt es in der Ordnung des Nacheinanderseins unveränderliche d. h. zeitlich-unausgedehnte und veränderliche d. h. zeitlich-ausgedehnte (was diese Ausdrücke bedeuten und dass sie blosse Metaphern sind, brauche ich wohl nicht besonders zu erwähnen) Bewusstseinsinhalte (so sind Tonempfindungen in jedem Augenblicke veränderlich d. h. zeitlich ausgedehnt, während Farbenempfindungen durch mehrere Zeitaugenblicke hindurch unverändert bleiben, d. h. zeitlich-unausgedehnt sind), nur mit dem Unterschiede, dass die räumlich-unausgedehnten Bewusstseinsinhalte immer so bleiben, während die zeitlich-unausgedehnten Inhalte zeitlich ausgedehnt werden, und zwar dies in dem Augenblicke ihres Entstehens und Vergehens (da jeder Bewusstseinsinhalt einmal entstehen und schliesslich einmal vergehen muss) werden.

Unter *Beziehung* versteht man schliesslich das Verhältniss von Gleichheit und Verschiedenheit, die zwischen einzelnen Bewusstseinsinhalten bestehen. Und zwar sind Bewusstseinsinhalte nicht bloss ihrer Qualität nach gleich oder verschieden, sondern ebenso ihrer Intensität nach, oder ihrer Quantität überhaupt nach (in dieser Hinsicht ist besonders die sogenannte numerische Verschiedenheit zweier qualitativ gleichen Objecte hervorzuheben), sondern sie sind sogar auch ihrer Ordnung und ihrem Zustande nach einander gleich oder voneinander verschieden. Dies zeigt, dass die Beziehung eine Kategorie ist, die sensu stricto nur einer Vielheit von Objecten angehört, und dass sie weiter eine Kategorie ist, die allgemeiner als alle anderen Kategorien ist, da sie sie alle gleichsam durchdringt. Wegen dieser ihrer allgemeinen Gegebenheit in allen übrigen Kate-

gorialbestimmungen findet man gewöhnlich nicht für notwendig, dieselbe von allen anderen abzusondern und als eine besondere Kategorie hinzustellen, was durchaus notwendig ist, wenn mann wirklich in das innere Bestimmungsgesetz der Kategorialbestimmungen eindringen will.

Andere Kategorialbestimmungen als die aufgezählten existieren sicherlich in dem unmittelbaren Bewusstsein nicht, denn wir sind ganz planmässig in der Aufsuchung derselben vorgegangen, indem wir zunächst die jedem einzelnen Bewusstseinsinhalt als solchem angehörenden Kategorialbestimmungen aufsuchten und dann diejenigen die einer Vielheit von solchen angehören. Fraglich kann es nur sein, ob wir richtig nach diesem Princip die Kategorien voneinander gesondert haben, ob z. B. die Kategorie der Lokalität nicht in die Kategorie der Quantität hineingehört, oder ob die Kategorie der Intensität nicht auf die Kategorien der Ordnung und der Lokalität zurückführbar sei etc. Aber dies sind alles Fragen, die eben nur durch eine eingehende Untersuchung der Bedeutung und Beschaffenheit der Kategorialbestimmungen, einzeln und in Beziehung aufeinander betrachtet, entschieden werden können.

Bevor wir nun diese eingehende Untersuchung der Kategorialbestimmungen vornehmen, ist es durchaus notwendig, ein allgemeines Princip aufzustellen, welchem gemäss diese Untersuchung stattzufinden hat. Wir müssen, indem wir die Kategorialbestimmungen nach ihrem Werthe für das Seiende untersuchen, zuvor wissen, worin dieser Werthmasstab besteht. Dieses allgemeine Werthprincip der Kategorien besteht nun darin, ob eine Kategorialbestimmung einen essentialen Inhalt in sich enthält, sei dieser Inhalt von irgend einer besonderen und noch so sehr von dem uns bekannten essentialen Inhalt abweichenden Art, oder ob eine Kategorialbestimmung ohne allen und jeden essentialen Inhalt ist, also ein blosses absolut leeres und inhaltsloses Verhältniss darstellt. Es ist so z. B. sicher dass die qualitative Kategorialbestimmung zu jener ersten *realen* Kategorialart gehört, während wir z. B. die Kategorie des Nebeneinanderseins für ein blosses absolut inhaltsloses Verhältniss erklären müssen. Die Kategorialbestimmungen sind also in erster Reihe danach zu untersuchen, ob sie *real* oder *formal* sind, und diese Einteilung aller Kategorien in *reale* und *formale* ist von grundlegender Bedeutung für die Metaphysik. Gewöhnlich wird der Unterschied zwischen diesen beiden Kategorienarten dahin bestimmt, dass diejenigen Kategorialbestimmungen real sind, die dem einzelnen Bewusstseinsinhalt als solchem angehören, während die formalen Kategorien diejenigen sind, die

einem Complexe von solchen angehören. Aber weit entfernt davo dass diese Unterscheidungsart jene erstere ausschlösse, setzt sie s in Wahrheit stillschweigend voraus, indem man als selbstverständli voraussetzt, dass jede Kategorialbestimmung, die einem einzelnen I halt als solchem angehört, eben dadurch *real* d. h. inhaltlich se muss, während jede Kategorialbestimmung, die einem Complexe v solchen angehört, eben darum für „*inhaltsloses Verhältniss*" ang sehen wird. Diese selbstverständliche Voraussetzung von dem Wertl der einem einzelnen Bewusstseinsinhalt und einem Complex von s chen angehörenden Kategorialbestimmungen ziehe ich aber in Zw fel, indem meine Untersuchung zeigen wird, dass es Kategorialb stimmungen giebt, die nur mehreren Seinsinhalten zusammen ang hören und trotzdem *real* sind, und dass es ebenso Kategorialb stimmungen giebt, die einem einzelnen Seinsinhalt angehören u nichtsdestoweniger rein formal sind. Deshalb eben theile ich d Kategorien in reale und formale nach ihrem eigentlichen Einth lungsprincip und nicht nach einem Eintheilungsprincip, das schon i voraus die wahre Untersuchung der besonderen Natur der Kateg rialbestimmungen vorwegnimmt und damit eben abschneidet.

Die nähere Untersuchung der Kategorialbestimmungen na diesem allgemeinen Werthprincip derselben für die Realität wi nun zunächst darin liegen, den allgemeinen Zusammenhang, diejeni Kategorialbestimmung zu entdecken, die alle anderen erklärt u begründet. Diese Untersuchung wird nun die Beziehung, und zw die Verschiedenheitsbeziehung in ihrer elementaren Gestalt, als einfac Negationsbeziehung, als diese allgemeine Kategorie ergeben, ei Kategorie, die dieser ihrer allgemeinen alle anderen Kategorialb stimmungen begründenden Natur wegen, überhaupt nicht mehr a Kategorie, sondern als das allgemeine Princip der Kategorien selb bezeichnet werden wird und dies umsomehr als sie, wie wir eingehend zeigen werden, nicht das blosse logisch-notwendige Ve hältniss, also eine blosse formale Kategorie darstellt, sondern ei reale Wesenheit, also zu den realen Kategorien selbst hinzuzähl ist Nachdem wir so in dem nächsten Kapitel diese allgemei Principialnatur der Beziehungs-Kategorie festgestellt haben werde werden wir dann in dem folgenden Kapitel das Problem des Sei und Werdens, d. h. das Problem der Kategorie des Zustandes, e örtern, indem wir zeigen wollen, dass der Zustand selbst ganz eben eine reale Kategorie ist, wie die Beziehung und wie die Qualit Der zweite Abschnitt wird dann die formalen und die realen K tegorien in ihren speciellen Gestaltungen betrachten.

Bevor wir nun auf diese Untersuchung selbst übergehen, müssen wir noch einige Bemerkungen erkenntnisstheoretischer Natur machen. Wir wollen Seinskategorien auf Grund der Kategorialbestimmungen des in dem Bewusstsein gegebenen Seienden vornehmen, müssen demnach zuvor die Frage stellen mit welchem Rechte wir dies thun können. Nun die ganze Erkenntnisslehre und das erste Kapitel der Ontologie bieten Antwort auf diese Frage. Wenn unsere unmittelbare Erfahrung absolute ansichseiende Realität ist, dann stellt sie, wenn nicht die gesammte Wirklichkeit dar. so doch einen realen Ausschnitt aus derselben, und es müssen demnach in ihr alle die allgemeinen (d h. überall in der gesammten realen Wirklichkeit vorhandenen) Kategorialbestimmungen der realen Wirklichkeit auch vorkommen und dann haben wir Recht, die allgemeinen Kategorialbestimmungen des bewussten Seins für allgemeine Kategorialbestimmungen des gesammten Seins anzusehen. Ob die unmittelbare Erfahrung meines Ich, die mir einzig und allein real gegeben ist. diese gesammte Realitet ist oder nicht, die Antwort darauf ist im verneinenden Sinne in der Erkenntnisslehre gegeben worden, und wir brauchen hier in der Metaphysik darauf nicht besonders einzugehen. setzen vielmehr die Realität der Aussenwelt als bewiesen voraus. Ob es aber in der Aussenwelt Seinsbestandtheile giebt, die nicht mehr mit den in unserem Bewusstsein gegebenen Seinsinhalten qualitativ identisch sind, ist die eigentliche Frage der Metaphysik und was wir darüber in der Erkenntnisslehre (Kap. VI.) ausführten war aus Zweckmässigkeitsgründen geschehen, indem wir die weite Aussicht zeigen wollten, die unser neues erkenntnisstheoretisches Princip für die Auflösung des (qualitativen) metaphysischen Problems eröffnet

Drittes Kapitel.

Die beziehungslose und die beziehungsvolle Welt.

In dem vorigen Kapitel haben wir die allgemeinen Kategorialbestimmungen so beschrieben, wie sie sich einem aufmerksamen Denken auf den ersten Blick in der Selbstbeobachtung darbieten. Wir müssen nun, auf Grund dieser in unserer unmittelbaren Erfahrung vorgefundenen Kategorialbestimmungen versuchen, das gesammte Seiende zu erklären. Dafür aber ist es notwendig, dass wir den allgemeinen Zusammenhang zwischen diesen Kategorialbestimmungen selbst entdecken, wir müssen ein Princip entdecken. welches fähig ist uns sowohl die Notwendigkeit dieser und gerade dieser Kategorialbestimmungen und ebenfalls die Notwendigkeit aller der beson-

deren Gestaltungen derselben begreiflich zu machen Die Aufgab ist schwierig, aber nicht unlösbar, wenn wir uns auf den Stand punkt der unmittelbaren Erfahrung stellen. Wenn diese Erfahrun wirklich absolute ansichseiende Realität besitzt — was nach unsere Ausführungen im ersten Kapitel nicht zu bezweifeln ist — so mü sen wir dieses allgemeine Princip aller Kategorialbestimmungen de Seienden in der unmittelbaren Erfahrung selbst antreffen, wenn w dieselbe nur vorurtheilslos in dieser Hinsicht analysieren.

Nun, diese Frage nach dem allgemeinen Zusammenhang de Kategorialbestimmungen involviert die allgemeinere Frage, ob e überhaupt irgend einen ursprünglichen Zusammenhang zwischen de gegebenen Seinsinhalten und ihren Kategorialbestimmungen giebt Die Kategorialbestimmung der Qualität bietet eine Fülle von einze nen anscheinend völlig zusammenhangslosen Qualitäten dar, die nu dies Gemeinsame unter sich zu haben scheinen, eben Qualitäten z sein So zusammenhangslos erscheinen die *allgemeinen* Specificatione der Quantitätsbestimmung allerdings nicht, sie scheinen einander ge genseitig zu bedingen und sich gegenseitig in ihrer Existenz z bestimmen. Dasselbe gilt für die beiden Arten der Zustände un ebenso für die beiden Arten der Ordnungsverhältnisse Es fragt sic also, woran wir sind, ob es wirkliche reale Zusammenhänge zw schen den Seinsinhalten resp. ihren Kategorialbestimmungen gieb oder nicht? Wir müssen nun zunächst den Sinn dieser Frage ve stehen. Was heisst das dass reale Zusammenhänge zwischen de Seinsinhalten bestehen? Verhältnisse können diese realen Zusam menhänge nicht sein, weil ja Verhältnisse etwas rein formales be zeichnen, was erst aus einem schon bestehenden realen Zusammen hange zwischen den Dingen herrühren kann, was nicht diesen rea len Zusammenhang selbst bedeutet. Beziehungen dagegen ist de rechte Ausdruck für dieselben: die realen Seinsinhalte müssen sic aufeinander beziehen, müssen durch reale Beziehungen miteinande verbunden sein, um realen Zusammenhang miteinander zu haben Wenn wir reale Beziehungen zwischen realen Seinsinhalten feststel len können, dann werden sich die kategorialen Bestimmunge des Seienden als blosse specielle Gestaltungen, als Producte diese realen Beziehungen herausstellen müssen. Offenbar werden wir dem nach ambesten zur Bestimmung und Feststellung dieser realen Be ziehungen, wenn sie vorhanden sind, gelangen, wenn wir bei de einzelnen Specificationen der Kategorialbestimmungen darnach fra gen ob sie durch reale Beziehungen notwendigerweise gesetzt sin oder nicht.

Die Aufgabe ist nun klar bestimmt, das allgemeine Instrument zur Auflösung derselben auch. Es fragt sich nur noch, ob wir in unserer unmittelbaren Erfahrung nicht irgend etwas entdecken, was jenen realen Beziehungen entspricht, oder ihnen wenigstens ganz analog ist. Wenn wir so etwas in unserer unmittelbaren Erfahrung entdecken können, dann können wir wohl hoffen, Ordnung und Zusammenhang in die nns gegebene Wirklichkeit zu bringen, und dadurch den festen Gruud zur wahren Auflösung des Welträtsels zu legen. Wenn wir aber so was wie die besagten Beziehungen in unserer unmittelbaren Erfahrung nicht entdecken können, dann muss die Wirklichkeit entweder für absolut beziehungslos und demnach für unbegreiflich erklärt werden, oder man wird sich mit einem Ignoramus in Bezug auf die vielleicht ganz ausserhalb unserer sowohl unmittelbaren als mittelbaren Erfahrung d. h. der gesammten empirisch gegebenen Wirklichkeit liegenden Beziehungen begnügen müssen, was offenbar nur die vollständige Bankrotterklärung unseres metaphysichen Denkens bedeutet.

Nun, was uns zunächst und ganz natürlich einfallen wird, ist wohl die Frage, ob die gesuchten realen Beziehungen, die den realen Zusammenhang zwischen den einzelnen Bewusstseinsinhalten darstellen, nicht mit jener Kategorialbestimmung selbst zusammenfallen, die wir in unserer unmittelbaren Erfahrung als eine Art von Beziehung bezeichnet und entdeckt haben. Diese von uns als Beziehung bezeichnete Kategorialbestimmung ist nun, wie wir es kurz bemerkt haben, so allgemeiner Art, sie ist ein so unmittelbarer Ausdruck des Zusammenhangs der Seinsinhalte, dass, wenn man sie nicht gerade für jene reale Beziehung selbst halten will, dieselbe dann sicherlich in nächster Beziehung mit der letzteren stehen muss.

Die in uns vorgefundene Beziehung der Gleichheit und Verschiedenheit wird nun in der Hauptsache zwiefach aufgefasst: entweder wird sie als die blosse subjective Zuthat unseres Denkens betrachtet, d. h. als etwas was gar keine reelle Kategorialbestimmung der Seinsinhalte selbst ist (wie es die übrigen Kategorialbestimmungen, besonders die realen, sind), sondern nur als etwas was unser vergleichender Verstand selbst in diese Seinsinhalte hineinverlegt und dann sich selbst in Bezug auf ihre reelle Bedeutung täuscht, oder man betrachtet sie als eine wirkliche Kategorialbestimmung, aber als eine Kategorialbestimmung rein formaler Art, Gleichheit und Verschiedenheit werden als rein ideale, rein logisch-formale Verhältnisse dieser Seinsinhalte betrachtet, ideell und logisch im Sinne des reinen Rationalismus genommen. Der reine Rationalismus fasst

nämlich das logische Verhältniss im Seienden als etwas wunderbar Irreeles, welches gleichsam zwischen den Verhältnissgliedern steht, sie wirklich verbindet, selber aber gar keine Realität, gar keinen realen Inhalt hat, ganz formal ist, ganz ebenso wie dieser reine Rationalismus die subjective Idee (den Begriff als psychische Thatsache) für eine unanschaubare gleichsam völlig unwirkliche reine Vorstellung betrachtet. Nun, dieser Auffasung der Natur der „realen“ Beziehung von Seiten des reinen Rationalismus lässt sich eine andere Auffasung entgegenstellen, die die logische Idee in unmittelbare Beziehung mit der Realität bringt, und dies ist die dritte Auffassung, die man von der Natur der Beziehung haben kann, und die ich hier vertrete. In der Erkenntnisslehre habe ich einen Rationalismus ausgebildet, der von der Auffassung des alten Rationalismus von der Natur der subjectiven Idee als einer reinen Vorstellung ganz und gar abweicht, und die subjective Idee als eine reale, d. h. ansichseiende anschaubare concrete Realität auffasst. Dementsprechend nun verwerfe ich auch in der Metaphysik die obige Auffassung der Beziehung als eines reinen logischen Verhältnisses zwischen den Seinsinhalten vollständig: denn sobald man jene subjective Idee, die in Wahrheit ein mystisches Wesen ist, verworfen hat, muss man auch diese rein logische objective Idee, die gleichsam als reines Gelten in rein mystischer Weise das Seiende zwingt, ihr zu geborchen, verwerfen, und die Beziehung, wenn sie wirklich besteht und eine reale Bedeutung hat, als etwas Reales und Konkretes auffassen. Es wird sich dann nur fragen, ob die von uns in der Erfahrung vorgefundene Beziehung (oder wenigstens eine von ihrer Arten) sich als diese reale Beziehung betrachten lässt oder nicht, und wenn nicht, dann muss man ganz ausserhalb der Erfahrung eine reale Wesenheit voraussetzen, die jener realen Beziehung entspricht, und deren Correlatum in unserem Bewusstsein eben jene von uns vorgefundene Beziehung ist. Dass wir nun von vorneherein diese Verlegung der realen Beziehung in das Reich der transcendenten Realität ausschliessen müssen folgt schon aus unserem allgemeinen Princip von der absoluten Realität unserer unmittelbaren Erfahrung. Wenn dieses Princip richtig ist, wenn die unmittelbare Erfahrung absolute ansichseiende Realität ist, woran nicht zu zweifeln ist, dann muss sie ja wenigstens ein realer Ausschnitt aus der gesammten Realität wenn nicht diese gesammte Realität selbst sein, und dann muss die reale Beziehung wenn sie schon vorhanden ist, auch in der uns gegebenenen Wirklichkeit gegeben sein und gefunden werden.

Die erste Frage, die wir also aufzulösen haben, die Frage de

die reale Welt als rein beziehungslose oder als rein beziehunsvolle zu denken ist, wërden wir nun zunächst so behandeln, als ob der alte Rationalismus mit seiner Auffassung der realen Beziehung als eines rein logisch-formalen Verhältnisses zwischen den Seinsinhalten Recht hätte, und werden dann zu entscheiden haben, ob die von uns in der unmittelbaren Erfahrung vorgefundenen Beziehungen die blosse subjective Zuthat unseres Denkens sind, oder ob sie als reale in den Dingen selbst bestehende Beziehungen zu betrachten sind. Für uns ist damit die Frage im allgemeinen entschieden, denn jenen dritten Fall, in dem die von uns gedachten Beziehungen blosse subjective Zuthat wären, reale Beziehungen aber trotzdem im Seienden beständen, erkennen wir nicht an, und werden ihn nur am Ende der ganzen Untersuchung noch einmal besprechen. Dagegen ist durch jenen Nachweis der „Realität" der von uns gedachten Beziehungen die Frage noch nicht für uns *endgiltig* entschieden: denn erst dann werden wir jene Beziehungen für real halten und zwar real im wahren Sinne dieses Wortes, wenn sie nicht mehr als ein formales logisches Verhältniss gelten, sondern wenn sie sich auf eine wirkliche reale Beziehung als reale Wesenheit zurückführen lassen. So aussichtslos nun dieser Versuch manchem in landläufigen philosophischen Gegensätzen befangenen Leser auch erscheinen mag, ich bitte ihn nur, meinen Ausführungen in diesem Kapitel mit jener Anstrengung und Vertiefung des Denkens zu folgen, die von mir selbst auf diese äusserst feinen und verwickelten dialektischen Argumentationen und unmittelbaren Intuitionen verwendet wurde.

Die Beziehungen nun die ich in meiner unmittelbaren Erfahrung antreffe und die auf ihren Beziehungswerth zu untersuchen sind, sind diejenigen der Gleichheit und der Verschiedenheit. Die Beziehung der Gleichheit ist zunächst eine Beziehung zwischen zwei gleichen Objecten, aber man sagt auch dass jeder einzelne Gegenstand mit sich selbst gleich ist, dass diese Beziehung der Gleichheit mit sich oder der Identität mit sich sogar etwas ist, was zunächst und in erster Reihe unmittelbar als eine notwendige Beziehung an jedem Seinsinhalte als solchem angetroffen wird. Aber so notwendig diese Beziehung auch ist, so wenig sie demnach auf den ersten Blick als die reine subjective Zuthat unseres Denkens gelten mag, sie kann nicht als diejenige Beziehung gelten, die den realen Zusammenhang zwischen den vielen Seinsinhalten bewirkt, da sie sich nicht auf viele Objecte sondern immer nur auf ein einziges bezieht. Mag also die Identität mit sich eine reelle Beziehung sein (reell im Sinne von: logisch-notwendiges Verhältniss sein) oder nicht, sie berührt nicht

die Frage von der beziehungslosen und der beziehungsvollen Welt, da sie in der beziehungslosen Welt ebenso gelten kann wie in der beziehungsvollen. Wir können also das Problem der beziehungslosen resp. der beziehungsvollen Welt darauf zurückführen, ob von den von uns vorgefundenen Beziehungen die Beziehung der Identität mit sich die einzige mögliche Beziehung ist oder ob noch andere Beziehungen möglich sind. In diesem Falle wird sich uns -- und das ist ein anderer Ausdruck für dieselbe Sache — das Problem der beziehungslosen und der beziehungsvollen Welt darauf zurückführen, ob der Satz der Identität oder derjenige des Widerspruchs (resp. der Satz vom Grunde) das oberste Denk- und Weltgesetz ist. Denn die Notwendigkeit der Identitätsbeziehung wird in dem sogenannten Identitäts- und diejenige der Verschiedenheit in dem Verschiedenheitssatze, dessen letzter logischer Ausdruck in dem Widerspruchsatze liegt, ausgedrückt, so dass wir zunächst diese beiden Sätze in ihrer logischen Form und Bedeutung betrachten müssen, um uns sowohl von der Richtigkeit dieser Zurückführung des Problems zu überzeugen, als auch um der Untersuchung über die tiefere Natur jener Beziehungen einen soliden Boden zu bereiten.

Der Identitätssatz lautet: A ist A, jedes Ding resp. Gedankeninhalt ist sich selbst gleich; der Verschiedenheitssatz lautet: A ist nicht B, verschiedene Dinge sind voneinander verschieden, während der Widerspruchssatz, der daraus unmittelbar folgt, lautet: A ist nicht non A, kein Ding kann zugleich (etwas) sein und nicht sein. Eine aufmerksame Betrachtung des Identitätssatzes lehrt uns nun sogleich, dass dieser Satz eine Beziehung ausdrückt, die nur auf ein einziges Object geht. Die grammatische Form dieses Satzes bietet uns allerdings zwei Subjecte dar, aber wenn wir uns in seinen logischen Inhalt vertiefen, so sehen wir sogleich ein, dass jenes zweite A weder als das Prädicat des ersten, noch als ein zweites Subject zu betrachten ist, sondern sich ganz ebenso auf denselben logischen Inhalt (eben den gedachten Gegenstand A) bezieht wie das erste A, während das Prädicat dieses Satzes in der Identitätsbeziehung liegt, die als solche nicht eine Beziehung ist, die sich auf zwei Beziehungsobjecte bezieht, sondern auf ein einziges. In dem anderen Satze A ist nicht B, habe ich mit zwei Subjecten zu thun, ich meine zwei Dinge A und B indem ich sage, dass die beiden voneinander verschieden sind, dass das eine nicht das andere ist: in diesem Satze prädiciere ich zu den beiden Subjecten A und B das gemeinsame Prädicat der Verschiedenheit voneinander. Wenn ich für zwei Dinge A und B sage, dass sie verschieden sind, so will ich damit offenbar

sagen, dass die Verschiedenheit, die sie voneinander trennt, zugleich als Beziehung sie miteinander verbindet. Wie käme mein Denken dazu, diese Beziehung zwischen beiden zu setzen, wenn diese Beziehung nicht etwas wirklich an und in den Dingen selbst Liegendes ausdrückte: mein Denken ist sich ja dessen unmittelbar bewusst, dass, indem es eine Verschiedenheit unter verschiedenen Dingen constatiert, diese Verschidenheit wirklich etwas in den Dingen selbst Liegendes ist, und nicht eine blosse „subjective Zuthat" des Denkens, wie man sich auszudrücken pflegt. Wenn nun das Denken Recht damit hat, dass die Verschiedenheit zweier Dinge A und B wirklich eine reelle Verschidenheit beider bedeutet, und dass wirklich eine reelle Beziehung der Verschiedenheit zwischen beiden besteht, dann hat das Denken offenbar Recht zu schliessen, dass das Zusammenfallen zweier verschiedener Dinge in eins nicht möglich ist, das Denken hat dann Recht, aus dem einfachen „Negations"- oder Verschiedenheitssatze auf den Widerspruchssatz zu schliessen. Der Satz des Widerspruchs lautet: A ist nicht non A. Dieser Satz, dass ein und dasselbe Ding nicht zugleich (etwas) sein und nicht sein kann (oder dass Existenz und Essenz untrennbar sind, dass ein und dasselbe Ding nicht zugleich etwas sein und nicht sein oder ein und dasselbe Prädicat haben und nicht haben kann, oder, was dasselbe ist, dass einem und demselben Subjecte zwei entgegengesetze Prädicate nicht zugleich beigelegt werden können), ist nur dann richtig, wenn zwischen zwei verschiedenen Dingen wirklich eine reelle Verschiedenheitsbeziehung besteht, denn nur wenn eine solche besteht, ist es für unser Denken absolut unmöglich das Zusammenfallen beider sich zu denken. Wäre die Verschiedenheit, die wir zwischen zwei Dingen A und B finden, eine blosse „subjective Zuthat" unseres Denkens, so könnte sich unser Denken gar nicht wundern, wenn in dem nächsten Momente die zwei verschiedenen Dinge zusammenfielen, und ein einziges Ding würden. Dass dies eben nicht geschieht, und dass unser Denken die feste Überzeugung hat, dass es auch nicht geschehen kann, rührt nur daher, dass wir uns unmittelbar dessen bewusst sind, im Denken der Verschiedenheit etwas Wirkliches, eine wirkliche Beziehung zu denken und nicht eine Phantasmagorie, als was jene „subjective Zuthat" wäre. Und noch mehr. Sobald wir jene Verschiedenheitsbeziehung als eine wirkliche Beziehung zwischen den Dingen denken, sobald fassen wir noch eine Folgerung daraus, wir ziehen als Schluss noch einen wichtigen und fundamentalen Satz daraus. Wenn die beiden Dinge, die voneinander verschieden sind, wirklich durch eine reelle Verschiedenheitsbeziehung voneinander ge-

trennt sind, dann sind sie in ihrer Essenz und Existenz voneinander vollständig abhängig. Besteht zwischen A und B die Beziehung der Verschiedenheit, so ist offenbar A nur dann von dem B verschieden, wenn das B da ist, und B ist nur dann von dem A verschieden wenn A da ist. Wir wissen noch nicht ob A und B überhaupt nicht ohneeinander bestehen können, wir wissen auf Grund der einfachen Constatierung der Verschiedenheitsbeziehung nur soviel, dass, solange sie bestehen, sie verschieden sind. Die Verschiedenheit als reelle Beziehung involviert also die Abhängigkeit der beiden verschiedenen Glieder voneinander insofern und solange diese Glieder voneinander verschieden sind, und insofern und solange sie in Verschiedenheitsbeziehung stehen insofern und solange sind sie auch wirklich voneinander abhängig. Damit kommen wir zu dem allgemeinen Satze vom Grunde, aber zu der allgemeinsten Form dieses Satzes, inwiefern er nur allgemein die Thatsache einer Beziehung überhaupt ausdrückt. Während der Satz des Widerspruchs aus dem Verschiedenheitssatze unmittelbar in seiner vollen Gestalt folgt, ist dies in Bezug auf den Satz vom Grunde nicht der Fall. Denn der Widerspruchssatz besagt nur soviel, dass zwei verschiedene Dinge nie zusammenfallen können, und dass leuchtet unmittelbar aus dem Verschiedenheitsatze ein. Der Satz vom Grunde dagegen würde in seiner vollen Gestalt ausdrücken, dass die beiden durch die reelle Verschiedenheitsbeziehung getrennten Dinge A und B so voneinander abhängen, dass das Eine überhaupt nur mit dem Anderen zusammen besteht, was eben aus der allgemeinen Verschiedenheitsbeziehung, solange dieselbe nicht auf die einfache Negation zurückgeführt ist, eben nicht folgt. Was aus dieser allgemeinen Verschiedenheitsbeziehung, die noch nicht als einfache Negation gedacht ist, folgt, ist nur dies, dass, solange die Verschidenheitsbeziehung besteht, die beiden Dinge voneinander in dieser Verschiedenheit abhängig sind, nicht aber dass das Eine nicht unabhängig von dem Anderen aufgehoben oder gesetzt werden könnte. In Wahrheit können wir uns, solange wir uns die Verschiedenheitsbeziehung nicht als einfache Negationsbeziehung aufgefasst haben, die Aufhebung des einen Gliedes ganz unabhängig von der Setzung oder Aufhebung des anderen Gliedes denken, da mit der Aufhebung des einen zugleich die Beziehung zu dem anderen aufgehoben wäre, die zwischen den beiden bestand, die sie miteinander verband und voneinander abhängig machte. So also ist aus dem allgemeinen Verschiedenheitssatze *A ist nicht B* nur der allgemeine Gedanke der Beziehung, der Abhängigkeit überhaupt zu gewinnen, nicht der volle Satz vom Grunde

selbst. Deshalb ist es durchaus notwendig, im Anfang der Untersuchung noch zwischen diesen beiden Formen des Satzes vom Grunde zu unterscheiden, die sich dann am Ende der Untersuchung als untrennbar erweisen werden.

Bevor wir nun das Problem der beziehungsvollen resp. der beziehungslosen Welt auf diesen Unterschied des Identitäts- und des Verschiedenheitssatzes zurückführen, müssen wir noch etwas in Bezug auf die Identitätsbeziehung hinzufügen. Die Identitätsbeziehung des Identitätssatzes ist streng von der Gleichheitsbeziehung zweier Dinge zu unterscheiden. Die äussere Form beider Sätze ist ganz dieselbe, aber der logische Inhalt beider ist ganz verschieden: sage ich, dass A gleich A ist, so fragt es sich ob ich dabei dasselbe A meine oder ein anderes A, ein anderes Exemplar von A. Meine ich das *Erste* so bedeutet der Satz A ist A Gleichheit zweier geschiedener, wenngleich nicht verschiedener Objecte, während, wenn ich das *Zweite* meine, der Satz A ist A die Identität des A mit sich selbst bedeutet. Um diesen Unterschied beider Bedeutungen auszudrücken, giebt man der ersten Bedeutung auch die Form A ist B, die doch streng logisch nicht gelten kann, da A nur A gleich sein kann, und man in diesem Satze A ist B unter B eigentlich nur ein anderes Exemplar des A versteht. In dem Gleichheitssatze haben wir zwei Exemplare eines und desselben A vor sich, und müssen, wenn wir diesen Fall von demjenigen der reinen Identität logisch unterscheiden wollen, behaupten, dass sich die beiden Subjecte in demselben doch in einer gewissen Beziehung unterscheiden, und zwar ist es der quantitativ-numerische Unterschied, der da zum Vorschein kommt. Die numerische Verschiedenheit zweier gleichen Objecte ist ebenso als wirkliche reelle Beziehung dieser Objecte, als eine eigenthümliche Art ihres Unterschieds zu betrachten, wie es mit der qualitativen Verschiedenheit in dem Satze A ist nicht B der Fall ist: ebensowenig wie sich diese Verschiedenheit als eine blosse „subjective Zuthat" unseres Denkens betrachten lässt, ebensowenig lässt sich jene numerische Verschiedenheit als eine blosse „subjective Zuthat" unseres Denkens betrachten. Ist dem nun so, dann leuchtet es von selbst ein, dass in absolutem und stringentem Sinne genommen nur ein einziges Object sich selbst absolut und in jeder Beziehung gleich sein kann, dass zwei Objecte nur in Bezug auf ihren qualitativen Inhalt, auf ihre qualitative Kategorialbestimmung gleich sein können, nicht aber auf ihre quantitative. Dagegen sind zwei qualitativ verschiedene Objecte auch quantitativ verschieden und also absolut voneinander getrennt. Dass es aber qualitativ gleiche und numerisch verschiedene Inhalte giebt zeigt nur,

wie die quantitative Verschiedenheitsbeziehung mit der qualitativen Verschiedenheitsbeziehung nicht zusammenfällt, dass sie also als zwei verschiedene Beziehungen betrachtet werden müssen, worauf wir später eingehend zurückkommen.

Dass sich nun das Problem der beziehungsvollen und der beziehungslosen Welt darauf zurückführt, ob der Identitäts- oder ob der Verschiedenheitssatz das oberste Denkprincip ist, werden wir nun zeigen. Die beziehungslose Welt bestehet aus realen Elementen von denen jedes von den anderen absolut unabhängig sein soll während die beziehungsvolle Welt aus Elementen besteht, die in Beziehungen stehen und nur durch Beziehungen bestehen und sind. Zwischen den vielen Elementen der beziehungslosen Welt bestehen keine weder die von uns gedachten noch irgend welche anderen uns unbekannten ansichseienden Beziehungen. Die einzige Beziehung, die unser Denken in einer solchen beziehungslosen Welt zu denken vermag, ist die Beziehung der reinen Identität mit sich, da dieselbe jeder realen Wesenheit für sich zukommt, während die Beziehungen der Gleichheit, der numerischen und der qualitativen Verschiedenheit, als Beziehungen die sich auf eine Mehrheit von Objecten beziehen, in dieser beziehungslosen Welt nicht bestehen. In der beziehungsvollen Welt dagegen bestehen entweder diese Beziehungen als solche, oder sie sind in derselben nicht vorhanden, die wirklichen Beziehungen, die in derselben bestehen, sind uns völlig unbekannt und von jenen uns bekannten Beziehungen toto genere verschieden: diese letzteren können ihnen höchstens so entsprechen, wie Erscheinungen eines Dinges an sich nach der Beschaffenheit des letzteren sich richten und richten können. Der letzte Grund, der diese Ansicht in ihrer Geltung erhält, besteht darin, dass jene von uns gedachten Beziehungen rein formaler Natur sind und demnach nicht wirklich die in den Dingen selbst gelegene Beziehungen, die das lebendige Band dieser Dinge bedeuten, ausmachen können. Und thatsächlich, wenn wie jene Beziehungen auf ihren Beziehungswerth prüfen, d. h. wenn wir sie danach prüfen, ob dieselben wirklich lebendige Beziehungen in den Dingen darstellen können, so wird sich zeigen, dass einige von ihnen gar keinen Beziehungswerth haben, so dass nur das Unterlassen dieser eingehenden Untersuchung der von uns gedachten Beziehungen auf ihren Beziehungswerth jene falsche Meinung von ihrer reinen „Subjectivität“ hervorrufen konnte (abgesehen von dem anderen Grunde dieser Meinung, wonach die Welt der Dinge an sich nicht mit dieser unserer Welt zusammenfällt). Was wir also zuerst vornehmen wollen, das ist diese Untersuchung der Beziehungen auf

ihren Beziehungswerth, wodurch uns zugleich die Zurückführung des Problems der beziehungslosen und der beziehungsvollen Welt auf den Unterschied des Identitäts- und des Verschiedenheitssatzes völlig einleuchten wird, da sich uns durch diese Untersuchung herausstellen wird, dass weder die Identität mit sich noch die Gleichheitsbeziehung als eigentliche Beziehungen zu betrachten sind, während die qualitative und die numerische Verschiedenheit dies wirklich sind.

Von den vier angegebenen Beziehungsarten sind nun eigentlich nur diejenigen der qualitativen und der numerischen Verschiedenheit als Beziehungen zu betrachten. Wenn zwei Dinge verschieden sind, so denke ich diese Verschiedenheit als etwas was zwischen den Dingen wirklich liegt und sie verschieden nnd geschieden macht. Dagegen wenn zwei Dinge gleich sind, vermag ich nicht einzusehen, was für eine Art von Abhängigkeit die Gleichheit zwischen ihnen stiften soll. Ich erkläre die Verschiedenheitsbeziehung für eine reelle Beziehung nur deshalb, weil durch dieselbe die beiden Beziehungsglieder in ihrer Existenz voneinander abhängig zu sein scheinen: roth und süss sind zwei verschiedene Qualitäten, und ich denke, so disparat sie durch diese ihre Verschiedenheit auch sind, dass jene Beziehung der Verschiedenheit etwas ist, was den beiden Qualitäten als solchen inhäriert, dass ich das Süsse nicht anders als von dem Rothen verschieden, und das Rothe nicht anders als von dem Süssen verschieden denken kann, dass ihre Natur selbst diese ihre Verschiedenheit involviert, dass sich beide ohne eine reelle Verschiedenheit voneinander als solche nicht denken lassen. Man sagt gewöhnlich, roth und süss seien so disparat untereinander, dass zwischen denselben überhaupt keine Beziehung stattfinden kann: aber gerade dieses feste so entschiedene Läugnen aller und jeder Beziehung zwischen denselben beweist, dass eine ganz reale Beziehung zwischen denselben besteht, und dies ist eben jene ihre so sehr disparate Verschiedenheit. Dagegen vermag ich nicht einzusehen, und jeder tiefer Denkende wird mir hierin Recht geben, worin eigentlich die Gleichheitsbeziehung zwischen zwei Exemplaren einer und derselben Qualität z B. des Rothen bestehen soll? Dass das eine Rothe seiner Natur nach von dem anderen Nicht-rothen verschieden ist, das ist eine ganz reelle in ihrem beiderseitigen Wesen begründete Beziehungsthatsache; dass das eine Rothe aber mit dem anderen Rothen idenisch ist, dies bedeutet nur soviel, dass seiner Natur gemäss das Rothe eben roth ist und nichts anderes, indem das eine Rothe dem anderen Rothen gleich ist. ist es in Wahrheit nur sich selber gleich. In dem Begriffe der rothen Qualität liegt es gar nicht

eingeschlosssn, dass es mehrere Exemplare einer solchen Qualität giebt, dagegen ist in dem Begriffe der rothen Qualität zwar ebenfalls nicht eingeschlossen, dass es andere davon verschiedene Qualitäten giebt, aber wenn es solche giebt, dann besteht zwischen denselben die Verschiedenheitsbeziehung als eine wirkliche reelle Beziehung. Mag es noch so viele Exemplare der rothen Qualität geben, sie stehen in keiner qualitativen Gemeinschaft miteinander, in Bezug auf ihre qualitative Natur besteht absolut gar keine Beziehung zwischen denselben, dagegen stehen die verschiedenen Qualitäten in einer qualitativen Gemeinschaft, da dieselben als *verschiedene* gedacht werden *müssen*.

Das Argument, das ich hiermit vorbringe, ist völlig neu und ungewöhnlich denn man hat bisher höchstens die nothwendige Zusammengehörigkeit von direkt entgegengesetzten Verschiedenheitsgliedern behauptet. Nun, meine weitere Untersuchung wird allerdings zeigen, dass die Notwendigkeit jeder noch so weiten Verschiedenheitsbeziehung schliesslich auf der Notwendigkeit dieser einfachen Beziehung der direkten Verschiedenheit sich zurückführt, aber dass jede Verschiedenheitsbeziehung sich als notwendige Beziehung herausstellt, sobald man sich in die eigentliche Bedeutung derselben vertieft, das ist das Neue was ich hier behaupte und wodurch ich (durch die eben erwähnte Zurückführung jeder Verschiedenheit auf die einfache Beziehung der direkten Verschiedenheit) die Welt der Vielheit und Mannigfaltigkeit wirklich und vollständig erklären will. Diese Behauptung von der Notwendigkeit jeder Verschiedenheitsbeziehung der Gleichheitsbeziehung gegenüber wird zwar erst dann endgiltig einleuchten, wenn wir sie auf jene einfache Beziehung der direkten Verschiedenheit zurückgeführt haben aber schon dieser allgemeine Vergleich der Verschiedenheitsbeziehung überhaupt mit der Gleichheitsbeziehung zeigt schon, dass die Gleichheitsbeziehung keine eigentliche Beziehung ist und dass das eigentliche Notwendige in ihr nur die Beziehung der Identität mit sich ist Denn gerade deshalb war die Mehrheit der Exemplare einer und derselben Qualität keine logische Notwendigkeit, weil jede Qualität ursprünglich nur mit sich selbst identisch ist und keiner weiteren Qualität bedarf um dies zu sein. Während nun so zwischen zwei Exemplaren einer und derselben Qualität keine auf ihre Qualität sich beziehende Beziehung besteht, und die Gleichheitsbeziehung sich so als die wahre „subjective Zuthat“ unseres Denkens herausstellt, besteht und muss doch zwischen denselben irgend eine Art von Beziehung bestehen, denn sonst wäre es unerklärbar wieso es überhaupt mehrere Exemplare einer und derselben Qua-

lität giebt. Und thatsächlich, sobald wir die Frage so stellen, werden wir leicht die gesuchte notwendige Beziehung finden: sie ist nichts anderes als die reine quantitative Beziehung der numerischen Verschiedenheit. Zwei Dinge, die einander ihrer Qualität nach völlig gleich sind, unterscheiden sich nur dadurch, dass sie nicht ein und dasselbe. d h. numerisch nicht ein und dasselbe Ding sind, zwischen ihnen besteht also die Beziehung der blossen numerischen Verschiedenheit, eine Verschiedenheitsbeziehung, durch die einzig und allein die Vielheit gleicher Dinge zu einer logischen Notwendigkeit ganz ebenso erhoben wird, wie durch die qualitative Verschiedenheitsbeziehung die Mannigfaltigkeit der Qualitäten in logisch notwendigem Zusammenhange erscheint. Freilich sind wir durch dieses Hervorheben der allgemeinen Notwendigkeit der numerischen- und der qualitativen Verschiedenheitsbeziehung noch weit davon entfernt, die specielle Art und Weise, in der sie jene Vielheit und Mannigfaltigkeit der Dinge hervorbringen, anzugeben, und werden dies erst in der Folge thun.

Es bleiben also von den vier Beziehungsarten nur drei die eigentlich solche sind, und da jene beiden ersten nur specielle Gestaltungen einer und derselben Beziehung sind, so sind Verschieden heits- und Identitätsbeziehung die einzigen eigentlichen und wirklichen Beziehungen. Aber wenn man noch weiter geht, so ist auch die Identitätsbeziehung keine Beziehung in eigentlichem Sinne dieses Wortes mehr zu nennen, denn Beziehung setzt mehrere Beziehungsglieder voraus, während bei der Identitätsbeziehung nur ein einziger Beziehungspunkt gegeben ist. Denn wenn wir uns ernstlich fragen, was denn die Identität für eine Daseinsweise hat, wenn man sie als solche und abgesehen von dem Inhalte betrachtet, dessen Beziehung sie sein soll, so werden wir gleich einsehen, dass sie in Wahrheit gar nichts bedeutet. Dies können wir ganz gut erläutern, wenn wir die Identität mit einem anderen Seinsmomente vergleichen, welches ganz ebenso wie die Identität jedem einzelnen Seinsinhalte beigelegt wird, und dies ist das Moment der Existenz. Eine einfache (quantitativ und qualitativ einfache) Qualität scheint nur noch zwei Eigenschaften an sich zu haben, zwei Eigenschaften, von denen sie sich nicht trennen lässt, und dies ist die Eigenschaft ihrer Existenz und die Eigenschaft ihrer Identität mit sich. Nun, wenn wir uns fragen, was denn bei einer so einfachen Qualität die Existenz bedeuten soll, so werden wir gleich einsehen, dass sie für sich absolut nichts bedeuten kann. Alles das was sich uns in der Wirklichkeit als existierend darstellt fassen wir entweder als ein absolut inhaltsloses reines

Verhältniss (das Urbild der formalen Kategorialbestimmungen) oder als realen essentialen Inhalt (Qualität als Urbild der realen Kategorialbestimmungen), und wir fragen nun, was wohl jene Bestimmungen der Identität und der Existenz bedeuten mögen. Sie können zunächst gar nicht in Form von essentialen Inhalten gefasst werden, denn was sollte wohl die Existenz für einen essentialen Inhalt bedeuten neben dem essentialen Inhalt, der eben durch diese Eigenschaft der Existenz existieren soll? Sobald man dies erwägt, sieht man ein, dass die Existenz nichts essentiales ist und bedeuten kann. Nun, wenn sie das nicht ist und nicht sein kann, so könnte sie nur noch als reines inhaltsloses Verhältniss aufgefasst worden, so wie etwa das Nebeneinandersein das reine inhaltlose Verhältniss des Zugleichgegebenseins vieler Seinsinhalte ist. Aber auch dies kann die Existenz nicht bedeuten, denn Verhältniss setzt eine Vielheit von Seinsinhalten voraus, zwischen denen dasselbe besteht, während ein einfacher qualitiver Inhalt eben alle und jede Vielheit von sich ausschliesst. Daraus folgt klar, dass die Existenz bei einem einfachen essentialen Inhalt eben absolut gar nichts bedeutet. Und dasselbe gilt nun in Bezug auf die Identität. Denn es ist klar dass die Identität keinen essentialen Inhalt bedeuten kann, weil ja dieser essentiale Inhalt selbst dann mit sich identisch sein müsste u. s. f. in infinitum. Es bleibt also nur die Annahme übrig, Identität sei ein blosses Verhältniss an dem essentialen Inhalte. Aber auch ein Verhältniss kann sie nicht sein, da Verhältniss nur etwas ist, was zwischen mehreren Objecten bestehen kann, ein und dasselbe absolut einfache Object kann absolut kein Verhältniss zu sich selbst haben. So ist also die Identität mit sich, bei einem und demselben Objecte gedacht, insofern dieses Object absolut für sich betrachtet wird, absolut nichts. Die Identität mit sich ist also ebensowenig als eine Beziehung zu betrachten, wie dies mit der Gleichheitsbeziehung der Fall ist. Aber allerdings, während wir die Gleichheitsbeziehung ganz leicht aus dem Verbande des Seienden entfernen konnten, fühlen wir dass dies nicht ebenso leicht mit der Identität geschehen kann. Man mag uns noch so sehr einleuchten dass, sobald wir uns ernstlich in das Wesen der Identitet mit sich vertiefen, dieselbe gar nichts bedeutet, so fühlen wir doch, dass in derselben etwas ausgedrückt ist, was in dem Wesen des Dinges liegt, etwas ohne welches gedacht das Ding etwas Wesentliches verlieren würde. Nach dem Satze der Identität vermag ich das Rothe nicht anders denn als rothes denken, vermag ich das Etwas nicht anderes denn als etwas denken: ich vermag, indem ich jedes dieser Dinge als mit sich identisch denke, dabei nicht

denken, dass sie etwas anderes werden, ich vermag mir nicht denken, dass das Rothe selbst grün wird (man verstehe wohl, wovon hier die Rede ist — es ist die Rede von dem Rothen als dem Rothen), oder dass etwas nichts wird, weil roth nur roth ist und etwas nur etwas, und dass dieses Anderswerden gerade deshalb nicht geschehen kann, weil die Identität eine wesentliche Eigenschaft dieser Gedankeninhalte ist. Ist nun diese Eigenschaft absolut gar nichts, wie kann sie dazu kommen, so etwas Wesentliches einem Dinge zu garantieren, wie es seine Unabhängigkeit von dem Werden ist? Hier stehen wir vor einem tiefen metaphysischen Problem, vor dem man nicht leichtsinnig vorübergehen darf, da in ihm der letzte Schlüssel zur Auflösung der Frage der beziehungslosen resp. der beziehungsvollen Welt liegt.

Wenn nun so die Identität mit sich keine Beziehung ist, und in einer beziehungslosen Welt dieselbe einzig und allein vorhanden wäre, so ist es klar, dass das Problem der beziehungslosen resp. der bezieungsvollen Welt sich wirklich darauf zurückführt, ob der Identitäts- oder ob der Verschiedenheitssatz das oberste Welt- und Denkprincip ist. Nachdem wir dies nun erkannt und die Beziehungen auf ihren Beziehungswerth geprüft haben, wollen wir das Problem der beziehungslosen und der beziehungsvollen Welt zuerst von diesem allgemeinen Standpunkte des Denkens aus, d. h. von diesen allgemeinen Untersuchungen über die Beziehungsnatur der Beziehungen ausgehend, untersuchen, um dann, nachdem wir die Beziehungsnatur der Beziehungen bis auf ihr letztes Wesen untersucht haben, jenes Problem seiner endgiltigen Auflösung entgegenzuführen. Dies wird — um das Resultat noch einmal im voraus zu verkünden — dann geschehen, wenn wir alle Verschiedenheitsbeziehung letzten Endes auf die einfache Negationsbeziehung zurückgeführt haben, und wenn wir dann diese einfache Negationsbeziehung selbst für einen realen essentialen Trennungsact erkannt haben.

Es fragt sich nun wie die beziehungslose und wie die beziehungsvolle Welt ihrer allgemeinen Struktur nach zu denken sind, nachdem uns bekannt ist, wie die Beziehungen beschaffen sein müssen, die in der beziehungsvollen Welt bestehen können, und welche „Beziehungen“ in der beziehungslosen Welt noch gedacht werden können? Oder, anders ausgedrückt, kann eine vielheitliche und mannigfaltige Welt, als was die uns gegebene Welt ist, bestehen, wenn der Identitätssatz einzig und allein gilt (ganz abgesehen davon wie er in einer beziehungslosen Welt überhaupt gelten kann), oder muss in diesem Falle die Welt ohne Mannigfaltigkeit, vielleicht auch ohne Vielheit gedacht werden?

Nun, die grössten Vertreter der Doctrin von der beziehungslosen Welt, Eleaten und Herbart, sind nicht in diesem fundamentalen Punkte einig. Während die Eleaten behaupten, dass die Welt, nach dem Identitätssatze gedacht (allerdings haben sich die Eleaten nicht bis zu diesem abstrakten Gedanken der reinen Identität emporgeschwungen, aber in ihrem fundamentalen Satze, dass nur das Seiende ist und das Nichtseiende nicht ist, liegt dieser Satz, da er dessen abstrakte Voraussetzung ist, ausgesprochen), absolut keine Vielheit und Mannigfaltigkeit enthalten kann, sondern aus einem einzigen absolut einfachen Wesen bestehen muss, behauptet Herbart, dass die Welt aus einer Vielheit von ganz ebensolchen absolut einfachen (allerdings mit dem Unterschiede, dass bei Herbart das einzelne einfache Wesen schon Qualität hat, während bei Eleaten dasselbe reine qualitätslose einfache Wesenheit darstellt) Wesen besteht, von denen jedes eine absolut einfache für sich seiende von allen anderen völlig unabhängige und unzurücknehmbare Position darstellt. Wenden wir uns nun zunächst der complicierteren (aber dafür desto klarer und zusammenhängender entwickelten) Doctrin Herbarts zu, da dieselbe, wie sich zeigen wird, einzig und allein von diesem allgemeinen Standpunkte des Denkens aus sich widerlegen lässt, während die eleatische Doctrin (zusammen mit einer anderen Doctrin, die sich als extreme Folgerung derjenigen Herbarts herausstellt) erst dann wird widerlegt werden können, wenn wir diesen allgemeinen Standpunkt des Denkens verlassen und jene erwähnte Zurückführung der Verschiedenheitsbeziehung auf die einfache Negationsbeziehung durchgeführt haben.

In der Aufstellung seiner Doctrin geht Herbart von demselben Grundsatze aus, von dem die Eleaten ausgehen, nur dass bei ihm dieser Grundsatz unmittelbar aus dem Identitätssatze folgt), nämlich dass nur das Seiende ist und das Nichtseiende nicht ist, und folgert daraus gleich, dass das Seiende als reine absolut unzurücknehmbare Position ohne alle und jede negativen Bestimmungen zu denken ist. Herbart erkennt an, dass das Urbild des Seinsbegriffs in der unmittelbaren Empfindungserfahrung liegt, und dass nur die Relativität und Negativität dieser Empfindungswelt uns hindert, dieselbe für ansichseiend zu erklären, weil dieselbe dem abstrakten Seinsbegriff nicht entspricht. Das Denken ist demnach gezwungen das Correlatum des Seinsbegriffs, das eigentliche Sein, jenseits dieser Empfindungswelt zu setzen, weil die Art und Weise der Existenz dieser Welt dem Gedanken der absoluten Position nicht entspricht und deshalb für scheinbar" erklärt werden muss; nur dass diese Scheinbarkeit (wie dies Herbart ganz richtig hervorhebt) nicht so weit geht die

Existenz des Scheins selbst in Frage zu stellen, und diese Existenz uns zwingt, die Existenz jener ansichseienden Welt der realen Wesen vorauszusetzen (daher der berühmte Satz Herbart's: „Soviel Schein, soviel Sein"). Kann das reine Sein keine Relativität und Negativität in sich enthalten, so kann dasselbe nur als absolut einfache untheilbare Qualität gedacht werden. Aber damit will Herbart nicht auch die Vielheit und Mannigfaltigkeit der einfachen realen Wesen selbst ausschliesen: vielmehr gerade der Weg, der ihn dazu geführt, den Begriff des einfachen Realen zu bilden, nöthigt ihn auch die Vielheit und Mannigfaltigkeit dieser realen Wesen zu setzen: die Vielheit und Mannigfaltigkeit der Empfindungswelt fordert eine Vielheit und Mannigfaltigkeit der realen Wesen (denn „soviel Schein, soviel Sein"). Herbart wehrt sich energisch dagegen, damit Relativität und Negativität in die Welt der realen Wesen eingeführt zu haben: jedes Reale ist und bleibt ja dabei völlig und absolut von den anderen getrennt und ohne jede Beziehung mit ihnen. Nun, dieser Weg von der „scheinbaren" Empfindungswelt zu der realen Welt der beziehungslosen Wesen war verhältnissmässig leicht gangbar; aber der umgekehrte Weg von der transcendenten zu der Empfindungswelt war für Herbart so schwierig und verwickelt, dass er deutlich die Unfruchtbarkeit des ganzen Standpunktes zeigt. Um die Entstehung der vielheitlich-mannigfaltigen Empfindungswelt zu erklären, muss Herbart zu der Theorie der sogenannten „zufälligen Ansichten" greifen, um dadurch die realen Wesen in wenigstens scheinbare Beziehungen miteinander zu bringen. Aber diese scheinbaren Beziehungen sind in Wahrheit so mächtig, dass man sie gar nicht mehr für bloss scheinbare, aus den „zufälligen Ansichten" entsprungene Beziehungen betrachten kann, so sehr Herbart auch seinen unläugbar grossen Scharfsinn daran verwendet hat, sie als solche erscheinen zu lassen.

Der Ausgangspunkt sowohl, wie die Folgerungen Herbart's sind nun falsch. Wir können die uns unmittelbar gegebene Empfindungswelt nur dann zum Ausgangspunkte unserer metaphysischen Untersuchungen machen, wenn wir sie für absolut real anerkennen, und der Satz Herbart's „soviel Schein, soviel Sein" erkennt ja diese absolute Realität ungewollt an (da reale Existenz ohne reale Essenz nicht denkbar ist, Herbart aber damit die reale Existenz des Scheines anerkennt). Ist dem nun so, dann kann die Bearbeitung der Erfahrungsbegriffe (wodurch Herbart einen sehr glücklichen Ausdruck für das wahre Geschäft der Metaphysik eingeführt hat) nicht so geführt werden, dass dabei alles specifische der Erfahrung verschwindet

Herbart lebt in diesem Wahne nur deshalb, weil er das abst Begriffsvermögen für den Massstab jener Bearbeitung der Erfal ansieht, und nicht die Urthatsachen dieser Erfahrung selbst). das Denken ist nicht berechtigt die erste beste Schwierigkei einen Widerspruch zu erklären Widersprüche in der Welt Wirklichkeit giebt es nicht, und da die uns gegebene Bewusst wirklichkeit selbst real ist, so können die sogenannten Widersp in den Erfahrungsbegriffen nicht bestehen, und sind nur sche Widersprüche.

Nun fragt es sich: ist die beziehungslose Welt der viele fachen Realen, deren Qualitäten alle voneinander gänzlich versch sind, denkbar um die Art und Weise, wie Herbart ihre Ex aus der Vielheit und Mannigfaltigkeit der Empfindungen ersch ausser Acht zu lassen? Jedes Reale soll nach Herbart eine ein qualitative Wesenheit sein, die von allen anderen Wesenheiten gä verschieden ist, oder, wie sich Herbart ausdrückt, disparat ist. Gl Qualität können jene realen einfachen Qualia nicht sein, da H die Gleichheit für eine Beziehung erklärt, worin er nur ins Recht hat, inwiefern die gleichen Wesen wirklich durch ihre G keit aufeinander hinweisen, und es irgend einen gemeinsamen (geben muss, der sie hervorbringt, nur dass dieser Grund nicl einer besonderen qualitativen Gleichheitsbeziehung, sondern e und allein in einer numerischen Verschiedenheitsbeziehung liegen l Wenn demnach einerseits, vom Standpunkte der qualitativen Bezi aus, die beziehungslose Welt nur aus qualitativ gleichen einf Wesen bestehen könnte, so ist andererseits die Notwendigkei numerischen Beziehung desto einleuchtender in einer solchen wodurch sie eben aufhört „beziehungslos“ zu sein. Herbart thut gut, wenn er seine Realen nicht für qualitativ gleich hält, da er da der numerischen Verschiedenheitsbeziehung sich entledigt zu l scheint. Es fragt sich also nur, wie es nunmehr mit der „Disparat jener qualitativen Wesen steht? Offenbar denkt sich Herbart, jedes seiner realen Wesen durch seine einfache spezifische Qu eine für sich seiende Wirklichkeitsart darstellt, die Disparatheit Qualitäten hält er für so gross, dass durch dieselbe jede Bezie lichkeit ausgeschlossen ist. Nun, gesetzt selbst dass solche Wirl keitsarten denkbar sind, die absolut so voneinander verschieden dass sie absolut nichts Gemeinsames mehr in sich haben, die (täten, deren Gemeinsames eben in ihrer qualitativen Inhaltlic besteht, können des nicht sein, weil sie eben alle etwas Gei sames haben, und folglich kann ihre Verschiedenheit nur als d

Beziehung gedacht werden, sie können nicht so disparat sein, wie dies dem wahren Sinne des Wortes „disparat“ entspricht. Herbart darf also, wenn seine Realen wirklich ganz beziehungslos sein sollen, dieselben gar nicht als Qualitäten denken, sie müssen so gedacht werden, dass nur eine von denselben qualitativer Natur sein kann, die anderen aber von völlig anderer davon toto genere verschiedener Art. Nun freilich wird dadurch die Herbart'sche Doctrin völlig unfähig, die Welt des subjectiven Scheins zu erklären: so disparat jene realen Wesen auch sind, sie müssen doch etwas Gemeinsames in sich haben, um durch ihre scheinbaren Beziehungen die subjective Empfindungswelt, deren „scheinbare“ Qualitäten, trotz ihrer Disparatheit, doch eben Qualitäten sind, zu ermöglichen. In Wahrheit aber fasst Herbart nicht nur seine realen Wesen als Qualitäten auf, was sie, wie gesagt, gar nicht sein können, wenn sie wirklich beziehungslos zueinander sein sollen, sondern er fasst das Verschiedenheitsverhältniss jener Qualitäten selbst gar nicht für so eindeutig und extrem, wie das auf den ersten Blick zu sein scheint. Um die verschiedenen Verschiedenheitsverhältnisse der subjectiven Empfindungen zu erklären, ist er genöthigt, den realen einfachen Qualitäten selbst diese verschiedenen Verschiedenheitsverhältnisse beizulegen, wodurch er eben die Verschiedenheitsbeziehung selbst in die Welt der realen Wesen hineinführt.

Wenden wir uns aber von dieser Inconsequenz Herbart's ab, und betrachten wir seine einfachen Qualitäten so, als ob sie alle gleichermaassen voneinander verschieden und disparat wären. Nun fragt es sich, wie die Vielheit dieser vielen Realen möglich ist, und ob sie möglich ist. Die Frage ist leicht zu beantworten, sobald man ihr eine andere sachgemässere Form giebt: sind die vielen realen einfachen Qualia unmittelbar nebeneinander gegeben, so dass es zwischen denselben keine Lücken giebt, oder sind zwischen denselben leere Lücken vorhanden, und wenn diese letzteren vorhanden sind, so fragt es sich, ob diese leeren Lücken selbst ein etwas oder ein nichts sind, befinden sich also die Realen in einem leeren Raume, oder sind sie lückenlos nebeneinander gegeben? In dem zweiten Abschnitt (I-ter Unterabschnitt, Kap. 2.) werden wir das Problem des leeren Raumes und des Raumes überhaupt besonders behandeln, hier aber bemerken wir, dass der leere Raum in einer beziehungslosen Welt nicht bestehen kann, wie dies auch Herbart (im Gegensatz zu der naiven demokritischen Atomistik) erkannt hat, dass also jene leeren Lücken, wenn sie bestehen, in keinem Falle Bestandtheile des realen leeren Raumes sein können, weil die einzige Realität in der beziehungslosen Welt eben jene

vielen Realen sind. Das reine Nichts können jene leeren Lücken auch nicht sein, da das Nichts als das Nichtbestehende eben gar keine Prädicate, also auch dasjenige der Ausdehnung nicht hat. Demnach können die realen Wesen nur lückenlos nebeneinander gegeben sein. Aber dadurch entsteht eine andere Schwierigkeit, es fragt sich nämlich, was es dann ist, das sie voneinander trennt. Nichts, wird man antworten. Ja wohl, aber das Nichts besteht nicht und kann demnach auch gar nicht zwei einfache Qualitäten voneinander trennen, diese einfachen Qualitäten, wenn sie durch nichts getrennt sind, sind in Wahrheit gar *nicht* getrennt, und müssten eigentlich ineinander hinübergehen, sich in eins vereinigen. Sollen sie voneinander getrennt sein, so muss etwas da sein, was sie trennt, und das kann die numerische Verschiedenheitsbeziehung einzig und allein sein. Wenn somit eine Vielheit einfacher Qualitäten gegeben ist, so muss diese Vielheit durch numerische Verschiedenheitsbeziehung gesetzt sein, ganz abgesehen davon, ob man die Qualitäten für gleich oder für „disparat" hält, in welchen Fällen die qualitative Verschiedenheitsbeziehung allerdings keine Notwendigkeit mehr ist. Mag man sich also drehen und wenden wie man will, die Welt der vielheitlich-mannigfaltigen einfachen Qualitäten muss eine Beziehungswelt sein, denn jedenfalls muss in dieser Welt die numerische Verschiedenheitsbeziehung herrschen, auch wenn man diejenige der qualitativen durchaus nicht gelten lassen will. In der That ist Herbart in grosser Verlegenheit, wenn man die Frage der Ortsverschiedenheit der realen Wesen erhebt: er kann die Realität des leeren Raumes, wie gesagt, nicht anerkennen, er vermag auch nicht den lückenlos-discreten, d. h. aus reellen unmittelbar sich berührenden realen Punkten (jenen einfachen qualitativen Einheiten eben) bestehenden Raum anerkennen, da er fühlt, dass man dadurch nothwendigerweise die numerische Verschiedenheitsbeziehung anerkennen müsste, und muss so zu der Fiktion des „intelligibilen Raumes" der allergings mit diesem discreten Raume in nächster Verwandtschaft steht, aber am Ende mit ihm nicht identisch ist — greifen, um seine „Realen" placieren zu können. Die realen Wesen dürfen sich nicht in einem und demselben Raume befinden, denn dann wären sie nicht mehr beziehungslos; durch leere Nichtseinsstrecken können sie voneinander auch nicht getrennt werden, es bleibt also nur die Annahme übrig, dass sie sich zwar unmittelbar berühren, aber als beziehungslose sich nicht in einem und demselben Raume befinden, sondern jeder gleichsam in einem anderen Raume sich befindet. Und dies ist die endgiltige Vorstellungsweise

von der simultanen Reihenform in der sich die disparaten Elemente der beziehungslosen Welt einzig und alein befinden können (es ist fraglich ob sich Herbart unter seinem „intelligibilen Raume" eine solche simultane Reihenform gedacht hat). Nun aber ist diese simultane Reihenform nur unter absolut ganz disparaten Wirklichkeitselementen möglich, was eben jene einfachen Herbart'schen Realen nicht sind und nicht sein können. Die qualitativen einfachen Wesen können nicht so disparat sein, dass es keine qualitative Verschiedenheitsbeziehungen zwischen denselben giebt, deshalb können sie als diese disparate Wirklichkeitselemente gar nicht angesehen werden, und zwischen denselben müssen numerische Verschiedenheitsbeziehungen herrschen; es folgt aber daraus auch zugleich, dass man sich nur scheinbar aus der vielheitlich-mannigfaltigen Qualitätswelt die qualitativen Beziehungen hinweg denken kann, wenn man genöthigt ist, die quantitativen gelten zu lassen.

Das Resultat all dieser unseren Ausführungen ist nun folgendes: die vielheitlich-mannigfaltige Welt kann nicht als beziehungslose Welt aufgefasst werden, solange man ihre einfachen Bestandtheile nicht für absolut disparat erklärt wenn man sie aber für solche erklärt, dann ist man durchaus genöthigt, die subjective Empfindungswelt für scheinbar zu erklären, denn sie besteht aus Elementen, unter denen unzweifelhaft Beziehungen bestehen. Vom empirischen Standpunkte aus ist also die Doctrin der beziehungslosen vielheitlich mannigfaltigen Welt durchaus falsch. Vom allgemeinen Standpunkte des Denkens aber ist diese Doctrin nur insofern falsch, inwiefern man die Voraussetzung der gemeinsamen qualitativen Natur jener Elemente der beziehungslosen Welt macht, insofern dagegen die absolut disparate Natur dieser Elemente vorausgesetzt wird, ist diese Doctrin von diesem allgemeinen Standpunkte des Denkens durchaus nicht widerlegbar.

Ebenso unwiderlegbar ist nun von diesem allgemeinen Standpunkte des Denkens aus auch die andere mögliche Doctrin der beziehungslosen Welt, die eleatische, die vom allgemeinen Denkstandpunkte aus ganz ebenso consequent ist, wie dies für diese Doctrin der vielen absolut disparaten Wirklichkeitselemente durchaus der Fall ist. Die Eleaten setzen voraus, dass die Welt der Vielheit und Mannigfaltigkeit blosser Schein ist, und dass diesem Schein nur ein einziges Wesen als realer Kern zu Grunde liegt. Das einzige Wesen der Eleaten ist eine absolut einfache qualitätslose Einheit, die als das einzige Wesen wirklich absolut beziehungslos ist, da es keine anderen qualitativen Einheiten mehr giebt, von denen sie qua-

litativ oder numerisch verschieden wäre. Vom allgemeinen Stai punkte des Denkens nun lässt sich diese eleatische Doctrin ni widerlegen, da, solange wir die Verschiedenheitsbeziehung als all meine Beziehung denken, in derselben keine unbedingte, die Exist der Beziehungspunkte selbst betreffende Notwendigkeit liegt. *W* Vielheit und Mannigfaltigkeit der realen Wesen vorhanden ist, *da* müssen wirkliche Beziehungen zwischen denselben bestehen, a *dass* diese Vielheit und Mannigfaltigkeit gegeben werden müs *dass* ein einfaches reales Wesen nur als Glied einer beziehun vollen vielheitlich-mannigfaltigen Welt bestehen kann, folgt dar *durchaus* nicht. Wenn der Eleate also behauptet, dass es in Welt ein einziges reales Wesen giebt, und dass alles andere Unmögliches ein Schein sein müsse, so haben wir noch kein scheidendes positives Argument, um ihm die Unmöglichkeit sei einzigen realen Wesens und damit die Möglichkeit jener vielheitli mannigfaltigen Wirklichkeit, die er wegläugnet, nachzuweisen. können ihm hier nur auf die unzweifelhafte Existenz jener v heitlich-mannigfaltigen Welt hinweisen, die er nicht zu erklä vermag. Und in derselben Lage befinden wir uns demjeni gegenüber, der die vielheitlich-mannigfaltige Welt der Dinge an s für absolut beziehungslose Vielheit von völlig disparaten Wirkli keitselementen erklären würde: wir müssten wieder auf die zweifelhafte Existenz der beziehungsvollen Bewusstseinswirklichk hinweisen, um die *reelle* Unmöglichkeit seines Standpunkts ihm k zu machen, um ihm aber ihre *ideelle* Unmöglichkeit klar zu mach dazu sind wir noch nicht fähig, oder wenigstens nicht genüg fähig. Denn allerdings liesse sich einem solchen gegenüber dar hinweisen, dass unser Denken, so sehr dasselbe auch im allgemei befähigt sein mag, disparate Wirklichkeitsarten vorauszusetzen, d fühlt, dass diese disparaten Wirklichkeitsarten irgendwie miteinan in Beziehung stehen müssen, ohne sich von der Art und W dieser Beziehungen eine Rechenschaft geben zu können. Aber rade diese seine Unfähigkeit der Angabe dieser Beziehungen ma das Denken, über diesen Punkt zu schweigen, und die Doctrin vielheitlichen disparaten Welt von seinem allgemeinen Standpun aus noch ebenso gelten zu lassen, wie dasselbe unzweifelhaft nöthigt ist, dies in Bezug auf die ebeatische Doctrin zu thun.

Das Denken kann nun nicht länger auf diesem allgemei Standpunkte bleiben, welcher nur die Realität der Beziehungen der uns gegebenen Welt überhaupt feststellt, es muss weiter geh es muss diese gegebenen Beziehungen selbst so tief und eingehe

analysieren, dass ihm dadurch die Denknotwendigkeit dieser gegebenen Welt einleuchtend wird, und dass danach keine andere Welt überhaupt weder gegeben noch gedacht werden kann. Wir müssen nun fragen, ob die vielen numerischen und qualitativen Verschiedenheitsbeziehungen sich nicht letzten Endes auf einfache Formen zurückführen lassen, die als solche jene von uns gesuchten unbedingt-notwendigen Beziehungen sind. Was diese Frage bedeutet, kann nur ihre konkrete Auflösung selbst beleuchten, und deshalb gehen wir gleich zu derselben über.

Wir haben gesehen: von den vier Beziehungsarten, die unser Verstand vergleichend am Seienden ohne tiefere Reflexion vorfand, haben sich vor dieser tieferen Reflexion nur zwei als selbstständige erhalten: und diese zwei sind besondere Arten einer und derselben Gattung, der Verschiedenheitsbeziehung. Nun fragt es sich (um die allgemeine Frage noch einmal zu wiederholen), ob alle die einzelnen Verschiedenheitsbeziehungen, die wir am Seienden finden, sich nicht letzten Endes auf eine einzige einfache Form zurückführen lassen, oder ob sie nicht gleichsam völlig disparate Formen darstellen, die wunderbarerweise doch alle etwas Gemeinsames haben, ohne dass es uns gelänge, die eigenthümliche Natur dieses Gemeinsamen zu fassen. Nun wollen wir zunächst das Verschiedene der numerischen Verschiedenheitsbeziehung festzustellen versuchen. Zwei Objecte, die numerisch voneinander verschieden sind, können wir uns näher oder entfernter voneinander denken: wenn nun wirklich die numerische Verschiedenheit etwas Reales zwischen den beiden Objecten gleichsam in der Mitte Liegendes ist, so ist offenbar diese numerische Verschiedenheit als etwas anderes gedacht, wenn die Objecte näher und als etwas anderes wenn sie entfernter voneinander liegen. Es scheint zwar auf den ersten Blick, dass zwischen der Ortsverschiedenheit im Raume und der numerischen Verschiedenheit zweier Objecte gar kein Zusammenhang besteht, zwei Objecte sind zwei, mögen sie näher oder entfernter voneinander liegen. Dem ist aber nicht so. Zwei Objecte sind zwei, sind numerisch verschieden nur insofern, inwiefern sie zwei verschiedene Orte im Raume einnehmen, wenn diese Orte also näher zueinander liegen, ist auch ihre numerische Verschiedenheit gleichsam kleiner als wenn sie entfernter voneinander sind. Wenn wir also die numerische mit der Ortsverschiedenheit identificieren, so denken wir dabei auf den Ursprung der numerischen Verschiedenheit in der Ortsverschiedenheit, da Ortsverschiedenheit die numerische Verschiedenheit zweifellos bewirkt, obgleich, für sich betrachtet, zwei Objecte zwei sind, mögen sie näher oder entfernter

voneinander liegen. Wie wir bei der numerischen Verschiedenheit, insofern sie als Ortsverschiedenheit gefasst wird, verschiedene Grade entdecken, ebenso finden wir nun in Bezug auf die qualitative Verschiedenheit solche eigenthümliche Unterschiede. Wir fühlen, dass süss und schwarz doch anders voneinander verschieden sind, als etwa schwarz und weiss, oder süss und blau oder blau und schwarz, und wir fühlen, analog der grösseren oder der kleineren Ortsverschiedenheit (wir nennen diese Verschiedenheit Entfernung) zweier Objecte im Raume eine grössere oder kleinere Qualitätsverschiedenheit der Qualitäten selbst, wir fühlen, dass schwarz und weiss in einer weit engeren Gemeinschaft zueinander stehen, als schwarz und süss, und schwarz und süss in einer weit engeren Gemeinschaft, als schwarz und süss einerseits und Lust und Unlust zusammengenommen andererseits. Dies sind keine in die Sachen hineinprojicierten oder von dem Denken hinzugefügten Verhältnisse, sondern die in den Objecten selbst unmittelbar gefühlten und als solche von dem Denken anerkannten Verhältnisse. Wenn es unserem Denken nun gelingt alle diese verschiedenen Arten von qualitativen und numerischen Verschiedenheiten auf einfache Formen zurückzuführen, dann sind offenbar diese Formen die letzten im Seienden vorhandenen Beziehungen, und aus denselben wird sich dann das gesammte Gerüst des Seienden notwendigerweise construiren lassen.

Eine aufmerksamere Betrachtung der verschiedenen Ortsverschiedenheiten nun ergiebt, dass sie sich wirklich alle auf eine einzige vollkommen einfache Form zurückführen lassen. Zwei Objecte können wir uns beliebig weit voneinander entfernt denken, aber beliebig nahe nicht, wir gelangen schliesslich zu einer untersten Grenze, deren Dasein unserem Denken völlig einleuchtend und widerspruchslos erscheint: und das ist der Fall, wenn zwei Objecte so nahe nebeneinander zu stehen kommen, dass sie sich unmittelbar berühren und kein Object mehr zwischen einander zulassen. Wir fühlen, dass, wenn irgendwo so hier jene reale Beziehung der Verschiedenheit wirklich etwas unmittelbar reales und einfaches ist: wir denken uns auch alle anderen Beziehungen der Verschiedenheit, insofern wir dabei nur auf die reine Beziehung als solche achten, als völlig einfach und untheilbar, eine in sich theilbare und getheilte Beziehung können wir uns nicht denken, da wir dann eine weitere Beziehung denken müssten, die die Theile einer solchen Beziehung miteinander verbände u. s. w. in infinitum. Wir können uns eine Beziehung nur als etwas zwischen den realen Inhalten bestehendes denken, und nicht als eine Beziehung zwishen den Be-

ziehungen, und deshalb muss die Beziehung als eine absolut untheilbare Einheit gedacht werden. Nun aber in jenem Falle wo sich zwei Objecte, unmittelbar berühren, denken wir uns diese Beziehung auch wirklich als eine absolut einfache Einheit. Denn zwei Objecte die durch nichts, d. h. durch keinen realen dazwischenliegenden Inhalt voneinander getrennt sind, und doch voneinander reell geschieden sind, die *zwei* sind, können dies nur durch einen einfachen realen Trennungs- und Unterscheidungsact thun, sonst wäre ihre Getrenntheit für unser Denken ein absolutes Rätsel. Und in Wahrheit kann sich das Denken nicht dessen entschlagen, zwischen zwei getrennten und sich doch unmittelbar berührenden Gegenständen einen einfachen Trennungs- resp. Negationsact zu denken, durch den sie als *zwei* gesetzt und zugleich unmittelbar *nebeneinander* gesetzt sind. Es ist also klar, dass nur in diesem einfachsten Falle unser Denken wirklich genöthigt ist, wenn es die Zweiheit begreifen will, eine reale einfache wirkliche Beziehung zwischen den beiden Beziehungspunkten zu setzen. In den Fällen nun, wo zwei Objecte zwei sind, aber sich nicht unmittelbar berühren, denken wir uns eine zwischen den beiden liegende mit realem Inhalt erfüllte Strecke, die die beiden, analog jenem einfachen absolut inhaltslosen Acte der Berührung, voneinander trennt und zugleich verbindet. In Wahrheit, wenn unser Denken einmal sich diesen einfachen Fall der Beziehung aufmerksam betrachtet hat, so wird es dessen inne, dass zwischen zwei weit voneinander liegenden Objecten eigendlich kein einfacher Negationsact mehr liegt, da dieser als etwas einfaches ausdehnungslos ist und demnach nur zwischen zwei unmittelbar sich berührenden Objecten vorkommen kann und nicht zwischen zweien die sich nicht berühren, und doch ist unser Denken genöthigt eine Art von Beziehung zwischen diesen letzteren zu denken. Welche Art von Beziehung ist nun diese Beziehung? Offenbar ist sie nun jene einfache Beziehung nicht mehr, offenbar ist die Beziehung zwischen den beiden etwas zusammengesetztes, und offenbar sind die Theile dieser zusammengesetzten Beziehung jene einfachen zwei reale Inhalte unmittelbar voneinander trennenden Beziehungen. Auf die Weise ist aber unser Denken dann weiter genöthigt als Beziehungspunkte jener einfachen Beziehungen nur einfache absolut untheilbare reale Punkte anzuerkennen. Die Strecke, die zwischen zwei Objecten liegt und sie trennt, muss offenbar aus durch einfache Beziehungen voneinander unmittelbar getrennten Inhalten bestehen; diese einzelnen Inhalte können nicht zusammengesetzt sein, denn das hiesse dass sie nicht die durch einfache Beziehungen ge-

trennten Inhalte sind, sondern dass dies andere noch kleinere sin man muss also am Ende zu denjenigen gelangen, die nicht me zusammengesetzt, also absolut einfach sind. Ich will hiermit ni sagen, dass die Anzahl dieser einfachen Inhalte in jener trennend Strecke eine endliche sein müsse, sie kann provisorisch ganz w auch als eine unendliche gedacht werden. hier ist es und war nur notwendig festzustellen, dass, wenn wirklich eine durch l ziehungen gesetzte Vielheit besteht, dieselbe notwendigerweise a letzten einfachen Inhaltseinheiten bestehen muss, da Beziehung letzt Endes eine einfache Einheit sein muss. Gerade weil die Beziehu einfache Einheit sein muss, ist ganz ebenso wie jene zusammeng setzte Beziehung zwischen zwei entfernten Objecten schliessli sei es aus einer endlichen sei es aus einer unendlichen Anzahl v diesen einfachen Beziehungen bestehen muss, der reale Inhalt a letzten absolut untheilbaren Inhaltspunkten zusammengesetzt. I ist so klar wie nur irgend etwas in der Welt. Nun müssen je einfachen Beziehungen, aus denen jene zusammengesetzte Beziehu besteht, offenbar absolut voneinander unabhängig sein, denn je Beziehung geht unmittelbar als solche nur die beiden durch getrennten einfachen Einheiten an und keine anderen mehr, anderen sind eben durch andere Beziehungseinheiten getrennt u gesetzt. Dagegen kann ganz wohl die Abhängigkeit einer und d selben inhaltlichen Einheit von zwei (oder auch von mehrer einfachen Beziehungen gedacht werden, ja eine Vielheit von solch nebeneinander gegebenen einfachen Inhaltseinheiten kann nur du diese ihre Abhängigkeit von zwei (oder mehreren) Beziehungseinheit gesetzt werden. Demnach ist jene zusammengesetzte Beziehung eig tlich keine Beziehung in wahrem Sinne dieses Wortes mehr, da s Beziehung nur auf zwei Einheiten beziehen kann, jene zusamme gesetzte Beziehung ist demnach nur ein Ausdruck dafür, dass Inhaltseinheiten von zwei Beziehungen zugleich abhängig sein könn Jene gerade Strecke, durch die wir die Ortsverschiedenheiten zwe Objecte vorstellen, ist eben aus aneinander sich anreihenden real Punkten zusammengesetzt, von denen jede von zwei Beziehung zugleich abhängt, und jene Strecke ist umso grösser je me einfache Beziehungen auf diese Weise in derselben gesetzt si Wenn ich also zwei entfernte Gegenstände als numerich verschied denke, so denke ich keine einfache Verschiedenheitsbeziehung zw schen den beiden, sondern eine ganze Reihe von solchen, und Anzahl derselben in dieser Reihe macht jenen Untersehied der v schiedenen im Anfang als (unbestimmt) einfach gedachten numerisch

Verschiedenheitsbeziehungen aus. So haben wir also wirklich die verschiedenen numerischen Verschiedenheitsbeziehungen auf eine einzige einfache Form zurückgeführt, und jenes eigenthümliche Gemeinsame in denselben vollständig entdeckt und erklärt.

Und nun frage ich: diese einfachste Verschiedenheitsbeziehung der Quantität, auf die ich alle die vielen anderen zurückführe, ist sie selbst nur als ein blosses logisch-notwendiges Verhältniss zwischen den beiden sich unmittelbar berührenden Inhaltspunkten anzusehen, oder ist ihr nicht irgend eine Art von Realität beizulegen? Nun offenbar, wenn die einfache Verschiedenheitsbeziehung wirklich die beiden Beziehungsglieder trennt und sie verhindert in eins zusammenzufallen, so muss sie mehr sein als ein blosses rein formales Verhältniss, sie muss selbst real sein, um die beiden voneinander geschiedenen Inhaltspunkte wirklich und reell zu trennen. Ein rein formales Verhältniss vermag dies offenbar nicht zu thun, denn man müsste doch fragen, wie und auf welche Weise dasselbe es anstellt, eine solche wunderbare magische Trennungskraft auf die beiden Beziehungsglieder auszuüben. Man wird sagen: dadurch eben dass dieses rein formale Verhältniss eine logische Notwendigkeit darstellt. Aber ich habe schon im Anfang dieses Werkes und auch in der Erkenntnisslehre erklärt, dass ich an solche rein ideale logische Notwendigkeiten nicht glaube, und dass nur diejenige logische Notwendigkeit wirklich Notwendigkeit ist, die sich auf eine Realität in wahrem Sinne dieses Wortes stützt. Demnach kann auch jene einfache numerische Verschiedenheitsbeziehung nur als ein realer einfacher Trennungsact, als eine Realität besonderer von der Realität der qualitativ-quantitaven Beziehungsinhalte selbst toto-genere verschiedener Art gedacht werden, und nur wenn sie so als einfacher realer Negationsact aufgefasst wird, ist sie wirklich fähig, ein logisch-notwendiges Verhältniss zwischen den beiden Beziehungspunkten zu sein und darzustellen. Sobald wir die örtliche Verschiedenheitsbeziehung auf ihre allgemeinste und einfachste Form zurückführen, besteht keine Schwierigkeit mehr, diese einfache Verschiedenheitsbeziehung des Ortes als einen einfachen realen Negations- (resp. Trennungs-) act aufzufassen. Erst wenn wir denselben voraussetzen, wird uns begreiflich sein, woher und wie die numerisehe Vielheit und Verschiedenheit (gleicher Objecte) möglich ist: wir haben als Grund der Unmöglichkeit der beziehungslosen Welt nach dem Muster Herbart's angeführt, dass in diesem Falle sich die absolut einfachen Realen notwendigerweise unmittelbar berühreu müssten, da zwischen denselben gar nichts liegt und sie also als solche nicht mehr be-

beziehungslos wären. Jetzt müssen wir nun diesen Gedanken dahin ergänzen, dass ohne die einfachen trennenden Negationsacte zwischen den einfachen qualitativen Einheiten diese Einheiten nicht getrennt voneinander sein könnten, da sie ja dann durch das reine Nichts voneinander getrennt wären. Dem Nichts können wir aber ebensowenig eine trennende Kraft beilegen, wie dem rein formalen logischen Verhältniss (und zwar diesem nur deshalb nicht, weil es in Wahrheit jenes nichts selbst ist), wir müssen vielmehr annehmen, dass zwischen jenen einfachen qualitativen Realen reale trennende Acte bestehen müssen, um ihr Zusammenfallen zu verhindern, und dass demnach kein Zweifel mehr an der Realität derselben bestehen kann.

Ob sich nun dasselbe, was hier in Bezug auf die numerischen Verschiedenheitsbeziehungen ausgeführt wurde, nicht auch in Bezug auf die verschiedenen qualitativen Verschiedenheitsbeziehungen vollführen lasse? Wie wir die verschiedenen numerischen Verschiedenheitsbeziehungen der Entfernung auf das Mehr oder Minder der einfachen numerischen Verschiedenheitsbeziehungen in denselben zurückgeführt haben, so sollen wir versuchen, ebenso die verschiedenen Qualitätsbeziehungen auf das Mehr oder Minder einer einfachen Qualitätsbeziehung der Verschiedenheit zurückzuführen. Denn geradeso wie wir unmittelbar wahrnehmen, dass ein Gegenstand von dem anderen dadurch entfernter ist, das zwischen den beiden eine grössere Summe von realen Inhalten dazwischenkommt, geradeso fühlen wir dass zwei (ähnliche) Qualitäten voneinander desto verschiedener sind je mehr mittlere Qualitäten sich zwischen die beiden setzen können. Es besteht aber dabei doch ein gewaltiger Unterschied zwischen jener numerischen Ortsverschiedenheit und dieser qualitativen Verschiedenheit: in jenem ersten Falle können wir auch wirklich jede vorgestellte Entfernung durch einen realen Inhalt erfüllen, wir können uns sogar keine Entfernung zweier Objecte vorstellen, ohne zugleich diese Entfernung mit realem Inhalte zu erfüllen. Ganz anders steht es aber dabei mit der qualitativen Entfernung: wir fühlen unmittelbar, dass zwischen dem Süss und dem Schwarz eine grössere qualitative Verschiedenheit besteht als zwischen dem Schwarzen und dem Blauen, können aber weder die Zwischenglieder zwischen dem Süssen und dem Schwarzen noch diejenigen zwischen dem Schwarzen und dem Blauen herstellen und ebenso continuirlich von der einen zu der anderen Qualität hinübergehen, wie wir von dem einen realen Objecte zu dem anderen durch den dazwischenliegenden realen Inhalt im Raume gelangen können. Und doch trotz dieser

fehlenden Glieder sind wir dessen absolut gewiss, dass jene Stufenunterschiede der qualitativen Verschiedenheiten bestehen. Worauf gründet sich nun diese unsere instinctive Annahme? Offenbar müssen wir ganz ebenso wie wir bei der Ortsverschiedenheit auf einen einfachen Fall stossen, der jene Zurückführung derselben auf die einfachste Form ermöglicht, auch hier auf einen einfachen Fall stossen, der die Zurückführung auf eine entsprechende einfache Form ebenso ermöglicht. Und thatsächlich ist dem so. In unserer unmittelbaren Erfahrung giebt es Qualitäten, die so voneinander abhängen, dass man sie unmittelbar als durch einfache Verschiedenheitsbeziehung entstanden erkennen muss. Der typische Fall in dieser Hinsicht stellt das Gefühl der Lust und Unlust dar. Diese beiden entgegengesetzten und einzigen Gefühlsqualitäten verhalten sich so zueinander, dass die eine das directe Gegentheil der anderen ist: Lust ist dasjenige was uns beglückt, und was den Werth unseres Ich-daseins bestimmt, Unlust dasjenige was uns unglücklich macht, was unser Dasein werthlos und zwar positiv werthlos macht. Beide, sowohl Lust als Unlust, sind positive Bewusstseinsinhalte, weder ist Lust die blose Abwesenheit der Unlust (Abwesenheit ist nichts und Lust ist etwas) noch umgekehrt, in beiden wird eine selbstständige eigenthümliche positive Qualität gefühlt und zugleich fühlt man unmittelbar, mit einer Deutlichkeit die ihresgleichen nicht hat, dass diese beiden Qualitäten absolute Gegensätze sind, man fühlt die Gegenwart dieses Gegensatzes so deutlich, dass, selbst wenn es gelänge bei den anderen Qualitäten ein anderes Princip und nicht die Negationsbeziehung zu entdecken, in diesem Falle doch einzig und allein dieses Princip anzuerkennen wäre. Das wird jeder anerkennen müssen, der unbefangen und von vorgefassten Meinungen nicht beirrt, seine unmittelbare Erfahrung zu beobachten weiss, er wird anerkennen, dass hier von keinen Mittelstufen zwischen Lust und Schmerz mehr die Rede sein kann, dass Lust und Unlust wirklich absolute Gegensätze sind. Mit einer fast ebenso grossen Deutlichkeit spricht sich dasselbe Princip aus bei dem Vergleich von weiss und schwarz. Diese Qualitäten fassen wir als zwei unmittelbar miteinander zusammenhängende und aneinander gebundene Qualitäten auf, wir können uns das Schwarze nicht denken ohne zugleich das Weisse als sein Correlatum zu denken, und zwar ist dieses Gebundsein keine blosse Association, die etwa davon herrührt, dass weiss und schwarz in einem und demselben Sinnesorgan entstehen oder etwa davon, dass die Dunkelheit das hell-weisse Licht aufhebt und umgekehrt, sondern wir fassen diese Qualitäten selbst als solche, ganz abgesehen davon ob sie in ihrem Vorkommen sich ausschliessen

oder nicht, als etwas was voneinander unmittelbar abhängt, diese notwendige Abhängigkeit der Qualität des Weissen von derjenigen des Schwarzen ist eine unmittelbare Intuition unseres Bewusstseins die sich weiter nicht erklären lässt, die einfach als solche von jedem anerkannt (und erkannt) werden muss, dessen Aufmerksamkeit darauf gelenkt wird. Was ist es nun, das diese Abhängigkeit zu einer so unmittelbaren macht? Analysieren wir den Intuitiosnact selber, werden wir dessen inne, was diese Intuition von ihrer inhaltlichen Seite aussagt. Nun, wenn wir darauf Acht geben, so entdecken wir, dass es die Negation, das unmittelbare Sich-scheiden, Sich-trennen dieser Qualitäten ist, was ihre Gnmeinschaft zu einer so notwendigen macht. Nur deshalb weil der Scheidungsact, durch den weiss und schwarz, und Lust nnd Unlust geschieden sind, durch den sie voneinander getrennt verschieden sind, ein absolut einfacher ist, fassen wir ihre Zusammengehörigkeit als eine unmittelbare: wir fassen das Weisse unmittelbar als etwas dem Schwarzen entgegengesetztes, wir fassen beide als etwas was durch einen *einfachen untheilbaren* Act der Scheidung entstanden ist In dem Weissen ist die Qualität des Schwarzen, in dem Schwarzen ist die Qualität des Weissen, in der Lust die Qualität der Unlust in der Unlust die Qualität der Lust so absolut aufgehoben, dass man sie direkt als Gegensätze empfindet, und zwar fühlt man, dass diese Aufhebung dadurch zu Stande gekommen, dass beide Qualitäten durch einen und denselben Scheidungs- und Unterscheidungsact entstanden sind: durch Scheidung, durch Trennung sind eben jene zwei verschiedene Qualitäten entstanden, und zwar bezieht sich diese Scheidung diese Trennung auf die Qualität selbst und nicht auf das reine quantitative Moment dass sie als *zwei* gegeben sind, jene Scheidung bewirkt eine Scheidung der Qualität selbst, die dadurch nicht mehr eine ist, sondern zu zwei Qualitäten wird, jene Scheidung bewirkt eben dass in der einen Qualität nichts von derjenigen der anderen vorhanden ist, dass die eine die Aufhebung, die Negation der anderen bedeutet, der Trennungsact, der Scheidungsact ist eben zugleich Aufhebungs-, Unterscheidungs-, Negationsact.

Jene Stufenfolge der Verschiedenheiten hat also eine Grenze in dem einfachen Verschiedenheitsverhältniss des Weissen mit dem Schwarzen, der Lust mit der Unlust. Es besteht also wirklich eine Thatsache in der unmittelbaren Erfahrung, die uns berechtigt, jene fehlenden Glieder zwischen zwei qualitativ entfernten Bewusstseinsinhalten als an sich möglich und vorhanden zu denken, und so jene unsere instinctiv gefühlte Annahme einer Stufenfolge der qualitativen Verschiedenheiten zu rechtfertigen. Wie wir bei den numerischen

Verschiedenheitsbeziehungen schliesslich auf eine absolut einfache kommen, ebenso kommen wir bei den qualitativen Verschiedenheiten auf eine einfache, die einen ebenso absolut untheilbaren Trennungs- und Unterscheidungsact darstellt, wie es derjenige ist, der im Gebiete der Quantität zwei quantitative Einheiten unmittelbar voneinander trennt. Wenn weiss und schwarz zwei durch einen einfachen Beziehungsact getrennte Qualitäten sind, so besteht zwischen dem Schwarzen und dem Süssen kein solcher einfacher Unterscheidungsact mehr, aber wir haben Recht zu schliessen, dass es zwischen ihnen Mittelglieder giebt, von denen jedes von dem anderen durch einen Negationsact getrennt ist, und dass man durch diese Mittelglieder lückenlos von dem Schwarzen zum Süssen gelangen könnte. Niemand hat bisher die allgemeine Denkmöglichkeit solcher Zwischenglieder in Erwägung gezogen, alle haben z. B. süss und schwarz für absolut „disparate" Qualitäten erklärt, die absolut keine Beziehnngsgemeinschaft darstellen, und doch erkennt jeder andererseits, dass süss und schwarz verglichen mit Lust und Unlust in eine und dieselbe Klasse gehören, nämlich im Unterschied von diesen Gefühlsqualitäten Empfindungsqualitäten sind. Wie wir uns nämlich schwarz und weiss unmittelbar als durch einen einfachen Negationsact getrennt denken, und wie wir Lust und Unlust uns ebenso durch einen einfachen Negationsact getrennt denken, ebenso denken wir uns Gefühl und Empfindung durch einen einfachen Negationsact getrennt. Lust als *Gefühl* und schwarz als *Empfindung* sind nicht disparat, sie sind einander ebenso entgegengesetzt wie Lust und Unlust einander entgegengesetzt sind. Wie ein einfacher Punkt in einer geraden Linie von zwei einfachen quantitativen Negationsbeziehungen abhängt, ebenso hängt hier Lust durch eine Negationsbeziehung von der Unlust, und durch die andere von der Empfindung ab. Trotz vielfacher Analogien der Verschiedenheitsbeziehung qualitativer und derjenigen numerischer Natur, bestehen doch zwischen beiden auch grosse Unterschiede, von denen wir den Hauptunterschied genügsam hervorgehoben haben, und die anderen Unterschiede für jetzt nicht näher betrachten wollen, da sie nur in einer eingehenden Untersuchung der qualitativen Negationsbeziehung und der Qualitätskategorie überhaupt zur Sprache gebracht werden können. Jetzt nur noch eines, was durchaus notwendig ist zur Vertheidigung der Thatsache jener einfachen Qualitätsnegation. Als wir voraussetzten, dass weiss und schwarz durch einen einfachen qualitativen Trennungsact voneinander getrennt sind, haben wir geflissentlich von der Thatsache abgesehen, dass es zwischen beiden Übergangsqualitäten giebt, die doch, wenn jener einfache Negationsact besteht,

ebensowenig bestehen können, wie zwischen zwei unmittelbar voneinander getrennten und einander berührenden Inhaltspunkten kein mittlerer Inhaltspunkt mehr vorhanden ist, der zwischen beiden läge. Nun, jene Übergangsqualitäten bestehen wirklich, nur brauchen sie nicht einfache Qualitäten zu sein: da es neben verschiedenen Qualitäten auch gleiche giebt, so ist eine Mischung vieler gleichen Theile entgegengesetzter Qualitäten gar nichts unmögliches. Die Qualitäten des Grau (oder diejenigen des Orange zwischen Roth und Gelb) können ganz wohl als aus einfachen Inhaltspunkten beider Qualitäten bestehend gedacht werden, und die Menge dieser kleinsten Theile einer der beiden entgegengesetzten Qualitäten wird speciell bestimmen, ob die Übergangsqualität mehr der einen oder der anderen entgegengesetzten Qualität ähnlich sein wird. Diese Übergangsqualitäten bilden also wirklich keine Schwierigkeit gegen die einfache qualitative Negationsbeziehung, sobald man die Thatsache gleicher Qualitätsinhalte zulässt, und wer könnte doch diese so einleuchtende Thatsache wegläugnen.

So leicht und ohne jede besondere Schwierigkeit es nun auch war, die einfache Verschiedenheitsbeziehung des Ortes für einen realen Act von besonderer eigenthümlicher Realitätsart zu erklären, so schwierig und fasst unmöglich erscheint es uns nun, die einfache Verschiedenheitsbeziehung der Qualität in allen den angeführten Fällen ebenso für einen realen Negationsact besonderer Art zu erklären. Wären Lust und Unlust immer in unserem Bewusstsein so unmittelbar zusammen miteinander gegeben, wie es die beiden einfachen quantitativen Einheiten sind, die wir in dem Wahrnehmungsinhalte als vorhanden voraussetzen (über die Wahrnehmung der einfachen Inhaltspunkte der Empfindung, s. II. Ab. 1. Unterab. 2. Kap.) dann wäre keine Schwierigkeit vorhanden, den einfachen Negationsact, der sie trennt, für einen realen zu erklären. Aber sie sind weder immer zusammen und zugleich gegeben, noch sind sie vielleicht überhaupt zugleich im Bewusstsein gegeben, so dass der einfache Negationsact, den wir zwischen den beiden fühlen, nicht mehr ein simultaner, sondern ein successiver ist. Nun, wir werden in dem nächsten Kapitel zeigen, dass sich der successive Negationsact von dem simultanen Negationsacte in einem wichtigen Punkte unterscheidet, dass er aber eine unmittelbare Verwandlung desselben darstellt, so dass obgleich auch er etwas reales ist, diese Realität doch wesentlich von der Realität des simultanen Negationsactes abweicht. Stellt nun der successive Negationsact eine blosse Verwandlung des simultanen dar, dann muss offenbar jener successive Negationsact, der

die beiden Gefühlsqualitäten voneinander trennt, einen simultanen Act voraussetzen, aus dem er entstanden. Nun, in diesem allgemeinen Theile der Ontologie können wir gar nicht darüber entscheiden, aus welchem simultanen Negationsact der successive zwei Qualitäten trennente Act stammt (denn es ist vielleicht ein quantitativer Negationsact aus dem er stammt). Wir können nur soviel mit absoluter Sicherheit feststellen, dass es simultane Negationsacte der Qualität geben muss, und wenn wir uns in unserer unmittelbaren Erfahrung darnach umsehen, wo diese Thatsache unzweifelhaft anzutreffen ist, so werden wir sie in dem Gegensatzverhältniss von Empfindung und Gefühl entdecken. Empfindung und Gefühl als zwei gegensätzliche Klassenbegriffe, die viele verschiedene Arten in sich umfassen, sind immer in unserem Bewusstsein *zugleich* und unmittelbar *aneinander gebunden* gegeben: es muss also hier der gesuchte einfache reale simultane Negationsact vorhanden sein, der diese beiden Qualitäten setzt und voneinander trennt und der sie zugleich verhindert dass sie in eins zusammenfallen, und dieser Act muss ebenso als eine Realität besonderer Art anerkannt werden, wie es mit jenem einfachen Negationsact der Quantität der Fall ist.

Eine eingehende Untersuchung (die erst im zweiten Unterabschnitte des zweiten Abschnitts geliefert werden wird) wird nun zeigen, dass dieser simultane Negationsact überhaupt unaufhebbar ist, und dass jene successiven Negationsacte, die einzelne Bewusstseinsqualitäten (Lust und Unlust, weiss und schwarz) voneinander trennen, nicht mehr qualitativer sondern quantitativer Natur sind, was davon herrührt, dass die einzelnen Qualitäten nicht mehr Produkte rein qualitativer sondern qualitativer und quantitativer Negationsacte sind. Daraus kann man ersehen, dass, wie schwierig die Zurückführung der vielen qualitativen Verschiedenheitsbeziehungen auf eine einfache auch ist, dieselbe logisch doch vollkommen gelingt und nur in Bezug auf die Realität des einfachen Negationsactes nicht mehr so einfach ist wie es bei der Ortsverschiedenheit der Fall ist, aber auch hier principiell möglich und unzweifelhaft festzustellen ist.

Wir haben die qualitativen Verschiedenheitsbeziehungen auf die einfache Negationsbeziehung nur dadurch zurückgeführt, dass wir die Mittelstufen, die zwischen zwei entgegengesetzten Qualitäten liegen, für Mischungen der qualitativ gleichen Bestandtheile dieser entgegengesetzten Qualitäten erklärt haben. Wir müssen uns nun etwas auf dieser letzten Thatsache der gleichen Qualitäten aufhalten, da sie von so fundamentaler Bedeutung für unsere Statuirung der einfachen Qualitätsbeziehung ist. Wir haben früher zu zeigen versucht, wie die

Gleichheitsbeziehung keine eigentliche Beziehung ist, jetzt, wo wir die Verschiedenheitsbeziehung auf die einfache Negationsbeziehung zurückgeführt haben, wird uns diese Beziehungslosigkeit der Gleichheitsbeziehung so klar erscheinen, dass wir keinen Zweifel mehr daran tragen können. Wenn es einen einfachen Negationsact der Qualität giebt, so kann dieser Act nur so gedacht werden, dass er wirklich bestimmend auf seine beiden Beziehungsglieder wirkt, dass diese beiden durch ihn so untereinander verbunden sind, dass das Eine sich ohne das Andere nicht denken lässt. Die einfache qualitative Negationsbeziehung muss eine wirkliche Bestimmungsbeziehung sein und gerade dadurch wird sie sich auch von jener im Anfang von dem Denken festgehaltenen ganz allgemeinen Verschiedenheitsbeziehung unterscheiden, die nur ganz allgemein die Abhängigkeit der beiden Qualitäten voneinander, insofern und solange sie voneinander verschieden sind, bedeutete. Dagegen ist die Abhängigkeit der beiden durch den einfachen Negationsact voneinander getrennten Glieder eine weit engere: die eine Qualität kann ich mir nicht ohne die andere denken, und wenn ich die eine als aufgehoben denke, so muss ich sogleich auch die andere aufheben, da ich durch die Aufhebung der einen schon den ihnen beiden gemeinsamen einfachen Negationsact aufgehoben habe, oder, besser gesagt, ich vermag die eine von beiden nur dadurch aufheben, dass ich den Negationsact, durch den sie gesetzt ist, aufhebe, dadurch hebe ich aber zugleich auch die andere Qualität auf.* Ein solches bedingendes Abhängigkeitsverhältniss der Beziehungspunkte in der sogenannten Gleichheitsbeziehung besteht aber nicht: denn dass ausser einer bestimmten Qualität z. B. des Rothen, ein anderes Exemplar derselben Qualität gegeben sei, das ist keine aus der Setzung jener ersten Qualität

* In der allgemeinen Verschiedenheitsbeziehung bestand eine solche Existenzabhängigkeit der beiden Glieder deshalb nicht, weil diese Verschiedenheitsbeziehung nicht als die einfache Negation gedacht wurde, sondern als etwas, das, ohne selbst etwas bestimmtes zu sein, doch wunderbarerweise die beiden voneinander verschiedenen Glieder trennte und verband. Dagegen jetzt, wo wir die quantitative Verschiedenheitsbeziehung einerseits auf einfache Negationsacte der Quantität und die qualitative Verschiedenheit auf einfache Negationsacte der Qualität zurückgeführt haben, denken wir uns diese Negationsacte als etwas was unmittelbar die voneinander getrennten Glieder trennt und verbindet. Daher kommt es, dass in dem ersten Falle die Verschiedenheitsbeziehung nur die hypotetische Notwendigkeit der Beziehung d. h. der gleichzeitigen Setzung und Aufhebung der beiden Glieder erfordert, während hier diese Abhängigkeit zu einer absoluten wird. Die Unbegreiflichkeit, wieso es dieser rein formale Negationsact anstellen soll, die beiden Beziehungsglieder absolut abhängig voneinander zu machen, nöthigt uns dann weiter, denselben durch einen realen Negationsact zu ersetzen.

folgende Notwendigkeit. Jene erste Qualität des Rothen ist ja schon durch sich selbst vollkommen bestimmt, sie braucht zu ihrer Setzung keine ebensolche ausser ihr liegende Qualität, wenn eine Qualität durch eine andere bestimmt werden soll, so kann diese andere nur die entgegengesetzte sein, nicht die gleiche, da die gleiche Qualität doch nichts neues mit sich bringt, was sie etwa jener ersten Qualität hinzufügte, wodurch diese ergänzt werden müsste, um bestehen zu können. So ist also wahrlich die Gleichheitsbeziehung keine Bestimmungsbeziehung, und da nur Bestimmungsbeziehung in Wahrheit reelle Beziehung ist, so ist die Gleichheitsbeziehung eben gar keine Beziehung, nichts was wirklich zwischen gleichen Qualitäten bestünde. Die Thatsache der gleichen Qualitäten, da sie nicht aus einer besonderen reellen Greichheitsbeziehung stammen kann, kann nur als aus der numerischen Verschiedenheitsbeziehung stammend gedacht werden, wie wir dies früher ausgeführt haben und woran wir jetzt, nachdem wir die einfache numerische Negationsbeziehung nachgewiesen haben, nicht mehr zweifeln können.

So also erweist sich das Negationsprincip wirklich als das allgemeine Weltprincip, das fähig ist, die Wirklichkeit begreiflich zu machen, das Grundgerüst des Seienden lässt sich aus diesem Princip unzweifelhaft deducieren. Und damit ist unser Problem der beziehungslosen resp. der beziehungsvollen Welt principiell aufgelöst, und die positive Möglichkeit der beziehungsvollen Welt nachgewiesen. Logisch lässt sich diese principielle Auflösung folgendermassen ausdrücken. Führt sich die Verschiedenheitsbeziehung auf die einfache Trennungs- resp. Negationsbeziehung zurück, so führt sich auch der Verschiedenheitssatz A ist verschieden von B auf den Negationssatz A ist nicht B zurück, und dieses *nicht* bedeutet nicht mehr die Verschiedenheit überhaupt, es bedeutet den direkten einfachen Gegensatz. Wie nur diejenigen Dinge gleich sind, die jede Spur von Verschiedenheit in sich ausschliessen (also nur zwei Exemplare eines und desselben Dinges), so sind ebenso nur diejenigen Dinge eigentlich verschieden, deren Verschiedenheit eine vollständige jede Ähnlichkeit total ausschliessende ist. Dass dies in jedem Falle sein muss, sei es, dass man sich nur zwei Dinge in der Welt oder mehrere denkt, ist klar: denn wären nur zwei verschiedene Dinge in der Welt vorhanden, so müssten sie offenbar vollständig voneinander verschieden sein, wenn sie als einfache Qualitäten gedacht werden, da man aus ihrer Ähnlichkeit schon auf eine Zusammengesetztheit derselben aus einfacheren Qualitäten schliessen würde, da nur dasjenige ähnlich sein kann, was theilweise ähnlich und theilweise verschieden ist.

also etwas zusammengesetztes ist. Besteht aber ursprünglich eine Vielheit verschiedener Dinge, so muss sich die Stufenfolge ihrer Verschiedenheiten, wenn dabei jede Ähnlichkeit der verschiedenen Qualitäten ausgeschlossen ist, letzten Endes auf eine einfache Gegensatzverschiedenheit zurückführen, es muss also letzten Endes doch eine einfache Verschiedenheitsbeziehung bestehen. Wie man also sieht, ist der Negationssatz A ist nicht B wirklich das allgemeine und allumfassende Weltprincip, ein Weltprincip, dass in seinen beiden Gestaltungen der numerischen und der qualitativen Negation fähig ist, uns die gesammte Vielheit und Mannigfaltigkeit der Dinge zu erklären, mit dem vollständigen Ausschluss der selbstständigen Geltung des Identitätssatzes. Dieser Satz drückt nun zugleich auch den Satz vom Grunde in seiner Vollständigkeit aus. Der allgemeine Verschiedenheitssatz hat die Abhängigkeit der beiden Beziehungsglieder nur hypotetisch ausgedrückt; der Negationssatz aber drückt die unbedingte Abhängigkeit der beiden Beziesungsglieder voneinander aus und erst dadurch ist auch der Satz vom Grunde, der die absolute Abhängigkeit der Beziehungsglieder in der Welt fordert, zur Notwendigkeit erhoben. Und umgekehrt, aus der Notwendigkeit des Satzes vom Grunde lässt sich schliessen, dass sich die Verschiedenheitsbeziehung auf die Negationsbeziehung zurückführen lassen muss, da erst diese letztere die Abhängigkeit der Beziehungsglieder voneinander zu einer unbedingten und notwendigen macht, und dadurch erst auch die Notwendigkeit der Beziehung im Seienden statuiert ist. Wenn wir uns wirklich nur eine beziehungsvolle Welt denken können, und wenn Verschiedenheit die einzige wahrhafte Beziehung ist und sein kann, so muss sich diese Verschiedenheitsbeziehung letzten Endes auf die Negationsbeziehung zurückführen, da nur die einfache Negationsbeziehung die notwendige Abhängigkeit der Beziehungsglieder und dadurch die Notwendigkeit der Beziehung überhaupt garantiert. So ist also der Satz vom Grunde mit dem Negationssatze zugleich und notwendig gesetzt, beide Sätze verhalten sich zueinander wie Inhalt und Form, der Negationssatz drückt die Bestimmtheit der Beziehung aus, der Satz vom Grunde dagegen drückt die Existenz der Beziehung als solcher, drückt die Thatsache der Beziehung überhaupt aus. Und wie überall, so sind auch hier Existenz und Essenz eigentlich untrennbar, und es lässt sich in Wahrheit die notwendige Beziehung nicht anders denn als die Negationsbeziehung denken, so dass der Satz vom Grunde in sich schon den Negationssatz involviert, so dass der Satz vom Grunde schliesslich der allgemeinste und einzige Ausdruck unseres Denkens

überhaupt ist. Damit nun wird auch jene im Anfang gemachte Unterscheidung der allgemeinen und der speciellen Gestalt des Satzes vom Grunde hinfällig. Führt sich die allgemeine Verschiedenheitsbeziehung auf die einfache Negationsbeziehung zurück, so führt sich auch die allgemeine hypotetische Abhängigkeitsbeziehung auf die einfache unbedingte Abhängigkeitsbeziehung zurück, und der Satz vom Grunde hat nur noch logische Bedeutung als konkreter Ausdruk der unbedingten Abhängigkeit, wodurch er wirklich das allgemeine Denkgesetzt, in dem wahren Sinne des Wortes allgemein, wird.*

Dieses Resultat nun befähigt uns die Unmöglichkeit der beziehungslosen Welt endgiltig zu beweisen. Schon vom allgemeinen Standpunkte des Denkens aus war der Herbart'sche Standpunkt der vielen mannigfaltigen einfachen Qualitäten widerlegt, während die beiden übrigen Formen der beziehungslosen Welt, die eleatische des einen einfachen realen Wesens und diejenige einer Welt der vielen absolut disparaten Elemente, von diesem allgemeinen Standpunkte des Denkens aus allerdings nicht widerlegbar waren, doch aber als zur Erklärung der empirischen Wirklichkeit gänzlich unzulängliche metaphysische Voraussetzungen charakterisiert wurden. Aber dem exacten Metaphysiker genügt diese Discrepanz einer metaphysischen Doctrin mit der empirischen Wirklichkeit, um sie als falsche zu erkennen, nicht, er muss sie direkt, aus letzten Denkprincipien (die allerdings letzten Endes nichts sind und sein können als die letzten funda-

*) Leibniz, der zum ersten Male die Selbstständigkeit und Eigenthümlichkeit des Satzes von Grunde anderen Denkgesetzen gegenüber erkannt hat, hat ihm nicht diese centrale Stellung im Denken angewiesen, den Identitätssatz A=A hat er als das eigentliche Denkgesetz betrachtet. Bekanntlich hat Leibniz neben dem Princip der Identität noch ein zweites grundlegendes Princip aufgestellt, das sogenannte principium identitatis indiscernibilium. Dieses Princip nun ist bei Leibniz eine direkte denknotwendige Folge des Identitätssatzes. Der Identitätssatz A=A drückt aus, dass jedes Ding mit sich selbst identisch ist, Leibniz folgert nun unmittelbar daraus, dass es nur mit sich selbst identisch sein kann, und von jedem anderen Dinge verschieden. Offenbar stellt sich diese Folgerung dem Leibniz nur deshalb als denknotwendig dar, indem er dabei meint, dass die Identitätsbeziehung, als reflexive Beziehung, nur einen einzigen Beziehungspunkt hat, sich also nicht zugleich auf einen anderen Beziehungspunkt beziehen kann. Leibniz folgert ganz richtig, dass, wenn die Gleichheitsbeziehung besteht, sie sich nur auf einen und denselben Beziehungspunkt beziehen muss, und dass sie zwischen zwei Dingen nicht bestehen kann, dass demnach zwei gleiche Dinge, wenn sie Product der Gleichheitsbeziehung wären, in eins zusammenfallen müssten. Nur dass Leibniz aus den Augen verliert, dass, obgleich Gleichheitsbeziehung als Beziehung zwischen zwei gleichen Dingen nicht möglich ist, doch eine andere Beziehung zwischen denselben möglich und denkbar ist, und das ist die Beziehung der numerischen Verschiedenheit. Leibniz verliert gänzlich die Möglichkeit dieser Beziehung aus den Augen, und so folgert er nur die Möglichkeit der qualitativen Verschiedenheitsbeziehung,

mentalen Thatsachen jener empirischen Wirklichkeit selbst) widerlegen. Nun, unsere Zurückführung der Verschiedenheitsbeziehung auf die einfache Negationbeziehung und der Nachweiss der unbedingten Notwendigkeit der letzteren setzt uns in den Stand, diese Forderung der exacten Metaphysik auch zu erfüllen. Wir wollen zunächst den eleatischen Standpunkt der Kritik unterwerfen, und zeigen, wie seine Grundvoraussetzung absolut undenkbar ist. Wir müssen hier nun gleich hervorheben, dass der eleatische Gedanke den Gedanken der beziehungslosen Welt viel consequenter zum Ausdruck bringt, als die beiden übrigen Doctrinen: sobald Vielheit und Mannigfaligkeit der beziehungslosen Wesen vorausgesetzt wird, verfällt man rettungslos der Verschiedenheitsbeziehung in die Arme und eine solche Welt hört auf, beziehungslos zu sein. Dagegen wenn ein einziges Wesen vorausgesetzt wird, ist wirklich alle Beziehung aus der Welt fort und die beziehungslose Welt steht in ihrer Vollkommenheit da.

Nun ist zu fragen: kann das eine einzige einfache Wesen wirklich existieren? Das einfache Wesen der Eleaten ist zwar ohne Qualität (und in diesem Punkte sind die Eleaten Herbart überlegen), aber es ist schon quantitativ geformt, weil es eine einfache untheilbare Einheit darstellt. Soll das beziehungslose Wesen wirklich beziehungslos sein, so muss es ganz ebenso die quantitative wie die qualitative Bestimmtheit ausschliessen. Denn dass die quantitative Bestimmung von der qualitativen wirklich zu unterscheiden ist, ersieht man

wodurch er so zu seinem Princip der notwendigen qualitativen Verschiedenheit zweier numerisch verschiedener Objecte gelangt. Leibniz hat sich nun aber dabei die eigenthümliche Natur der Beziehung gar nicht zum Bewusstsein gebracht, er hat sich nicht zum Bewusstsein gebracht, dass jede Beziehung, wenn sie wirklich als reelle Beziehung gelten soll und nicht als eine blosse „subjective Zuthat" des Denkens, als eine absolut einfache Einheit gedacht werden muss, welche nun ihrerseits die Einfachheit der Beziehungspunkte fordert. Nun, sobald sie so gedacht wird, lässt sich leicht nachweisen, dass ein continuierlicher Übergang der einen Qualität in die andere nicht möglich ist. Leibniz denkt sich die qualitative Beziehung, da bei ihm durch dieselbe erst quantitative Unterschiede gesetzt werden, ganz so, wie man sich diese numerischen Beziehungen gewöhnlich denkt. Er wendet den Begriff des Unendlich-kleinen auf dieselbe, und schliesst dadurch den d i r e k t e n Gegensatzunterschied zwischen zwei Qualitäten vollständig aus, indem er zwischen zwei entgegengesetzte Qualitäten eine unendlich grosse Menge von sich voneinander in unendlich kleinen Graden unterscheidenden Mittelgliedern hineinschiebt. Nun, dies ist völlig unmöglich, und widerspricht dem Wesen der qualitativen Beziehung. Wir konnten uns zwischen zweien nicht unmittelbar nebeneinander liegenden Inhaltspunkten eine unendliche Anzahl von quantitativen Negationsacten denken, aber wie wir hier schliesslich auf eine absolut einfache Beziehung gelangten, so müssen wir ebenfalls bei der Qualität schliesslich auf einen einfachen Negationsact gelangen, möge die Anzahl der zwischen zweien Qualitäten liegenden Mittelglieder eine unendliche sein. Die höchste und die niedrigste Monade

daraus, dass die Einfachheit im qualitativen Sinne ganz gut von derjenigen im quantitativen zu unterscheiden ist: die Einfachheit der Qualität im qualitativen Sinne bedeutet die Einzigkeit und Reinheit der einen Qualität in Bezug auf die anderen von ihr verschiedenen, die Einfachheit im quantitativen Sinne dagegen bedeutet die Abwesenheit der quantitativen Vielheit in einer und derselben Qualität (das Fehlen der vielen gleichen Qualitäten). Setzen wir aber einmal voraus, Herbart hätte Recht dass das beziehungslose Wesen diese beiden Bestimmungen an sich hat, dann ist eben durch das Anerkennen dieser beiden Bestimmungen in dem einen Wesen schon etwas da was die Vielheit und Verschiedenheit in dasselbe setzt und damit die Beziehungslosigkeit des einfachen Wesens aufhebt. Setzt man aber voraus, dass die Eleaten Recht haben, wenn sie nur die quantitative Bestimmtheit dem einen Wesen zuschreiben, so müssen wir fragen, ob die Bestimmtheit der einfachen Einheit bestehen kann, ohne Glied einer quantitativen Vielheit zu sein, und wir werden sogleich einsehen, dass dies nicht möglich ist, sobald wir uns erinnern, dass die numerische Verschiedenheitsbeziehung sich auf die einfache numerische Negationsbeziehung zurückführt. Wenn die numerische Negationsbeziehung mit unbedingter Notwendigkeit fordert, dass die eine quantitative einfache Einheit nur zusammen mit der anderen bestehen kann, so kann das einfache Wesen als einfache numerische Einheit nur als Beziehungspunkt der Negationsbeziehung gedacht

(jede Monade soll nach Leibniz eine einfache Qualität darstellen) bei Leibniz sollen absolute Gegensätze sein (die eine absolut bewusst, die andere absolut unbewusst, jene absolut bewusster, diese absolut unbewusster Geist), und zwischen diesen Gegensätzen eine unendliche Anzahl von Mittelgliedern liegen. Nun muss Leibniz selbst anerkennen, dass die Verschiedenheitsacte, durch die zwei nächste (d. h. qualitativ nächste) Monaden getrennt sind, absolut einfache Acte sind, und es fragt sich nur noch, ob sich dieser einfache Negationsact anders denken lässt, denn als ein Gegensatzact. Die beiden durch einen einfachen Negationsact getrennten Qualitäten unserer unmittelbaren Erfahrung stellen absolute Gegensätze dar (weiss-schwarz, Lust-Unlust, Empfindung-Gefühl), geradeso wie jene zwei Endglieder bei Leibniz absolute qualitative Gegensätze darstellen. Und wenn man die unmittelbare Erfahrung — die doch die letzte Instanz für alle unsere auch die abstraktesten Begriffe ist — dabei ausser Acht liesse, so könnte man fragen, wie doch jene beiden durch den einfachen Negationsact getrennten Monadenqualitäten zu denken wären? Leibniz denkt sich offenbar, dass sie sich durch eine besondere Färbung der Bewusstheit voneinander unterscheiden: aber dadurch ist doch kein qualitativer Unterschied gesetzt, da Stufen der Bewusstheit eben quantitative Stufen einer und derselben Qualität bezeichnen, nichts anderes als die Intensitätsstufen dieser Qualität sind. Indem Leibniz also die Quantitätsunterschiede auf die qualitativen zurückführen will, bemerkt er nicht, wie er eigentlich qualitative Unterschiede auf die quantitativen zurückführt. Wenn nun die letzten Negationsacte notwendigerweise Gegensatzacte sein müssen (sonst führt sich der qualitative auf den rein quantita-

werden und kann somit *für sich allein* nicht bestehen. Dasselbe würde auch für seine qualitative Bestimmtheit gelten, wenn es dieselbe hätte: auch diese könnte nur durch die qualitative Negationsbeziehung gesetzt werden und könnte demnach nur als Beziehungsglied der qualitativen Negationsbeziehung und nicht *für sich allein* bestehen. Somit befindet sich sowohl Herbart in einer seltsamen Denktäuschung, wenn er meint, die vielen mannigfaltigen einfachen Qualitäten könnten beziehungslos nebeneinander bestehen, wie sich die Eleaten in einer ebensolchen obgleich schwerer erkennbaren Täuschung befinden, wenn sie meinen, dass ein einziges jener einfachen Wesen allein und für sich bestehen kann, während in Wahrheit das einzige reale Wesen nur als Mitglied einer vielheitlich-mannigfaltigen durch einfache Negationtsacte beziehungsvoll beschaffenen Welt existieren kann.

Wollte der Eleate dieser denknotwendigen Consequenz doch aus dem Wege gehen, um seinen Gedanken der beziehungslosen Welt zu retten, so müsste er neben der qualitativen auch die quantitative Bestimmtheit von seinem realen Wesen abstreifen. So abstrakte Denker die Eleaten auch waren, so abstrakt waren sie doch nicht, um sich bis zu diesem Gedanken des absolut bestimmungslosen Wesens emporzuschwingen: der Gedanke liegt aber in der Consequenz ihres Standpunktes und ist von anderen gezogen worden. Dasjenige, was weder Quantität noch Qualität hat, ist wirklich absolut beziehungs-

tiven Unterschied zurück), so kann zwischen zwei Gegensätzen nichts in der Mitte liegen, so dass der einfache Negationsact der Qualität in dieser Hinsicht vollständig dem einfachen Negationsacte im Gebiete der Quantität entspricht. Durch alles dies will ich nicht sagen, dass die Anzahl der Qualitätsnegationen, die zwischen zweien völlig aber nicht entgegengesetzt (also disparat) verschiedenen Qualitäten liegen, nicht eine unendliche sein kann, wir lassen dies hier in diesem allgemeinen Theile der Ontologie ebenso unbestimmt, wie wir es in Bezug auf die numerische Verschiedenheit unbestimmt gelassen haben, was wir feststellen wollten ist nur dies, dass die letzten Negationsacte (die auch Leibniz, allerdings als rein „ideale Beziehungen", anerkennt) im Gebiete der Qualität notwendigerweise Gegensatzacte sein müssen, dass es zwischen zwei entgegengesetzten Qualitäten keine Mittelglieder giebt und geben kann, und dass Leibniz dies nur deshalb nicht eingesehen hat, weil er die beiden Verschiedenheitsbeziehungen nicht voneinander getrennt hat, und infolgedessen unfähig war, die theilweise verschiedenen und die völlig gleichen Qualitäten zu erklären, und so in unklarer Weise den Unendlichkeitsbegriff der Quantität auf die Qualität anwandte. Nur durch diese Verwirrung kam Leibniz dazu, im Gesetz der Continuität das oberste Gesetz der Natur zu erkennen. Wir können uns hier nicht in eine specielle Kritik des Continuitätsgesetzes einlassen, was dies Gesetz im Princip unmöglich macht, ist dies, dass die Negationsbeziehung, auf die wir alle Verschiedenheit in der Welt zurückgeführt haben, selbst diesem Continuitätsgesetz nicht unterliegt, sondern eine absolut untheilbare einfache Einheit ist.

los, und das Negationsprincip scheint keine Bestimmungskraft mehr auf dasselbe ausüben zu können. Dieses reine bestimmungslose Etwas, welches noch ohne Qualität und ohne Quantität ist, scheint so leer und inhaltslos zu sein, dass man in Versuchung steht, dasselbe für das reine Nichts zu erklären, wodurch der eleatische Standpunkt der beziehungslosen Welt mit einem Schlage ad absurdum geführt wäre. Aber so unvorsichtig dürfen wir nicht sein: das reine bestimmungslose Etwas ist zwar etwas was in den Rahmen der qualitativ-quantitativen Wirklichkeit nicht passt, aber trotz alledem kann dieses Etwas vielleicht ebenso notwendig zum Bestehen jener Welt sein, wie es die einfachen Negationsacte sind, die wir als eine besondere Wirklichkeitsart erkannten. Erst das nächste Kapitel wird uns Klarheit in dieser Frage bringen, jetzt müssen wir unter der Voraussetzung der Existenz jenes reinen bestimmungslosen Etwas zeigen, dass dasselbe ebensowenig *für sich allein* bestehen kann, wie es mit dem einen qualitativ-quantitativen Wesen der Eall ist. *Wenn* jenes bestimmungslose Etwas besteht (im nächsten Kapitel werden wir dasselbe als den wahren Realitätsstoff charakterisieren, aus dem die gesammte Wirklichkeit stammt), dann ist dasselbe zwar weder eines, noch vieles, weder schwarz, noch weiss, weder diese, noch jene Qualität überhaupt, aber dasselbe hat doch und muss *eine* Eigenschaft haben, ohne welche überhaupt nichts gedacht werden kann: auch dieses völlig bestimmungslose Etwas muss nämlich mit sich identisch sein. Als wir die Identität auf ihren Beziehungswerth prüften, fanden wir, dass dieselbe wohl gar keine Beziehung ist, aber doch eine seltsame Notwendigkeit in sich einschliesst, und hatten damals die Erklärung dieser Notwendigkeit für ein grosses nicht umzugehendes metaphysisches Problem erklärt. Nun, in der Auflösung dieses Problems liegt der Schlüssel zur Auflösung der Frage nach der Möglichkeit des reinen bestimmungslosen Wesens. Identität ist wohl keine Beziehung, aber trotzdem denken wir die Identität ganz so, als ob sie eine Beziehung wäre. Solange man ein einfaches Wesen, eine einfache Qualität (um dieselbe zunächst in Betracht zu ziehen) für sich betrachtet, hat man absolut keine Möglichkeit diese Identität ihrer selbst mit sich zu begreifen: sobald man sie aber als Beziehungspunkt der einfachen Negetionsbeziehung betrachtet, wird die Notwendigkeit dieser Identität einleuchtend. Die Identität ist keine besondere Eigenschaft der Beziehungspunkte, sondern sie ist der blosse Ausdruck dafür, dass die beiden Beziehungspunkte so durch die einfache Verschiedenheitsbeziehung getrennt sind, dass sie nicht eins sind, dass sie nicht miteinander

zusammenfallen können, und davon rührt eben die Notwendigkeit ihrer Identität mit sich her. Ebenso wie die Beziehungspunkte durch die Verschiedenheitsbeziehung so voneinander getrennt sind, dass sie nicht miteinander zusammenfallen können, ebenso muss man annehmen, dass die Verschiedenheitsbeziehung sich selbst so von ihnen trennt, dass sie selbst mit ihnen nicht zusammenfallen kann, dass sie selbst identisch mit sich ist, nur mit dem Unterschiede, dass die beiden Beziehungspunkte *mittelbar*, d. h. durch die Beziehung verhindert sind, miteinander zusammenzufallen, während die Beziehung sich selbst *unmittelbar* von den Beziehungspunkten trennt (sonst müsste man annehmen, dass eine neue Verschiedenheitsbeziehung da kommt, die sie beide voneinander trennt u. s. f. in infinitum, woraus folgt, dass die Notwendigkeit dieser unmittelbaren Trennung aus der Natur der Verschiedenheitsbeziehung selbst einleuchtet) also unmittelbar von ihnen verschieden und mit sich identisch ist. Wie nun in diesem Falle die Identität nur der nackte Ausdruck für die Thatsache der Trennung der Beziehungsglieder durch die Beziehung und der Trennung der Beziehung von den Beziehungspunkten durch sich selbst ist, also ein blosses Verhältniss und keine Beziehung bedeutet, ebenso muss die Identität des reinen bestimmungslosen Etwas in dieser Weise aufgefasst werden, wenn dieses Etwas wirklich bestehen soll. Was bedeutet das aber? Nicht weniger und nicht mehr, als dass das reine bestimmungslose Etwas nicht *für sich allein*, sondern nur als Glied der Bestimmungsbeziehung bestehen kann. Nun offenbar kann dasselbe, da es noch ohne Quantität und Qualität ist, nicht Beziehungsglied der Negationsbeziehung in derselben Art und Weise sein, wie dies mit den qualitativ-quantitativen Einheiten der Fall ist, oder, wenn keine solche besondere Art und Weise der Abhängigkeit desselben von der Negationsbeziehung denkbar ist, dann kann dasselbe überhaupt nicht bestehen. Nun, ein tieferes Nachdenken überzeugt uns, das jene besondere Art und Weise der Abhängigkeit des bestimmungslosen Etwas von der Negationsbeziehung wirklich existiert: wie nämlich die Negationsbeziehung sich selbst unmittelbar von den beiden Beziehungspunkten trennt und trennen muss (sonst müsste man eine unendliche Menge von Trennungsrealitäten zwischen beiden voraussetzen), ebenso muss man sich denken dass das bestimmungslose Etwas unmittelbar durch die Negationsbeziehung von dieser letzteren getrennt ist, in welchem Falle dann das bestimmungslose Etwas zu dem besimmungslosen Realitätsstoffe der vielheitlich-mannigfaltigen Beziehungswelt wird. Damit will ich noch nicht sagen, dass dasselbe wirklich als solches existiert,

was ich feststellen wollte ist nur dies, dass das absolut beziehungslose Wesen doch nur als Glied der beziehungsvollen Welt bestehen könnte, und dies habe ich auch wirklich gethan, und brauche nicht mehr Worte daran zu verwenden.

Nun, derselbe Grund, der das reine beziehungslose Wesen, welches in der Consequenz des eleatischen Grundgedankens liegt, zwingt, Glied der beziehungsvollen Welt zu sein, derselbe Grund vernichtet auch die letzte und gefährlichste Form der Doctrin der beziehungslosen Welt, diejenige von den vielen absolut disparaten Wirklichkeitselementen. Jede dieser disparaten Wirklichkeitselemente müsste nämlich mit sich identisch sein, und als solche ganz ebenso Glied der beziehungsvollen Wirklichkeit werden. Das bedeutet aber nicht mehr und nicht weniger, als dass es absolut disparate Wirklichkeitselemente in dem Sinne, dass sie überhaupt nicht mehr Glieder einer und derselben Welt sein können, nicht giebt und nicht geben kann, und dass nur solche Wirklichkeitselemente denkbar sind, die entweder direkt oder indirekt durch Beziehungen gesetzt und bedingt sind. Die vielen mannigfaltigen Qualitäten sind durch die vielen Negationsacte mittelbar gesetzt, und bilden alle eine und diesselbe Wirklichkeitsart, der gegenüber die vielen Negationsacte wieder eine Wirklichkeitsart für sich bilden, die unmitttelbar sich selbst von jener ersten Wirklichkeitsart trennt: diese beiden Wirklichkeitsarten haben nichts gemeinsames mehr in sich, aber trotzdem sind sie nicht so disparat, dass sie nicht Glieder einer und derselben Welt sein könnten, oder vielmehr die beziehungsvolle Welt ist nur als eine aus disparaten aber sich gegenseitig unmittelbar bedingenden Wirklichkeitselementen bestehend denkbar, und wenn das reine bestimmungslose Etwas bestehen sollte, so könnte dasselbe nur als dritte von diesen beideu toto genere unterschiedene Wirklichkeitsart gedacht werden.

Nun freilich, schon auf Grund des bisher Ausgeführten liesse sich mit absoluter Notwendigkeit auf die Existenz einer dritten neben der beiden schon bestehenden existierenden Wirklichkeitsart schliessen, aber freilich wird erst das nächste Kapitel die Voraussetzung derselben als eine solche Notwendigkeit klar erscheinen lassen. Können die verschiedenen Qualitäten nur dadurch voneinander verschieden sein, dass eine besondere Wirklichkeitsart sie hindert, miteinander zusammenzufallen, so ist andererseits wieder eine Wirklichkeitsart notwendig, die diese beiden so voneinander selbst toto genere verschiedenen Wirklichkeitsarten miteinander verbindet, damit sie nicht ganz auseinanderfallen, und damit so wirklich die eine ihre trennende und

beziehende Kraft auf der anderen ausüben kann. Andererseits wieder müsste diese dritte Wirklichkeitsart selbst als eine von den beiden vorigen toto genere verschiedene wieder eine andere voraussetzen, die sie mit den vorigen verbände u. s. w. in infinitum. Zwar können wir diese Schlussfolgerung ganz mit demselben Rechte ablehnen, mit dem wir die Schlussfolgerung der unendlich vielen trennenden Wirklichkeitsarten ablehnen müssen, aber trotz alledem müssen jedoch besondere Verhältnisse zwischen dieser dritten Wirklichkeitsart und den beiden ersten bestehen, wenn sie ihre verbindende Kraft, trotz ihrer disparaten Natur, ausüben soll, und erst das nächste Kapitel wird uns wirklich solche Verhältnisse offenbaren, wodurch ihre Existenz zu einer absoluten Notwendigkeit erhoben werden wird. Erst der dritte Abschnitt wird uns aber endgiltige Aufschlüsse über diese letzten metaphysischen Verhältnisse geben.

Nun, am Ende dieser etwas langen und anstrengungsvollen Untersuchungen haben wir noch eine sehr wichtige Frage in Bezug auf die Natur der Beziehung zu erörtern. Lotze, der wie kein anderer, in seiner „Metaphysik“ die Beziehungsnatur des Seienden vertheidigt, gesteht schliesslich zu, dass die von uns gedachten Beziehungen (dass die Gleichheit keine eigentliche Beziehung ist, diesen Gedanken hat Lotze nur an einer Stelle seiner Metaphysik nebenbei und sozusagen im Fluge gestreift) nicht die eigentlichen im Seienden selbst gelegenen Beziehungen sein können, dass sie als solche nur „subjective Zuthaten“ des Denkens sind, aber allerdings Zuthaten die durch die objective Natur der Dinge selbst unserem Denken gleichsam abgenöthigt sind. Die eigentlichen Beziehungen zwischen den Dingen müssen nach Lotze als innere Zustände dieser Dinge selbst gedacht werden, und so muss schliesslich die Gesammtheit der Dinge als ein einziges Wesen gedacht werden, in dem alle die vielen in Beziehungen stehenden Dinge nur innere Zustände sind. Nun, wenn unsere unmittelbare Erfahrung nichts Scheinbares und Vorstellungsmässiges ist (wie es Lotze, Metaphysik § 113, ausdrücklich behauptet), sondern eine reale ansichseiende Wirklichkeit, dann ist sie offenbar selbst Theil dieser objectiven Wirklichkeit, und die in ihr bestehenden Beziehungen müssen zugleich die in der objectiven Wirklichkeit bestehenden Beziehungen sein. Nun stellen sich die von uns gedachten Beziehungen in unserer unmittelbaren Erfahrung nicht als blosse „subjective Zuthaten“ unseres Denkens heraus, sondern als wirkliche zwischen den Erfahrungsobjecten selbst liegende Beziehungen. Nur wenn die objective ausser unserer Erfahrung bestehende Wirklichkeit als „Ding an sich“ von unserer Erfahrung

als „Vorstellung“ im kant'schen Sinne sich toto genere unterschiede (die deutsche nachkantische Metaphysik leidet leider nur zu sehr an Kant), nur dann hätten wir Recht, die von uns gedachten Beziehungen nicht als wirkliche in der objectiven Wirklichkeit selbst vorhandene Beziehungen zu betrachten, sondern als blosse obgleich meinetwegen notwendige Zuthaten unseres Denkens zu der Vorstellung derselben, sonst aber sind wir nicht nur berechtigt, sondern auch genöthigt, sie als wirkliche anzuerkennen. Nur wenn sich herausstellen würde, dass diese von uns gedachten Beziehungen unfähig sind, die reale Wirklichkeit vollständig begreiflich zu machen, nur dann hätten wir Recht, sie im Sinne Lotze's als blosse subjective Zuthaten unseres Denkens zu betrachten. Nun, meine Metaphysik wird gerade den Versuch machen, aus diesen von uns gedachten Beziehungen die Wirklichkeit zu construieren.

Bevor wir nun zu dieser unseren Aufgabe übergehen, bleibt uns nur noch ein wichtiges allgemein-ontologisches Problem zur Erörterung, nämlich das Problem des Werdens und des Seins; wir wollen dasselbe im nächsten abschliessenden Kapitel dieses Abschnitts behandeln

Viertes Kapitel.

Sein und Werden.

Im Problem des Werdens laufen letzten Endes alle Fäden eines metaphysischen Systems zusammen. Denn die Thatsache des Werdens und der Veränderung, die in unserer unmittelbaren Erfahrung unzweifelhaft gegeben ist, stellt ein so grosses Wunder und unserem Denken eine so grosse Schwierigkeit dar, dass es diese Thatsache in erster Reihe ist, die die Welt zu einem so grossen und ungeheueren Problem macht. Im Werden scheint uns das Seiende, dessen Existenz uns sonst so unerschütterlich und fest schien, völlig schwankend und nichtig zu werden, denn das Werden führt das Seiende plötzlich aus seiner unerschütterlichen Ruhe der Existenz in eine noch unerschütterlichere aber desto grauenhaftere Ruhe des Nichtseins hinüber. Bevor wir des Werdens innewerden, scheint uns kein Gegensatz grösser, kein Unterschied einfacher, klarer und einleuchtender zu sein als derjenige zwischen Sein und Nichtsein. Und nun plötzlich scheint uns das Werden diesen Unterschied zu verwischen, und dasjenige was wir als das Denknotwendigste von allem denken, völlig nichtig und illusorisch zu machen. Wie ist dieses so grosse und wahrlich so furchtbare Problem des Werdens aufzulösen,

wie ist die Thatsache des Werdens mit derjenigen des Seins in Einklang zu bringen?

Bevor wir das Problem aufzulösen versuchen, müssen wir zunächst die Thatsachen der unmittelbaren Erfahrung sowohl in Bezug auf das Sein wie in Bezug auf das Werden beschreiben. In jedem Gegenwartsaugenblicke ist uns das Seiende als etwas mit Inhalt erfülltes gegeben, als eine vielheitlich-mannigfaltige Qualitätswelt. Nun aber bleibt diese vielheitlich-mannigfaltige Qualitätswelt nicht in jenem einen Gegenwartsaugenblicke beständig bestehen, sondern einzelne Theile derselben verschwinden, während andere unverändert in jener Gegenwart verbleiben. Viele werden sogleich schon im Anfang dieser Beschreibung der Thatsachen gegen dieselbe Einspruch erheben. Wie, wird man sagen, kann man von Vorstellungen und Bewusstseinsinhalten reden, die beständig gegenwärtig bleiben, da das hiesse, dass es Wahrnehmungsinhalte in unserem Innern giebt, die völlig ausser Zeit liegen. In der Erkenntnisslehre habe ich diese Thatsachen genugsam festgestellt, will aber auch hier das Wesentliche jener Ausführungen wiederholen. Ich erinnere zunächst an die Thatsache der Bewegung. Wenn sich ein Körper, der für unsere Wahrnehmung und in unserer Wahrnehmung bekanntlich nichts anderes ist als eine Summe von Lichtempfindungen, in unserem Wahrnehmungsraume bewegt, so sind wir dessen unmittelbar bewusst, dass er dabei selbst beständig in seiner Existenz verbleibt und keine qualitative, keine inhaltliche Veränderung seiner selbst erfährt. So stellt sich die Thatsache der Bewegung einer unbefangenen Betrachtung dar: von einer qualitativen Veränderung der sich bewegenden Empfindungsgruppe ist keine Spur zu entdecken, und die Behauptung, als ob auch hier eine qualitative Veränderung stattfände, die aber nur so schnell geschähe, dass wir sie nicht wahrnehmen können, ist nicht Beschreibung einer Thatsache, sondern Aufstellung einer Theorie, die darauf beruht, Scheinbares in unserer unmittelbaren Erfahrung als möglich zuzulassen. Niemand wird jene Thatsache der beständigen Existenz des sich Bewegenden in unserem Bewusstsein, insofern sie die nackte Wahrnehmungsthatsache ist, bestreiten, man wird sie nur für „scheinbar" erklären, und das ist gerade dasjenige was unmöglich ist, da nach unserem Hauptprincip der Schein aus der unmittelbaren Erfahrung vollkommen ausgeschlossen ist. Erkennt man nun einmal die beständige Existenz der sich bewegenden Empfindungsgruppen an, so muss man ebenfalls die beständige Existenz derselben, inwiefern sie sich in Ruhe befinden, anerkennen. Denn wie ein Lichtempfindungskomplex im Zustande der Bewegung deshalb unveränderlich

ist, weil er als unveränderlich wahrgenommen wird, ebenso müssen dieselben Lichtempfindungen, auch wenn sie ruhen, unveränderlich sein, wenn sie als solche wahrgenommen werden. Nun zeichnen sich die Lichtempfindungen vor fast allen anderen Empfindungsarten dadurch aus, dass sie mit besonderer Deutlichkeit durch mehrere Zeitaugenblicke hindurch völlig unveränderlich in unserer Wahrnehmung erscheinen: diese weisse Farbenfläche, auf der ich schreibe, bleibt beständig und unveränderlich vor meinem Blicke stehen, und verändert sich nicht. Der Einwurf, dass dies Unverändertbleiben nur ein Schein der Wahrnehmung sei, und dass sich in Wahrheit diese weisse Farbenfläche in jedem Augenblick verändert, aber so schnell verändert, dass wir diese Änderungen nicht mehr wahrnehmen können, entfällt vollständig, weil dadurch die Thatsachen der unmittelbaren Erfahrung für einen blossen Schein erklärt werden, was doch unmöglich ist. Alles was unsere Wahrnehmungsinhalte als solche angeht, alle ihre kategorialen Bestimmungen, müssen offenbar wahrgenommen werden, denn sonst wären jene Wahrnehmungsinhalte nicht *nur* Wahrnehmungsinhalte, und man müsste voraussetzen, dass dieselben sozusagen nur von einer Seite wahrgenommen werden, und auch eine andere Seite besitzen, die unwahrgenommen ist und bleibt. Wir haben den Schein auf eine Incongruenz unserer Wahrnehmungsinhalte mit ihren äusseren Beziehungslosobjecten zurückgeführt, und jene Behauptung, als ob Farbenempfindungen sich so schnell veränderten, dass diese Veränderungen nicht mehr wahrnehmbar sind, kann sich nicht unmittelbar auf die Wahrnehmungsobjecte als solche, sondern nur auf ihre objectiven Substrata beziehen, und in diesem Sinne allein hat jener Einwurf eine Berechtigung, da unsere Wahrnehmung thatsächlich in dieser Beziehung hinter ihren objectiven Ursachen, wie in vielen anderen rein qualitativen Beziehungen, zurückbleiben kann. Sobald man streng unsere Wahrnehmungsinhalte von den äusseren Objecten unterscheidet, verliert jener Einwurf absolut jede Berechtigung und dann hat die Thatsache der beständigen Existenz von Lichtempfindungen nichts wunderbares an sich. Wir unterscheiden klar die Fälle, in denen eine qualitative Veränderung der Empfindungen vorgeht, von denjenigen in denen diese Veränderung nicht vorgeht: wenn ich meine Augen schliesse, so wird diese weisse Farbenfläche vor mir verschwinden, und meinem Blicke wird sich eine schwarze nur mir weit nähere Farbenfläche darbieten. Hier habe ich offenbar eine deutlich wahrgenommene qualitative Veränderung vor sich; wenn ich wieder die Augen aufmache so wird sich die schwarze Farbenfläche wieder in die weisse umwandeln.

Ich kann dieses Augenschliessen und Augenaufmachen und dieses beständige Sich-Umwandeln der einen Farbenfläche in die andere so schnell wie möglich wiederholen, ich spüre immer deutlich, dass die qualitative Veränderung stattfindet und werde nie den Augenblick erleben, wo ich diese beständigen Änderungen nicht mehr wahrnehmen werde. Wie könnte ich diesen Fall von dem ersten Falle des beständigen Verbleibens der weissen Farbenfläche unterscheiden, wenn diejenigen Recht hätten, die auch dabei eine schnelle qualitative Veränderung, ein schnelles Sich-Wiederholen einer und derselben Empfindung annehmen (man könnte aber bemerken, dass ein Unterschied zwischen beiden Fällen eben darin besteht, dass in diesem Falle eigentlich kein qualitativer Übergang des Weissen in das Schwarze, sondern ein beständiges Sich-Wiederholen des Weissen stattfindet — ich frage aber dann, warum muss bei einem langsameren Sich-Verändern des Weissen in das Weisse dieser qualitative Übergang in der Wahrnehmung notwendigerweise eintreten, wenn er bei jenem schnelleren nicht eintritt und man wird sogleich einsehen, dass beide Fälle doch identisch sind), denn selbst wenn man annähme, dass dieses Sich-Widerholen noch viel, viel schneller geschieht, als jenes wahrgenommene beständige Umwandeln der weissen Farbenfläche in die schwarze und umgekehrt, könnte doch nie jener Schein der vollständigen und absoluten Veränderungslosigkeit entstehen. Und man nehme noch zum Vergleich die Tonempfindungen hinzu, die Tonempfindungen haben wirklich die Eigenschaft, sich beständig verändern zu müssen, und nun sollte man meinen, dass gerade bei denselben bei einer eventuellen rasenhaften Schnelligkeit ihrer Aufeinanderfolge jener Schein der absoluten Veränderungslosigkeit und Beständigkeit eintreten müsste, was jedoch erfahrungsgemäss niemals geschieht. Die Thatsache der beständigen Empfindungen muss also als eine unmittelbare Thatsache unseres Bewusstseins anerkannt werden, mag man sich drehen und wenden wie man will. In der Erkenntnisslehre haben wir dargethan, wie ohne diese Thatsache der beständigen Wahrnehmungsinhalte und ohne die Thatsache des absolut zeitlosen Ich unser Bewusstsein von der successiven Zeitreihe absolut nicht entstehen könnte, was nur ein Beweis mehr für ihre Existenz ist.

Neben dieser Thatsache der beständigen unveränderlichen Wahrnehmungsinhalte und neben der Thatsache der sich bewegenden Wahrnehmungsinhalte, die nur eine besondere Form jener ersten Thatsache ist, muss nun durchaus auch die dritte Thatsache, und zwar die wichtigste von allen, anerkannt werden, namentlich die Thatsache der qualitativen Veränderung, die Thatsache der aus dem

Bewusstsein vollständig verschwindenden und in's Bewusstsein vollkommen neu eintretenden Wahrnehmungsinhalte. Wenn ich meine Augen schliesse, so verschwindet die gesammte vielheitlich-mannigfaltige Lichtwelt aus meinem Bewusstsein, wenn ich die Augen wieder öffne, so erscheint sie wieder in derselben Gestalt im Bewusstsein. An Stelle jener mannigfaltigen Lichtwelt entsteht in meinem Bewusstsein die Empfindung der vollständigen Dunkelheit, und in zweitem Falle tritt wieder an Stelle dieser vollständigen Dunkelheit jene farbenreiche helle Lichtwelt. Was in diesem Falle nun besonders neben der deutlichen Thatsache der qualitativen Veränderung, des Verschwindens der einen und der Entstehung der anderen Qualität, hervorzuheben ist, ist dies, dass die Quantität jener farbigen Lichtwelt in Summa uns viel extensiver und intensiver erscheint, also viel grösser ist, als diejenige der Dunkelheit, nicht nur also dass eine qualitatitive sondern auch eine quantitative Veränderung und zwar eine toto genere von derjenigen der Bewegung unterschiedene ist geschehen. Die Bewegungsänderung betraf nur die Änderung des Ortes: der eine Empfindungskomplex hat dabei seinen Ort in Bezug auf die anderen Empfindungskomplexe verändert, ohne dabei *selbst* eine Inhaltsänderung zu erfahren. Dagegen in diesem Falle tritt eine sowohl qualitative als quantitative Veränderung auf: während im ersten Falle an einem anderen Orte derselbe qualitativ-quantitative Inhalt erhalten wird, tritt hier ein neuer sowohl seiner Qualität als seiner Quantität nach von dem vorigen unterschiedener Inhalt auf; im ersten Falle hat ein Empfindungskomplex den anderen Empfindungskomplex, an dessen Stelle er getreten ist, nur aus einem Orte in den anderen versetzt, ihn aber im Bewusstsein existent gelassen, während dagegen im zweiten Falle der zweite Inhalt den ersten Inhalt vollständig aus dem Bewusstsein verdrängt hat. So stellt sich uns die qualitative Veränderung aber nur bei den beständigen Lichtempfindungen dar. Anders steht die Sache mit anderen Empfindungsarten, und wieder sind es die Tonempfindungen, die in dieser Beziehung besonders weit von den Lichtempfindungen abliegen. Ein Ton (oder die gesammte in einem Augenblicke im Bewusstsein vorhandene Tonsumme) kann verschwinden, ohne dass ein anderer Ton an seine Stelle zu treten kommt: in dem Falle hat sich die qualitative Veränderung nur darauf beschränkt, einen Wahrnehmungsinhalt aus dem Bewusstsein vollständig verschwinden zu lassen, ohne einen anderen an seine Stelle treten zu lassen. Dieser Fall des vollständigen Verschwindens eines Wahrnehmungsinhalts zeigt uns deutlich, wie wir uns auch jenen Fall der qualitativen Veränderung aufzufassen

haben: *im Wesen der qualitativen Veränderung selbst liegt es nicht, dass, wenn ein qualitativer Inhalt verschwindet, ein anderer an seine Stelle zu stehen kommt*, denn läge dies im Wesen derselben, so müsste jede qualitative Veränderung in dieser Weise vorgehen, was offenbar nicht der Fall ist (man könnte auf den Einfall kommen, dass doch auch in diesem Falle des vollständigen Verschwindens der Tonempfindung ein vollständiges Verschwinden in Wahrheit nicht stattfindet, sondern dass an ihre Stelle eine ganz andere Empfindung zu stehen kommt: unsere unmittelbare Erfahrung zeigt uns aber, dass bei dem Verschwinden der Tonempfindung der übrige Wahrnehmungsinhalt ganz unverändert bleibt und wenn dabei manchmal doch welche Veränderung vorgeht, diese in keinem wahrnehmbaren Zusammenhang mit jenem Verschwinden der Tonempfindung steht); aber dasselbe lässt sich schon aus jenem ersten Falle *für sich* herauslesen. Wenn bei jeder qualitativen Veränderung die eine Qualität an die Stelle der anderen notwendigerweise treten müsste, dann müssten die beiden Qualitäten offenbar quantitativ gleich sein, wenn dagegen die durch Veränderung bewirkte Qualität weniger Quantität enthält als die durch dieselbe Veränderung verschwundene, so ist offenbar dieser quantitative Rest selbst vollständig verschwunden, ohne eine qualitative Änderung nach sich gezogen zu haben, was notwendig gewesen wäre, wenn qualitative Veränderung jene vorausgesetzte Umwandlung der einen Qualität in die andere in sich schlösse. Während also bei der Bewegungsänderung das Kommen des einen Wahrnehmungsinhalts an den verlassenen Ort des anderen eine Wahrnehmungsnotwendigkeit ist, ist diese Ersetzung des einen Wahrnehmungsinhalts durch den anderen bei jener qualitativen Änderung keine Wahrnehmungsnotwendigkeit mehr.

Es fragt sich nun, und daran führt sich das Problem des Werdens zurück, ob diese beiden Wahrnehmungsnotwendigkeiten zugleich Denknotwendigkeiten sind? Wir haben in der Erkenntnisslehre festgestellt, das nur diejenigen Wahrnehmungsnotwendigkeiten Denknotwendigkeiten sind, die letzte einfache untheilbare Thatsachen darstellen und dass es unserer unmittelbaren Intuition anheimfällt zu entscheiden, welche Wahrnehmungsnotwendigkeit dies ist und welche dies nicht ist. Dass die Thatsache der qualitativen Veränderung als Wahrnehmungsthatsache nicht mehr und nicht weniger bedeutet, als dass dabei das Seiende in das Nichtseiende und das Nichtseiende in das Seiende übergeht, ist so einleuchtend, dass wir darauf wohl nicht noch einmal zurückzukommen brauchen. Es war *dies* doch deutlich der Sinn unserer letzten oben ausgesprochenen Worte, dass bei jeder

wahrgenommenen qualitativen Änderung ein Übergang des Seienden in das Nichtseiende und ein Übergang des Nichtseienden in das Seiende *in* dem Bewusstsein und *für* das Bewusstsein unzweifelhaft stattfindet. Es fragt sich nun, ob dies auch wirklich so ist, ob auch wirklich der Wahrnehmungsinhalt, indem er aus unserem Bewusstsein veschwindet, in's absolute Nichtsein übergeht, oder ob er nicht vielleicht seine Existenz ausser dem Bewusstsein fortsetzt. Wie man also sieht, kann jenes unmittelbare Verschwinden des Bewusstseininhalts in's Nichtsein und sein Entstehen aus dem Nichtsein nur etwas scheinbares sein, in Wahrheit braucht dieser Inhalt nicht in's Nichtsein hinüberzugehen. Nun wird man uns vielleicht gegen diese unsere Behauptung unser Hauptprincip entgegenstellen, wonach alles dasjenige, was in unserer unmittelbaren Erfahrung ist, so ist wie es sich uns darstellt. Eine Verwendung unseres Hauptprincips in diesem Falle gegen uns selbst würde aber nur beweisen, dass man unser Hauptprincip nicht verstanden hat. Wir läugnen nicht, indem wir die Erhaltung des Bewusstseinsinhalts auch ausser dem Bewusstsein, allerdings nur provisorisch, für möglich zulassen, sein wirkliches Verschwinden aus dem Bewusstsein, wir läugnen ja damit die Qualitätsveränderung als Wahrnehmungsthatsache nicht, als solche bleibt sie absolut wirklich und unbezweifelbar, was wir behaupten ist nur, dass der Wahrnehmungsinhalt, wenn er aus dem Bewusstsein verschwunden ist, nicht absolut verschwunden ist, sondern möglicherweise nur *aus* dem Bewusstsein hinausgewandert und in die anderen Regionen des ausser dem Bewusstsein bestehenden Seienden sich begeben hat, ja wir basieren sogar diese unsere Behauptung erst auf jener unzweifelhaften und keineswegs scheinbaren Erfahrungsthatsache selbst, und diese Thatsache ist es ja einzig und allein was unser Hauptprincip behauptet, dasselbe ist also durch jene Voraussetzung gar nicht in Frage gestellt, ebensowenig wie etwa die Thatsache der von uns unabhängigen Veränderungen, indem wir sie durch Voraussetzung der Aussenwelt begreiflich machen (vgl. Principien der Erkenntnisslehre, Kap. IV.) durch diese letztere ihrer wirklichen Thatsächlichkeit im Bewusstsein entkleidet wird, als Thatsache im Bewusstsein bleibt sie bestehen, nur sind wir berechtigt und genöthigt, sie nicht für die letzte Thatsache im Seienden selbst als Ganzen zu betrachten, indem wir auf andere ebenso sichere Erfahrungsthatsachen stossen, die mit ihr in Widerspruch stehen. Wie wir nun hier in diesem eben erwähnten Falle die Voraussetzung der Aussenwelt deshalb machen, weil uns sonst die Thatsache der absoluten Willensfreiheit (die sich in den von uns abhängigen Ver-

änderungen mit eben ganz derselben Sicherheit dokumentiert, mit welcher sich die von uns nicht abhängigen Veränderungen dokumentieren — eigentlich sind diese erst durch jene gegeben, wie in der Erkenntnisslehre ausgeführt) absolut unerklärbar wäre und in keinen widerspruchslosen Zusammenhang mit der Thatsache der von uns unabhängigen Veränderungen zu bringen wäre, diese Thatsache der von uns unabhängigen Veränderungen also auf diejenige der von uns abhängigen zurückführen, ebenso müssen wir auch hier zunächst die Thatsache der Qualitäts- auf diejenige der blossen Ortsveränderung, oder, was provisorisch für dasselbe gelten mag, auf die allgemeinere Thatsache der beständigen Existenz der Wahrnehmungsinhalte, zurückzuführen versuchen. Hätten wir versucht, die Thatsache der von uns abhängigen Veränderungen auf diejenige der von uns unabhängigen zurückzuführen, so hätten wir diesen Versuch nicht durchführen können: denn dabei müsste die Thatsache der von uns abhängigen Veränderungen als *Wahrnehmungsthatsache für einen Schein* erklärt werden müssen, was im entgegengesetzten Falle mit der Thatsache der von uns unabhängigen Veränderungen nicht geschieht, da sie als *Wahrnehmungsthatsache* wirklich bleibt, und nicht *für einen Schein* erklärt zu werden braucht. Aus eben demselben Grunde können wir auch hier nur den Versuch unternehmen, die Thatsache der qualitativen Veränderung auf diejenige der Ortsänderung zurückzuführen, denn wenn wir umgekehrt versuchen, die Thatsache der Orts- auf diejenige der Qualitätsänderung zurückzuführen, so müssten wir die Thatsache der Ortsänderung *als Wahrnehmungsthatsache für einen Schein* erklären, wir müssten in dem Falle annehmen, dass das Sich-Bewegende nur scheinbar beständig in seiner Existenz bleibt, in Wahrheit aber sich qualitativ beständig ändert, indem sich eine und dieselbe Qualität mit rasenhafter Schnelligkeit wiederholt, so dass wir völlig, wie man es gewöhnlich behauptet, unfähig sind, diese Veränderungen als solche wahrzunehmen; dagegen wenn wir die Thatsache der qualitativen auf diejenige der Ortsveränderung zurückzuführen versuchen, die Thatsache der Qualitätsänderung dadurch *als Wahrnehmungsthatsache nicht für einen Schein* erklärt wird, ebensowenig wie dies mit der Thatsache der von uns unabhängigen Veränderungen im ersten Fall geschieht. Hier sieht man nun zugleich (vgl. die Einleitung) wie wir uns im Falle, dass zwei einander widerstreitende Thatsachen in unserem Bewusstsein vorkommen, von denen jede den Anspruch auf gleiche Denknotwendigkeit erhebt, zu verhalten haben: wir müssen diejenige für die einfache und ursprüngliche erklären, die sonst notwendigerweise *als Wahrnehmungsthatsache*

für einen Schein erklärt werden müsste. Man sieht hieraus wie fruchtbar erkenntnisstheoretisch und metaphysisch unser neues Hauptprincip ist.

Es fragt sich nun, ob sich diese Zurückführung der Qualitäts- auf die Ortsänderung wirklich durchführen lässt? Lässt sich dieselbe nicht durchführen, dann bleibt uns nur noch ein Ausweg übrig: die Zurückführung der Thatsache der qualitativen Änderung auf die Thatsache der beständigen Existenz der Wahrnehmungsinhalte. Denn auch wenn wir die qualitative Änderung auf die Ortsänderung zurükzuführen versuchen, führen wir in Wahrheit die Thatsache der Veränderung auf diejenige der beständigen Existenz des Seienden zurück, indem wir dadurch den absoluten Übergang des Seienden in das Nichtseiende und des Nichtseienden in das Seiende ausschliessen wollen. Auch bei der Ortsänderung bleibt das Seiende beständig und geht nicht in das Nichtseiende hinüber; möglicherweise kann aber nun vielleicht das Verschwinden des Bewusstseinsinhalts aus dem Bewusstsein (resp. sein Entstehen im Bewusstsein) *nicht* durch die einfache Annahme des Hinauswanderns (resp. des Hineinwanderns) dieses Inhalts aus dem Bewusstsein erklärt werden, in welchem Falle die Zurückführung der qualitativen Änderung auf die blosse Ortsänderung nicht mehr möglich wäre, sondern irgend eine andere Änderungsart im Seienden vorausgesetzt werden müsste, bei der ebensowenig wie bei der Ortsänderung ein Übergang des Seins in das Nichtsein und umgekehrt stattfindet.

Bevor wir nun auf das Problem selbst eingehen, müssen wir zuvor den entgegengesetzten Versuch, nämlich die Zurückführung sowohl der Ortsänderung als der beständigen Existenz der Wahrnehmungsinhalte auf die qualitative Änderung, etwas näher in's Auge fassen und seine vollständige Grundlosigkeit nachweisen. Es wird dabei, wie gesagt, die Thatsache der Qualitätsänderung, die als Wahrnehmungsthatsache wirklich das Übergehen des Seienden in das Nichtseiende und des Nichtseienden in das Seiende bedeutet, für eine ursprüngliche Denknotwendigkeit erklärt. Seit dem alten *Heraklit,* der zum ersten Male das absolute Werden, oder, mit anderen Worten, das ruhelose Sein für die eigentliche Realitätsform des Seienden erklärte, ist es in unseren modernen Zeiten besonders *Hegel* gewesen, der diesen Gedanken mit der gesammten Kraft seines dialektischen Genius zu befestigen suchte. Hegels Doctrin besteht wesentlich im Folgenden. Das reine Sein, gedacht ohne alle qualitativ-quantitative Bestimmungen, ist das reine absolut bestimmungslose Etwas (der reine Realitätsstoff), der Gedanke des reinen noch absolut unerfüllten Etwas. Als solches

aber ist dies reine Sein eben Nichts, also im Anfang schon sind das reine Sein und das reine Nichts eins und dasselbe. Aber „was die Wahrheit (dabei) ist, ist weder das Sein, noch das Nichts, sondern, dass das Sein in Nichts, und das Nichts in Sein — nicht übergeht — sondern übergegangen ist. Aber ebenso sehr ist die Wahrheit nicht ihre Ununterschiedenheit, sondern dass *sie nicht dasselbe,* dass sie *absolut unterschieden*, aber ebenso ungetrennt und untrennbar sind, und unmittelbar jedes in seinem Gegentheil verschwindet. Ihre Wahrheit ist also ihre *Bewegung* des unmittelbaren Verschwindens des Einen in den Anderen: das Werden; eine Bewegung, worin beide unterschieden sind, aber durch einen Unterschied, der sich ebenso unmittelbar aufgelöst hat" (Logik, I. Bd., 1-tes Buch, s. 73—74). Der Irrthum Hegel's liegt hier klar vor uns. Das reine Sein und das reine Nichts sollen nur deshalb im Werden unmittelbar ineinander übergehen können und müssen, weil sie, indem sie voneinander *unterschieden* sind, zugleich miteinander identisch sind. Offenbar verwechselt erstens Hegel hier das simultane Identischsein der beiden Gegensatzglieder, des reinen Seins und des reinen Nichts, mit ihrem successiven Werdeverhältniss, und zweitens identificiert er den Unterschied mit der Identität. Beides muss streng auseinander gehalten werden. Weder sind die beiden Gegensatzglieder miteinander absolut identisch, noch sind sie in einem successiven Werdeverhältniss vorhanden, sondern sie sind durch einen einzigen untheilbaren Unterscheidungsact als *zugleich* gegeben vorausgesetzt. Nimmt man an, dass die durch den Negationsact getrennten Glieder voneinander nur successiv, also das eine nur durch die direkte Aufhebung des anderen setzbar ist, dann hätten wir wirklich den Widerspruch des absoluten Werdens vor sich. Aber in dem Falle könnte man eigentlich nicht mehr sagen, dass beide zugleich absolut eins und dasselbe sind: sind das reine Sein und das reine Nichts eins und dasselbe, sind sie ewig ineinander übergegangen, dann existiert eben weder das Seiende noch das Nichtseiende, sondern die absolute ruhige Einheit von beiden, die nichts anderes ist als jener im ersten Kapitel besprochene und verworfene widerspruchsvolle Begriff des Scheins. Müssen aber das Seiende und das Nichtseiende fortwährend ineinander übergehen, dann können sie eben nie miteinander identisch sein, können nie miteinander absolut zusammenfallen, sondern ihr absolutes Zusammenfallen kann sich nur als dieses fortwährende Übergehen des Einen in das Andere, als dieses Werden denken. Entweder fallen also Sein und Nichts miteinander absolut zusammen: dann ist zwischen beiden überhaupt keine Negationsbeziehung mehr vorhanden, die Negations-

beziehung selbst ist dabei aufgehoben, fallen sie nicht absolut miteinander zusammen, sondern geht jedes von ihnen fortwährend in das andere hinüber, dann besteht nur noch die succesive und keine simultane Negationsbeziehung mehr. Jener erste Fall ist nicht, formell betrachtet, widersprechend, aber absolut werthlos und bedeutet gar nichts mehr, dieser zweite Fall ist widersprechend, obgleich in demselben etwas factisches ausgedrückt ist; den dritten Fall aber, der sowohl denkbar als factisch ist, d. h. die simultane Negationsbeziehung, die sie beide voneinander trennt und nicht in eins zusammenfallen lässt, hat Hegel eben vollkommen aus den Augen verloren. Nur dieser Grundfehler Hegel's trägt daran Schuld, dass sein gewaltiges dialectisches Talent nur einen vorzugsweise rein formalen Schematismus der Kategorien hervorbrachte, in deren Rahmen die beziehungsvolle Wirklichkeit, so sehr er das Grundprincip derselben auch eingesehen hat, nicht passte.

Wie konnte Hegel solche Fehler in seinen Grundgedanken begehen? Bei einem so tiefen Denker, der den Muth zu einer deductiven Construction der gesammten Wirklichkeit hatte, muss der Grund davon ein tiefliegender sein. Und thatsächlich ist dem so. Dass das reine Sein und das reine Nichts in letzter Instanz identisch sein müssen, hat Hegel aus den letzten Verhältnissen der Identität mit der Verschiedenheit geschlossen. •Hier seine Ausführungen darüber. Wenn man, sagt Hegel (Logik, II. Bd., 2-tes Buch, s. 37) die Identität als etwas von der Verschiedenheit verschiedenes behauptet, so behauptet man damit schon, dass im Wesen der Identität diese Verschiedenheit von der Verschiedenheit liegt, man erkennt eben damit an, dass die Identität zugleich Verschiedenheit, also das Gegentheil ihrer selbst, ist. Der Satz des Widerspruchs wieder (ib. s. 41.) ist nichts anderes als der Identitätssatz selbst, indem hier die Identität als Negation des Unterschieds, also als Negation ausgedrückt ist, als was nun die Identität auch wirklich ist; daraus folgt aber auch zugleich (ib. s. 44.), dass der Unterschied, als Unterschied, sich von etwas unterscheiden muss, und dies Unterscheidende die Identität selbst ist, also ist der Unterschied selbst die Identität, er enthält sich und die Identität in einem. In dem vorigen Kapitel haben wir nun das Wesentliche der Identitätsbeziehung im Verhältniss zu der Verschiedenheitsbeziehung auseinandergesetzt und nachgewiesen, dass die Identität nichts anderes ist als Negation des Unterschieds, als Negation der Negation, und wollen hier jene Ausführungen über die Natur der Identitätsbeziehung noch in Einigem ergänzen, um das Abschlies-

sende darüber erst in dem dritten Abschnitte zum Vortrag zu bringen. Hegel meint auch, so sehr er die Notwendigkeit der Identität in der Verschiedenheit hervorhebt, dass doch die Identität schliesslich nur Negation der Verschiedenheit ist, nichts anderes als die Reflexion des Unterschieds auf sich selbst bedeutet (ib. s. 44—45.) Nun, das ist richtig, aber daraus folgt gar nicht, dass der Unterschied selbst Identität und Identität Unterschied ist, dass der Unterschied, weil er mit sich identisch ist, sich auf sich selbst beziehen muss, und dass die Identität, um verschieden von dem Unterschiede zu sein, Unterschied werden muss, den Unterschied in sich enthalten muss. Der einfache Unterschied ist wohl mit sich identisch, aber nicht dadurch, dass er etwa, um mit sich identisch zu sein, sich selbst aufheben müsste, der einfache Unterschied, indem er als Negationsact zwei Beziehungspunkte voneinander trennt, macht, dass jeder dieser Beziehungspunkte von dem anderen verschieden und für sich das ist was er ist, und dass der Unterschied selbst von diesen Beziehungsqunkten als Beziehung verschieden und das ist was er ist. Die Wahrheit dabei (um uns der Sprache Hegel's zu bedienen) ist nicht, dass der Unterschied sich selbst negiert und aufgehoben hätte, um Identität zu werden, um identisch mit sich zu sein, denn wenn er erst dadurch identisch mit sich würde, indem er sich selbst aufhöbe, so höbe er eben dadurch auch seine Beziehungspunkte auf und bestände überhaupt nicht mehr. Daraus folgt, dass, wenn wir uns in dasjenige vertiefen, was der Denkvorgang der Identität mit sich eigentlich bedeutet, wir dabei nur jener allgemeinen Denkform der Negation sammt ihren beiden Beziehungspunkten innewerden, und dass wir uns eine wirkliche Negation der Negation, als einer besonderen Denkhandlung, nicht bewusst sind. So ist die Identität nichts anderes als der Ausdruck dafür, dass das Unterschiedene eben unterschieden ist, und nur in diesem Sinne ist die Identität Verschiedenheit der Verschiedenheit, der sich auf sich beziehende Unterschied. Dies hat Hegel eben übersehen, und so ist er zu jener seiner seltsamen Lehre von dem Verhältniss der Identität zu der Verschiedenheit gelangt. Wenn Hegel nun wirklich mit seiner Behauptung Recht hätte, dass der Unterschied, um mit sich identisch zu sein, sich selbst aufheben müsste, und wenn die Identität, durch diesen ihren Ursprung genöthigt, wieder umgekehrt aufgehoben werden muss, um in den ursprünglichen Unterschied zurückzukehren, dann müsste schon im Unterschied selbst der Widerspruch liegen, der ihn nöthigt, sich selbst beständig aufzuheben. Und noch weiter muss man dann gehen: wenn dieser innere Widerspruch in der reinen Negationsbeziehung als solcher liegt (es ist

wohl nicht besonders nöthig zu erwähnen, dass Hegel, wie alle anderen, die Beziehung für ein rein logisches Verhältniss ansieht), dann muss er auch in den Beziehungspunkten selbst als solchen liegen. Und thatsächlich zieht Hegel diese Consequenz, wodurch zugleich der letzte Ursprung seiner Lehre vom absoluten Werden durchsichtig wird, indem er behauptet: „Der Unterschied überhaupt ist schon der Widerspruch an sich; denn er ist *die Einheit* von solchen, die nur sind, in so fern sie *nicht eins* sind, — und die Trennung solcher, die nur sind als *in derselben Beziehung* getrennte“ (ib. s. 66.) Nun, es ist wahr, dass der Unterschied „die Einheit solcher ist, die nur sind insofern sie nicht eins sind, und die Trennung solcher, die nur sind als in derselben Beziehung getrennte“, aber daraus folgt gar nicht, dass Unterschied und Widerspruch identisch sind, oder dass es etwas widersprechendes ist, wenn der Unterschied jene Einheit des Verschiedenen und jene Trennung des Einen ist: eins sind die beiden unterschiedenen Glieder nur insofern, inwiefern sie durch einen und denselben Unterscheidungsact voneinander verschieden sind, aber sie sind deshalb nicht miteinander identisch, sondern gerade diese Einheit des einen Unterscheidungsactes macht, dass sie *nicht* eins sind, dass sie verschieden sind. Hegel macht diesen feinen Unterschied der Einheit des Actes und des absoluten Zusammenfallens des Unterschiedenen nicht und deshalb folgert er, die Einheit des Unterscheidungsactes bedeute schon die Identität beider Glieder. Er fühlt aber deutlich, dass das absolute Zusammenfallen beider Gegensatzglieder etwas anderes ist, als ihre Unterscheidung, und so ist er genöthigt, dies absolute Zusammenfallen und *zugleich* den Unterschied derselben zu behaupten, wodurch eben der Unterschied zum Widerspruch wird. Wollte man den Widerspruch aus dem Unterschiede entfernen, so müsste man entweder das absolute Zusammenfallen der beiden Gegensatzglieder behaupten, wodurch der Unterschied selbst eigentlich für unmöglich erklärt wäre, oder man müsste einsehen, dass der Unterschied als solcher nicht zugleich Identität ist.

Nachdem wir nun so den eigentlichen Ursprung der Hegel'schen Doctrin des absoluten Werdens nachgewiesen haben, wollen wir noch Einiges über dieselbe sagen. Wie gesagt, kann die Identität des Unterschiedenen, also des reinen Seins und des reinen Nichts, als der beiden gegensätzlichen Urbegriffe, entweder als das absolute simultane Zusammenfallen derselben in einer Einheit aufgefasst werden, wodurch in Wahrheit nur scheinbar der Widerspruch aus dem Unterschiedsbegriffe verschwindet (der Widerspruch verschwände nur dann,

wenn es etwas drittes gebe, was sowohl Sein als Nichts wäre, ohne Sein oder Nichts zu sein, was jedoch unmöglich ist), denn diese Einheit der beiden Gegensätze wäre nichts anderes als der widerspruchsvolle Begriff des Scheins; oder diese Identität ist als das successive beständige Übergehen des Seins in's Nichts, und umgekehrt zu denken, und dann haben wir das absolute Werden. Einheit der Gegensätze, Einheit von Sein und Nichtsein, ist somit doppelsinnig: denkt man sich den Gegensatz, der diese Einheit bedeutet, als simultan und zugleich als aufgehoben, dann entsteht, wie gesagt, der widerspruchsvolle Begriff des Scheins, der, im Unterschied von dem Werden, mit dem realen Sein das Gemeinsame hat, dass er ruhig ist; denkt man sich diesen Gegensatz dagegen als successiv, dann entsteht der Begriff des absoluten Werdens, dessen Daseinsweise ruhelos ist. Wie man also sieht, erweist sich der Begriff der Einheit der Gegensätze, unter dem Hegel logisch den Begriff des absoluten Werdens fassen wollte, als ein über diesem letzteren stehende und umfang- und inhaltsreichere Begriff, denn diese Einheit der Gegensätze umfasst sowohl den ruhigen Schein wie das ruhelose Werden, und das beweist eben dass dieser Begriff nicht die fundamentale Art und Weise der Realität bedeuten kann, da die Realitätsform dabei nicht eine bestimmte ist, während sie dies doch notwendigerweise sein müsse, die Einheit der Gegensätze demnach nicht das oberste Weltgesetz zu sein vermag. Aber selbst wenn man das absolute Werden als die einzige konkrete Form jenes Begriffs der Einheit der Gegensätze auffassen wollte, müsste man es als etwas widerspruchsvolles vollkommen verwerfen. Nur wenn unser Denken unfähig wäre an Stelle dieses widerspruchsvollen Begriffs einen widerspruchslosen zu setzen, der im Stande ist, die Thatsache der Veränderung und die Thatsache der vielheitlich-mannigfaltigen Welt überhaupt zu erklären, nur dann müsste man das absolute Werden für die absolute Wirklichkeitsform erklären. Nun haben wir schon im Princip nachgewiessen, dass die simultane Negation ein solches widerspruchloses Princip darstellt, welches fähig ist, die vielheitlich-mannigfaltige Welt zu erklären, es fragt sich nur noch wie die Veränderung auf Grund dieses Princips möglich ist.

Was bis jetzt festseht, ist dies, das, logisch genommen, das absolute Werden nicht die Wirklichkeitsform darstellen kann. Aber nicht nur rein logisch ist dies unmöglich, sondern auch die empirische Wirklichkeit lässt sich daraus durchaus nicht erklären, unsere unmittelbaren Erfahrungsthatsachen geraten in Widerstreit damit. Wäre das absolute Werden die eigentliche Wirklichkeitsform, so wäre

sowohl die Thatsache der in ihrer Existenz beständigen Wahrnehmungsinhalte, als diejenige der Bewegung absolut unmöglich. Jene erste Thatsache müsste in diesem Falle, wie schon früher ausführlich dargestellt, für einen blossen Schein erklärt werden, und doch können wir das unmittelbar Gegebene nicht für einen Schein erklären. Ebenso wäre auch die Thatsache der Bewegung nicht denkbar: das absolute Werden ist nur als qualitative Veränderung denkbar, die Bewegung müsste also eine Combination der qualitativen mit der Ortsänderung bedeuten und nur scheinbar die blosse Ortsänderung sein. Es müsste vorausgesetzt werden, dass bei der Bewegung der sich bewegende Empfindungscomplex nur scheinbar qualitativ unveränderlich bleibt, er müsste sich ebenso, wie die ruhenden Empfindungsinhalte, fortwährend und in jedem Augenblicke verändern, und diese seine qualitative Änderung würde sich von der qualitativen Änderung der ruhenden Seinsinhalte nur darin unterscheiden, dass der besagte Empfindungscomplex, in's Nichtsein übergegangen, in dem nächsten Augenblicke an einem anderen Orte erscheint, oder, eigentlich gesprochen, es würde indem ein Empfindungscomplex auf einem Orte verschwindet an dem nächsten ein neuer qualitativ gleicher erscheinen, der den Schein der Continuität in der Existenz mit dem vorigen hervorbrächte: Bewegung in eigentlichem Sinne wäre in diesem Falle gar nicht vorhanden, da in diesem Falle numerisch ein und dasselbe nicht auf zwei unmittelbar sich aneinander anreihenden Orten erscheint. Wie man also sieht, müsste man jene beiden unmittelbaren Erfahrungsthatsachen für einen blossen Schein erklären, wenn das absolute Werden wirklich die eigentliche Wirklichkeitsform darstellt.

Wenn nun so das absolute Werden sowohl dem Denken als der Erfahrung widerstreitet, so muss unbedingt der umgekehrte Versuch gemacht werden, die Thatsache des beständigen Seins für die ursprüngliche, und die Thatsache der Veränderung für secundär zu erklären. Es muss zunächst festgestellt werden, worin sich dieser Versuch von dem vorigen unterscheidet. Die Voraussetzung des absoluten Werdens involviert die Möglichkeit eines Überganges des Seins in das Nichtsein und des Nichtseins in das Sein, involviert also die Möglichkeit des Zusammenfallens zweier Gegensätze, involviert also die Möglichkeit des Widerspruchs. Aber viel tiefer noch geht der Gedanke des absoluten Werdens: indem das absolute Werden die Möglichkeit des Übergangs des Seins in das Nichtsein involviert, setzt es zugleich die Möglichkeit des Nichtseienden selbst als einer negativen Wirklichkeitsart voraus, und diese Voraussetzung ist

es eigentlich, die den eigentlichen Inhalt jenes ersten Widerspruchs ausmacht. Wäre die Existenz des Nichtseienden denkbar, dann könnte sie wirklich nur als die reale Aufhebung des Seins gedacht werden, und nicht als eine zugleich neben dem Seienden selbst bestehende Existenzart, also müsste thatsächlich das Seiende reel aufgehoben werden, damit das Nichtseiende gegeben werde. Denn klar ist es, dass das Seiende und das Nichtseiende nicht in demselben Negationsverhältniss zueinander stehen, in welchem weiss und schwarz stehen: denn weiss und schwarz sind wohl einander entgegengesetzt, aber sie haben doch etwas gemeinsames, nämlich beide sind *etwas*, beide haben einen positiven Inhalt, dagegen stehen Sein und Nichtsein nicht mehr in einem solchen Verhältniss, das Seiende fassen wir als etwas rein positives, während das Nichtseiende etwas rein negatives ist, und zwischen beiden besteht nichts gemeinsames mehr, das Nichtseiende stellt die absolute Aufhebung des Seienden dar, das Seiende dagegen stellt den realen fürsichseienden absolut erfüllten Seinsinhalt dar. Während wir uns das Schwarze ohne das Weisse und das Weisse ohne das Schwarze nicht denken können, können wir uns das Seiende ohne das Nichtseiende denken, dagegen können wir uns umgekehrt das Nichtseiende ohne das Seiende nicht denken, das Nichtseiende stellt eben die reine Negation, die reine Abwesenheit des Seienden dar. In jenem ersten Verhältnisse ist der Negationsact, der die beiden positiven Beziehungsglieder trennt, ein simultaner, in diesem zweiten Falle ist dieser Negationsact nur als ein successiver zu denken. Jener erste Gegensatz trägt den Namen des positiv-, dieser zweite dagegen den Namen des negativ-contradictorischen Gegensatzes. Diese Unterscheidung der beiden Gegensatzarten ist keine dialektische Spitzfindigkeit, sondern etwas was unmittelbar aus der Erfahrung selbst folgt. Jenes erste Verhältniss ist nichts anderes als die Thatsache des beständigen Seins selber: indem wir das Seiende als seiend auffassen — und nur als solches ist es gegeben — fassen wir alle die mannigfaltigen Gegensätze seines Inhalts in jener ersten Art und Weise auf; indem wir dagegen den Act der Veränderung selbst wahrnehmen, fassen wir den Gedanken jenes zweiten Negationsverhältnisses auf, indem eine Qualität aus dem Bewusstsein verschwindet sehen wir unmittelbar, dass sie uns nicht mehr gegeben ist, und da wir nicht mehr dasjenige wahrnehmen, was sie nun geworden, so sagen wir, sie sei in's Nichtsein übergegangen — was auch in Bezug auf unser Bewusstsein ein, wie schon früher ausgeführt, ganz zutreffender Ausdruck ist — und fassen dieses Nichtsein als die absolut inhaltslose Negation jenes positiven Seinsinhalts auf, der

sich verändert hat resp. aus dem Bewusstsein verschwunden ist. Das Nichtsein bedeutet keinen positiven Inhalt mehr, sondern die absolute Abwesenheit jedweden Inhalts. Und dasselbe Verhältniss zwischen Sein und Nichtsein bleibt in unserem Denken auch dann, wenn ein neuer Inhalt in unserem Bewusstsein entsteht, dieser letztere ist für uns wiederum aus dem Nichts entstanden, aber obgleich in diesem Falle dem Zeitverhältnisse nach das Seiende *nach* dem Nichtseienden kommt, bleibt doch ihr logisches Gegensatzverhältniss ganz gleicher Art mit demjenigen im ersten Falle: das Nichtseiende wird als die absolute inhaltslose Negation des Seienden aufgefasst, und das Seiende einzig und allein für positiv gehalten.

In Wahrheit aber wären wir vollkommen ausser Stande, uns diesen Begriff des reinen inhaltslosen Nichts zu bilden — und da zeigt sich die ganze Fruchtbarkeit der Zurückführung der abstrakten metaphysischen Begriffe auf die unmittelbare Erfahrung — wenn uns jenes erste Beispiel des positiv-contradictorischen Verhältnisses nicht vollkommen klar in der Erfahrung gegeben wäre. Denn wir sind im Stande jenes Nichtseiende, welches vollständig ausserhalb der Erfahrung liegt und (deshalb) etwas undenkbares und unvorstellbares ist, doch als denkbar und vorstellbar zu machen nur dadurch, dass wir uns dasselbe als eine besondere wunderbare Art der Wirklichkeit, als eine Wirklichkeit ohne allen und jeden denkbaren Inhalt denken, ganz analog dem anderen positiven Gliede des positiven Gegensatzverhältnisses, indem wir dabei aus den Augen verlieren, dass wir uns dabei eigentlich eines Schemas bedient, das da völlig unpassend ist. Wenn wir das Nichtseiende als den Gegensatz des Seienden denken, so denken wir uns dabei in Wahrheit beide als Glieder der simultanen Negationsbeziehung, unterschieben also dem Nichtseienden etwas, was es sonst nicht hatte, nämlich eine Art der Wirklichkeit, und definieren diese Wirklichkeitsart als etwas was die völlige und absolute Negation der eigenthümlichen Wirklichkeitsart des Seienden ist, während in Wahrheit das Nichtseiende nicht eine Wirklichkeit negativer und inhaltsloser Art bedeutet, sondern die Abwesenheit aller und jeder Wirklichkeit, der Wirklichkeit selbst. Indem wir das Nichtseiende als die negative Wirklichkeit denken, trennen wir in Wahrheit das Existenz- von dem Essenzmoment im Seienden voneinander ab, und denken uns das Nichtseiende als reine Existenz ohne Essenz, wir denken uns das Seiende und das Nichtseiende als Glieder eines positiv-contradictorischen Verhältnisses, dessen Gemeinsames in dem reinen Momente der Existenz, dessen Verschiedenes in dem Momente der Essenz, die in dem einen Gliede ist und in

dem anderen nicht ist, liegt (wie etwa das Gemeinsame des Weissen und des Schwarzen in dem realen qualitativen Inhalte beider, das Unterschiedene in der Abwesenheit des Weissen in dem Schwarzen liegt), was doch falsch und unmöglich ist (das erhellt schon daraus, dass das Nichtseiende und das Seiende, auch wenn sie beide als positive Glieder gedacht werden, nicht alle Merkmale des positiv-contradictorischen Verhältnisses enthalten, da das Weisse ebensosehr als Abwesenheit des Schwarzen aufgefasst werden kann wie umgekehrt das Schwarze die Abwesenheit des Weissen ist, während das Seiende nicht als Abwesenheit des Nichtseienden aufgefasst werden kann, sondern einzig und allein das Nichtseiende als die Abwesenheit des Seienden, man fühlt eben, dass das Seiende allzusehr der Realität nach dem Nichtseienden überlegen ist, um als Abwesenheit dieses letzteren zu gelten.) Das Nichtseiende kann in Wahrheit nur die absolute Abwesenheit des Seienden bedeuten, kann nur das Unwirkliche selbst bedeuten, und dies Unwirkliche ist eben dasjenige, was unvorstellbar und undenkbar ist, es ist in Wahrheit nichts anderes als der Ausdruck des Unmöglichen und Widerspruchsvollen selbst. Widerspruchslos ist dieser Begriff — darauf werden wir erst in dem dritten Abschnitt der Ontologie eingehen können — nur seiner Form nach, sein Inhalt dagegen besteht in dem Widerspruchsvollen und Unmöglichen selbst, und sobald wir versuchen, demselben einen positiven Inhalt zu geben, kommen wir auf den widerspruchsvollen Begriff des negativ-wirklichen Nichtseins, was nur zeigt, dass das Nichtsein keinen positiven Inhalt hat.

Ist nun das Nichtseiende als solches etwas absolut undenkbares und unmögliches, so muss sich jene Thatsache der Veränderung in unserem Bewusstsein auf die Thatsache des reinen widerspruchslosen Seins, oder, was dasselbe bedeutet, auf die Thatsache des beständigen Seins zurückführen lassen. Nun könnte man diesen Versuch sehr leicht in der Weise machen, dass man voraussetzen würde, dass der Bewusstseinsinhalt, indem er aus dem Bewusstsein verschwindet, nicht auch in Wahrheit und überhaupt verschwindet, sondern einfach seine Existenz ausserhalb unseres Bewusstseins ohne jede Änderung seiner selbst fortsetzt. In Wahrheit aber ist dieser so einfache Versuch, der so leicht zu unternehmen ist, auch ebenso leicht als ein höchst leichtfertiger zu erkennen. Wenn der Bewusstseinsinhalt ausser dem Bewusstsein seine Existenz in ebensolcher Qualität fortsetzen würde, die er im Bewusstsein hat, dann müsste man entweder mit dem naiven Realismus anerkennen, dass unsere Bewusstseinsinhalte zugleich und als solche Bestandtheile der Aussen-

welt sind, oder man müsste, um die vielen Widersprüche des naiven Realismus zu vermeiden, voraussetzen, dass dieselben, indem sie aus dem einen Bewusstsein verschwinden, in ein anderes daneben liegendes hineingelangen. In der That werden wir im zweiten Abschnitte finden, dass die Welt nur als ein Compositum von Bewusstseinsindividuen, von Seelenindividuen aufgefasst werden kann, diese Voraussetzung wäre gar nicht als solche widersprechend, ja sie ist sogar auf unserem Standpunkt der absoluten Realität der unmittelbaren Erfahrung nicht nur die zunächstliegende, sondern auch die einzig mögliche. Wir wollen nun zunächst von einem wesentlichen Widerspruche, mit dem dieses Hinüberwandern des Bewusstseinsinhalts aus dem einen in das andere Bewusstsein behaftet ist, gefliessentlich absehen, und wollen nur an den Consequenzen desselben seine Unmöglichkeit und seine widerspruchsvolle Natur nachweisen. Wenn die Bewusstseinsinhalte ohne Änderung der Qualität bloss aus dem einen in das andere Bewusstsein hinüberwandern, so muss man voraussetzen, dass die Anzahl der verschiedenen Qualitäten in der Welt und die Quantität jeder derselben eine absolut besimmte ist. Die Summe der Schmerzqualität müsste in der Welt ebenso constant sein, wie diejenige der Lustqualität, und wenn der Schmerz in dem einen Bewusstsein verschwindet, so müsste er, als Ganzes oder in Theile zerlegt, in anderen Bewusstseinen unverändert erscheinen, die Qualität des Roten müsste ebenso, wenn sie in meinem Bewusstsein verschwindet, in einem anderen, als Ganzes oder dekomponiert, qualitativ unverändert erscheinen, u. s. w. So wäre also die qualitative Änderung völlig und absolut auf die quantitative, d. h. auf die blosse Ortsänderung zurückgeführt.

Aber tiefer besehen stellt sich uns die Ortsänderung selbst gar nicht als etwas so absolut begreifliches und widerspruchsloses dar, wie es auf den ersten Blick zu sein scheint. Wenn ein Empfindungskomplex seinen Ort in Bezug auf die anderen ändert, und wenn Empfindungen continuirlich und ohne Lücken den subjectiven Wahrnehmungsraum erfüllen, was unzweifelhaft der Fall ist, dann müssen, wenn die Negationsacte wirklich die einzelnen einfachen Empfindungspunkte voneinander trennen, bei der Ortsänderung eines solchen Empfindungspunktes (und auf diese Ortsänderungen der einfachen Empfindungspunkte führt sich ja doch schliesslich die Ortsänderung des gesammten Empfindungskomplexes zurück, da derselbe aus diesen einfachen Empfindungspunkten zusammengesetzt ist) diese Negationsacte offenbar verschwinden, denn

sie sind es eben durch die jener Empfindungspunkt zusammen mit den ruhend gebliebenen Punkten gegeben ist. Wenn nun der Negationsact etwas wirklich real vorhandenes ist, wenn es eine reale Beziehung ist und nicht eine blosse Fiktion, dann kann seine Änderung nicht mehr auf eine Ortsbewegung zurückgeführt werden, diese Änderung muss eine qualitative, eine vollständige, ein Verschwinden in's Nichtsein sein, da ja erst dadurch jene Ortsänderung der realen Punkte selbst eintreten kann. Der Schwierigkeit, die hiermit in der Ortsänderung gefunden ist, kann man sich nicht gefliessentlich dadurch entledigen, dass man einfach sagt, jene Negationsbeziehung sei nichts wirkliches sondern etwas bloss formales, und demnach etwas was ganz wohl als in's Nichtsein übergehend gedacht werden kann. Denn ich frage: was für Unterschied besteht dann wohl zwischen der in's Nichtsein übergegangenen Negation, und jener Existenzart die sie hatte als sie noch seiend war? Doch offenbar besteht ein solcher Unterschied, sonst wäre ja eben keine Änderung vor sich gegangen, denn wenn jener Negationsact schon als solcher ein Nichtseiendes war, so ist eben, indem die Änderung eintrat, keine Änderung desselben geschehen, was so viel bedeutet als ob überhaupt keine Änderung vorgangen wäre. So muss also offenbar das Übergehen und Verschwinden des Negationsactes in das Nichtsein bei der Ortsänderung absolut anerkannt werden, mag man sich drehen und wenden wie man will, denn sonst wäre die Ortsänderung selbst etwas absolut unbegreifliches. Man springe uns nur nicht mit dem Gedanken bei, die Bewegung sei eben eine ursprüngliche Eigenschaft jener Qualitätsinhalte (wie sie der Materialismus als ursprüngliche Eigenschaft der materiellen Atome voraussetzt), wer mit solchen Wendungen das Problem der Ortsänderung zu lösen versuchen würde, für den ist dieses Buch nicht geschrieben, denn der versteht den tiefen Ernst der metaphysischen Untersuchungen nicht. Ich vermag nur dasjenige für die ursprüngliche Eigenschaft einer Sache anzuerkennen, dessen Notwendigkeit im Wesen der Sache selbst liegt, hier aber vermag ich bei dem Gedanken der Qualität die Notwendigkeit seiner ursprünglichen Bewegung nicht erblicken und deshalb eben vermag ich ihre Bewegung nicht für ihre ursprüngliche weiter nicht erklärbare Eigenschaft aufzufassen. In einem späteren Kapitel werden wir auf das Specifische des Bewegungsproblems noch eingehender als hier geschehen zurückkommen (vgl. Kap. III., II. Absch. I. Unterabsch.) Hier wollen wir nun die Consequenzen erwägen, die aus der Voraussetzung entspringen, dass es in der Welt keine qualitative Änderung giebt, sondern dass schliesslich jede Änderung

eine reine Bewegungsänderung ist, und dass die Bewegung die einfache ursprüngliche Eigenschaft jeder einfachen Qualität sei. Wir wollen dabei gar nicht in Betracht ziehen, wie dadurch die Thatsachen der relativen Ruhe einzelner Qualitäten und die verschiedenen Geschwindigkeiten ihrer Bewegung völlig unerklärbar bleiben, obgleich die unlogischen Consequenzen einer Voraussetzung diese selbst zu einer solchen stempeln, wir wollen auf andere Consequenzen hinweisen, die von viel fundamentalerer Bedeutung sind. Wenn man die qualitative Änderung aus dem Gebiete der Wirklichkeit durchaus vertreiben will, wenn man dieselbe um jeden Preis auf die Bewegung zurückführen will, dann muss man erstens voraussetzen, dass es keine einfachen quantitativen Negationsacte giebt, da diese notwendigerweise bei der Ortsbewegung aufgehoben werden müssten, sich also qualitativ änderten, und zweitens muss man voraussetzen, dass jede einzelne Qualität in der Welt in ihrer Gesammtsumme völlig constant bleibt. Jene erste Voraussetzung aber macht nicht nur die Thatsache der Bewegung zu einem völlig undurchdringlichen Rätsel, sondern zerstört zugleich die Möglichkeit der beziehungsvollen Welt selbst vollständig, denn die Negation der quantitativen Negationsacte führt die Negation der qualitativen notwendigerweise mit sich, und so kommen wir zum Begriffe jener vielheitlich-mannigfaltigen aber völlig beziehungslosen Welt Herbart's, nur dass in diesem Falle die einfachen Qualitäten nicht mehr transcendente uns unbekannte Wesen darstellen, sondern mit unseren völlig immanenten Qualitätsinhalten selbst zusammenfallen, unsere Schmerz-, unsere Lust-, unsere Roth-, Gelb-, Süssqualitäten, in ihre absolut einfachen Inhaltspunkte zerlegt, wären dann die letzten absolut einfachen Wesenheiten dieser absolut beziehungslosen Welt. Diese Qualitäten wären dann ohne alle und jede reale Beziehung zueinander, es müsste auf blossen Zufall zurückgeführt werden, dass sie sich doch so zusammenfinden, um ein so geordnetes und gesetzmässiges Weltganze und gar noch ein so wunderbar einheitlich sich fühlendes Wesen hervorzubringen, wie es unser unmittelbares Bewusstsein ist. Wenn Herbart nur nicht unseligerweise den Kant'schen Scheinsbegriff acceptiert hätte, hätte er sehr leicht — es lag ja in dem Beginn seiner metaphysischen Untersuchung ein glücklicher Ansatz dazu — seine einfachen beziehungslosen Wesen mit den einfachen Qualitätspunkten des Bewusstseinsinhalts identificiert, wodurch sich ihm nur die Unmöglichkeit seines Standpunktes der beziehungslosen Welt auf den ersten Blick klar ergeben hätte. Und nun mag man sich das besprochene Resultat nur gehörig anschauen:

haben wir nicht dadurch, dass wir alles und jedes Werden aus (
Seienden ausschliessen wollten, indem wir uns das Seiende in se
Veränderung vollkommen begreiflich machen wollten, den Widerspr
des absoluten Werdens mit einem weit ärgeren Widerspruch, d
jenigen der vielheitlich-mannigfaltigen beziehungslosen Welt vertausc
Denn den Begriff der beziehungslosen vielheitlich-mannigfaltigen V
hatten wir im vorigen Kapitel so eingehend analysiert, dass
seiner absoluten Werthlosigkeit kein Zweifel mehr obwalten ka

Nun stehen wir vor einem gefährlichen Dilemma, vor ei
wahren Antinomie unserer Vernunft, einer Antinomie, die, wenn
unlösbar wäre, durch ihren Ernst die sogenannten Kant'schen
tinomien als wahres Kinderspiel erscheinen liesse: erkennen wir
absolute Werden als das oberste Weltprincip an, dann müssen
grundlegendsten und unzweifelhaftesten Thatsachen unserer unmittelba
Erfahrung für blossen Schein und die Welt für etwas unserem
grifflichen Denken, das sich auf jene Thatsachen stützt, abs
unerreichbares erklärt werden; erkennen wir dagegen das beständ
Sein, indem die Bewegung für dessen ursprünglichste Eigenscl
erklärt wird, als das absolute Weltgesetz an, dann muss die Wi
lichkeit für absolut beziehunglos erklärt werden, und dann müs
wieder andere grundlegende Erfahrungsthatsachen, auf die sich ur
begriffliches Denken ebenso sehr stützt, für blossen Schein, und
Wirklichkeit demnach für etwas unserem Denken völlig unerrei
bares erklärt werden. Das Dilemma zwischen der beziehungslosen
der beziehungsvollen Welt führte sich, wie wir sahen, darauf zurü
ob der Identitäts- oder ob der Verschiedenheitssatz für das obe
Princip der Realität erklärt werden soll; dieses Dilemma führt sich al
wie leicht ersichtlich, darauf zurück, ob der Widerspruchssatz, o
im Gegentheil der Satz *der Möglichkeit des Widerspruchs* als
oberste Denkgesetz gelten soll, denn wir haben früher in der That
sehen, wie Hegel die Notwendigkeit des Wiederspruchs, sobald
Verschiedenheit überhaupt gegeben ist, nachweisen wollte, und
er an stelle des Widerspruchssatzes den Satz von der Möglichl
und Notwendigkeit des Widerspruchs für das oberste Weltge
erklärte.

Bevor wir nun zur Auflösung der Antinomie schreiten, müs
wir uns noch auf dem Begriff der qualitativen Änderung aufhalt
Wenn die Antinomie wirklich auflösbar ist, dann muss offenbar j
erste Seite derselben völlig geopfert werden, man muss also, indem man
Thatsache der qualitativen Änderung als eine ansichseiende wirkl
anerkennt, dieselbe doch widerspruchslos zu denken versuchen, s

die beziehungsvolle Welt als solche setzen und anerkennen. Nur in einer beziehungsvollen Welt ist überhaupt die qualitative Änderung denkbar, in der beziehungslosen Welt besteht eine solche nicht, weil in ihr keine Negationsacte bestehen. Wenn nun in der beziehungsvollen Welt die Thatsache der absoluten Änderung, des absoluten Verschwindens und Entstehens der realen Negatiosacte zugelassen werden muss, so steht nichts im Wege, in dieser Welt auch die wirkliche Änderung, das wirklicke Entstehen und Vergehen der Qualitätsinhalte selbst anzuerkennen. Denn sobald wir die Möglichkeit der realen und absoluten Aufhebung der realen Negationsacte zulassen, lassen wir damit die Aufhebung einer Realitätsart überhaupt zu, und wenn uns schon die nnmittelbare Erfahrung das Aufhören der Qualitätsinhalte in unserem Bewusstsein zeigt, haben wir keinen Grund, dieses Aufhören nicht auch an sich, d. h. ausserhalb des Bewusstseins anzuerkennen. Ausserdem, wenn die Qualitäten durch die Aufhebung der qantitativen Negationsacte bewegt werden, so muss man ganz wohl voraussetzen, dass sie sei es durch die Aufhebung der quantitativen oder der qualitativen Negationsacte (wir haben in dem vorigen Kapitel diese Frage unentschieden gelassen) auch ganz aufgehoben werden können.

Es lässt sich aber auch direkt beweisen, dass das qualitative Werden der Bewusstseinsinhalte eine Thatsache ist und das ihr Hinüber- resp. Hinauswandern aus dem Bewusstsein nicht möglich ist. Wenn Qualitätsinhalte aus dem einen Bewusstsein in das andere hinüberwandern können, dann muss man voraussaussetzen, dass, wenn ich meine Augen schliesse und dadurch statt der farbigen Lichtwelt das Dunkle erblicke, diese Dunkelheit aus der Aussenwelt in mein Ich in demselben Augenblicke hineingewandert ist, in dem jene helle Lichtwelt aus dem Bewusstsein hinausgewandert ist. Nun müsste offenbar die Dunkelheit auf diesem ihren Wege von der Aussenwelt zu mir die hinauswandernde helle Lichtwelt begegnen, und müsste durch diese letztere hindurchgehen, um in mein Bewusstsein zu gelangen, was eben unmöglich ist. Wendet man aber ein, dass ein solches Begegnen (resp. Durchdringen) gar nicht notwendig ist, weil die Dunkelheit aus einer anderen Richtung von der Aussenwelt herkommt als es diejenige ist, in der die helle Lichtwelt aus dem Bewusstsein hinauswandert, so lässt sich streng nachweisen, dass dem nicht so ist. Jener Einwand kann nämlich gemacht werden, indem man auf die Thatsache hinweist, dass ich eine dunkle Fläche vor mir so hinbewegen kann, dass sie mir einen Theil des hellen Gesichtsfeldes verdeckt: hier bewegt sich die dunkle Fläche offenbar nicht in derselben Richtung in der jenes

vorausgesetzte Hinüberwandern des hellen Gesichtsfeldes aus dem Bewusstsein geschieht. Ich will nun einen Fall nachweisen, in dem dieselbe Verdeckung des hellen Gesichtsfeldes stattfindet, wo aber von einer Bewegung der verdeckenden Fläche keine Rede sein kann. Wenn ich meine Augen langsam schliesse, so werde ich bemerken, wie sich nach oben mein helles Gesichtsfeld verengert, dabei bin ich mir aber deutlich bewusst, dass die dunkle Fläche, die das helle Gesichtsfeld immer mehr „verdeckt", sich nicht bewegt, sondern dass zu der anfangs entstandenen schmalen dunklen Fläche gleichsam immer neue Theile hinzugefügt werden: entweder muss man also voraussetzen, dass diese neu hinzugefügten Theile von der Aussenwelt durch das Hinüberwandern hinzukommen, in welchem Falle sie dann in derselben (resp. in direkt-entgegengesetzter) Richtung hineinwandern müssten in der die hellen Lichttheile hinauswandern, oder man muss voraussetzen, dass sie wirklich und absolut aus dem Nichtsein entstehen. Da jenes erste nun nicht möglich ist, so muss dieses zweite der Fall sein, die Thatsache des qualitativen Werdens muss also als unzweifelhafte Erfahrungsthatsache anerkannt werden. Geschieht nun in dem eben angeführten Falle die Verdeckung des hellen Gesichtsfeldes durch das qualitative Werden der dunklen Fläche, so muss ebenfalls vorausgesetzt werden, dass auch in jenem ersten Falle in dem sich die dunkle Fläche nur bewegt und sich nicht qualitativ verändert, das qualitative Werden die helle Lichtwelt ganz ebenso aufhebt, wie diese helle Lichtwelt in diesem Falle durch qualitatives Werden aufgehoben wird (denn entsteht die dunkle Fläche durch das Werden aus dem Nichtsein so vergeht offenbar auch das helle Gesichtsfeld durch das Werden in das Nichtsein, denn während das erste entsteht vergeht das letztere). Die erste Thatsache muss also ganz ebenso auf die zweite Thatsache zurückgeführt werden, wie wir die Thatsache des Werdens auf diejenige des Seins im allgemeinen zurückgeführt haben, weil sie eben einfacher als die andere ist (die erste lässt sich aus der zweiten diese aber nicht aus jener begreifen). In dem zweiten Unterabschnitt des zweiten Abschnittes der Ontologie werden wir noch andere Schwierigkeiten erörtern, die das Hinüberwandern des Qualitätsinhalts aus dem einen Bewusstsein in das andere unmöglich machen, hier genügt es, diese Unmöglichkeit streng empirisch festgestellt zu haben.

Wenn das Hinüberwandern der Qualität aus dem einen in das andere Bawusstsein unmöglich ist, dann könnte man zunächst, um der qualitativen Veränderung scheinbar aus dem Wege zu kommen,

voraussetzen, dass indem ein Qualitätsinhalt in dem einen Bewusstsein verschwindet, in dem anderen Bewusstsein eine ebensolche Quantität einer anderen Qualitätsart erscheint, so dass jene unmittelbare Thatsache der quantitativen Incongruenz des neuentstandenen im Vergleich mit dem vergangenen Qualitätsinhalte (in Fällen in denen ein neuer Qualitätsinhalt an die Stelle des anderen in unserem Bewusstsein entsteht) eine bloss scheinbare wäre, oder wenn man nicht gerade voraussetzen wollte, dass in einem anderen Bewusstsein ein solcher Inhalt entsteht, man voraussetzen könnte, dass er etwa im unbewussten Theil unseres eigenen Bewusstseins, als ein unbewusster Seinsinhalt (unter Voraussetzung eines solchen) entsteht. Aber mögen wir dies beides voraussetzen oder nicht, die Thatsache der qualitativen Änderung ist dadurch nicht im geringsten aufgehoben. Denn indem die eine Qualität sich in die andere verwandelt, muss sie selbst als solche, als diese bestimmte eigenthümliche Qualität verschwinden d. h. aufhören zu sein, und ihr ist es dann ganz gleichgültig, ob eine neue an ihre Stelle zu stehen kommt oder nicht, sie ist eben in's Nichtsein hinübergegangen, ebenso wie jener einfache numerische Negationsact, der zwei Empfindungspunkte trennt, aufgehoben und zwar wirklich und absolut aufgehoben werden muss, wenn Ortsänderung der Empfindungspunkte entstehen soll. Dass die eine Qualität sich nicht unmittelbar und als solche in die andere verwandeln lässt, dass nicht das seiende Material der einen Qualität unmittelbar in der anderen verwendet werden kann, ist nur durch einen vertieften Act des Denkens einzusehen. Dass die eine weisse Qualität z. B. sich nicht unmittelbar in die andere weisse Qualität verwandeln kann, ohne zuvor zu verschwinden, d. h. aufhören zu sein, lässt sich dadurch einsehen, dass man, durch Worte unbeirrt, fragt, wie sie weiss werden soll, wenn sie das schon ist, und was mit ihr wohl geschehen soll, damit sie ein anderes Exemplar des Weissen wird. Sie muss offenbar, um ein anderes Exemplar des Weissen zu werden, zuvor aufhören dieses Weisse zu sein, und wenn sie absolut unmittelbar und ohne einen vorherigen Übergang in's Nichtsein jenes andere weiss werden sollte, so müsste sie sich gleichsam nur von ihrem jetzigen logischen Orte auf den neuen Ort hinbewegen, als wirkliche Änderung also in Wahrheit nur eine Bewegung vollführen, bei der es kein eigentliches Werden giebt. Sobald wir nun dessen klar und deutlich innegeworden sind, dass das eine Exemplar des Weissen nur durch wirkliches Werden d. h. nur durch wirkliches Übergehen in's Nichtsein ein anderes Exemplar des Weissen werden kann, wird uns auch klar, dass das Weisse nicht

unmittelbar und als solches schwarz, sondern dass es zuvor aufhören muss, weiss zu sein, um schwarz zu werden. Auf den ersten Blick scheint die Notwendigkeit des absoluten Werdens bei dem Übergang des Weissen in das Schwarze viel einleuchtender zu sein, als bei dem Übergang des einen Weissen in das andere: in Wahrheit aber sind wir erst dann absolut sicher, dass das Weisse in das Schwarze nicht *unmittelbar* übergehen kann, wenn wir sicher sind, dass das eine Weisse in das andere Weisse nicht unmittelbar übergehen kann. Das eine Weisse ist dem anderen Weissen quantitativ entgegengesetzt, jedes der beiden ist nicht das andere, und das eine kann das andere nicht unmittelbar, d. h. kann überhaupt nicht als solches das andere werden, weil es eben nicht das andere ist, sondern es kann nur in das Nichtsein hinübergehen, und aus diesem Nichtsein kann dann das andere Weisse wieder entstehen. Wenn das eine Weisse nicht unmittelbar das andere Weisse werden kann, dann kann das Weisse destoweniger das Schwarze werden, denn weiss und schwarz sind nicht nur numerisch sondern auch qualitativ entgegengesetzt, wenn es also sicher ist, dass das Weisse nur durch das Medium des Nichtseins hindurch das andere Weisse werden kann, dann ist es absolut sicher, dass dasselbe ebenso nur durch das Medium des Nichtseins hindurch das Schwarze oder irgend eine andere Qualität überhaupt werden kann. Warum ich so sehr jenen ersten Fall des Werdens als Voraussetzung dieses zweiten betone, wenn der zweite für sich auf den ersten Blick einleuchtend zu sein scheint, werden wir gleich sehen, hier genügt es, dass wir festgestellt haben, wie eine Qualität in eine andere (sei es bloss numerisch oder auch qualitativ andere) Qualität nicht unmittelbar übergehen kann, wie also die qualitative Änderung ohne das absolute Werden absolut undenkbar ist.

Wie ist nun diese unzweifelhafte Thatache des Werdens aus dem Nichtsein und in's Nichtsein mit der Thatsache der absoluten Constanz des Seienden in Einklang zu bringen? Wir fühlen, indem wir das Verschwinden des Seienden in das Nichtseiende und das Entstehen desselben aus dem Nichtseienden unzweifelhaft als eine unmittelbare Thatsache der Erfahrung wahrnehmen, dass dieses Verschwinden des Seienden in das Nichtseiende in Wahrheit unmöglich ist, da wir uns von der Art und Weise der Wirklichkeit des Nichtseienden keinen Begriff machen können. Wenn das Seiende in das Nichtseiende und das Nichtseiende in das Seiende wirklich übergeht, so können wir uns diesen Übergang nicht anders denken denn so, dass wir dem Nichtsein irgend eine Art von Wirklichkeit zu geben

versuchen, und so gelangen wir zum Begriffe des Nichtseienden als einer negativen Wirklichkeitsart, indem uns der Übergang des Seienden in das Unwirkliche unmöglich und widersinnig erscheint. Und thatsächlich hat ja Hegel das Nichtseiende für das Negativ-Seiende erklärt, indem er das reine Sein als identisch mit dem reinen Nichts gesetzt hat. Wir haben gesehen, dass der Versuch, diesen Übergang des Seienden in das Nichtseiende (Lotze in seiner Metaphysik wirft Hegel vor, dass er seinen Begriff des Negativ-Wirklichen nicht zu verwerthen gewusst, sondern den Widerspruch im Werden gelassen, der sogleich verschwindet, wenn das Nichtsein selbst als eine Art der Wirklichkeit aufgefasst wird) widerspruchslos erscheinen zu lassen, wenn das Nichtseiende als das Negativ-Seiende betrachtet wird, deshalb misslingen muss, weil ja das Negativ-Wirkliche selbst ein Widerspruch ist. Dadurch ist ja der Widerspruch im Begriffe des absoluten Werdens nur scheinbar verschwunden, wenn das Unwirkliche als das Negativ-Wirkliche aufgefasst wird: denn das Negativ-Wirkliche ist als reine Existenz ohne Essenz selbst ein Widerspruch, die reine Existenz ist wohl etwas denkbares. aber denkbar ist sie nicht für sich selbst, sondern nur zusammen mit einem essentialen Inhalt. Aber obgleich dieser Versuch vollständig misslingen muss, so zeigt er doch den richtigen Weg zur Auflösung des Problems des Werdens. Wir brauchen nur an die Stelle dieses Begriffs der negativen Wirklichkeitsart den Begriff einer von der qualitativ-quantitativen Wirklichkeit toto genere verschiedenen Wirklichkeitsart zu setzen und das Problem des Werdens und damit auch jene furchtbare Antinomie des Denkens ist verschwunden. Und thatsächlich, wenn schon die Thatsache des wirklichen Entstehens und Vergehens der Qualität, der Quantität und der Negationsacte im Gebiete der uns unmittelbar gegebenen Wirklichkeit mit absoluter Gewissheit zugegeben werden muss, dann muss man entweder jenen Unbegriff der negativen Wirklichkeitsart zulassen, oder an Stelle dieses Unbegriffs den Begriff einer besonderen positiven Wirklichkeitsart setzen. Da jene erste nicht denkbar ist, so muss unser Denken diese zweite Voraussetzung machen, man muss die Existenz einer besonderen absolut qualitätslosen Wirklichkeitsart voraussetzen, um die Thatsache des Werdens im Gebiete der qualitativ-quantitativen Wirklichkeit zu erklären. Diese qualitätslose Wirklichkeit, obgleich sie einen positiven Inhalt hat, ist nicht als der direkte Gegensatz der qualitativen Wirklichkeit zu fassen, diese beiden Wirklichkeitsarten sind nicht durch einen einfachen realen Negationsact voneinander getrennt, und zwar einfach deshalb nicht, weil der Negationsact als solcher in die qualitativ-

quantitative Wirklichkeitsart einzig und allein hineingehört. Nein, die qalitätslose und die qualitative Wirklichkeit sind als unmittelbar getrennt und verbunden zu betrachten, ebenso wie etwa im Gebiete der qualitativen Wirklichkeit der Negationsact selber einerseits und die realen Beziehungsinhalte andererseits, die er setzt, *unmittelbar* miteinander verbunden und voneinander getrennt sind. Wie es keinen besonderen Negationsact giebt, der den realen Negationsact von seinen beiden durch ihn getrennten Inhaltspunkten trennen würde, da ja beide Wirklichkeiten ganz verschiedener Art sind, sondern beide unmittelbar nebeneinander sind und voneinander getrennt sind, ebenso sind hier in diesem Falle die qualitätslose Wirklichkeit und die qualitative Wirklichkeit, die im Werden aufeinanderfolgen, nicht mehr durch einen realen successiven Negationsact voneinander getrennt, sondern sie folgen aufeinander unmittelbar und ohne irgend etwas Dazwischentretendes.

Nun wird sogleich der Einwand erhoben werden, dass wir durch diese Voraussetzung der qualtätslosen Wirklichkeitsart die Schwierigkeit, die wir im Begriffe des absoluten Werdens beheben wollten, nur verdoppelt haben. Wir konnten einen absolut unmittelbaren Übergang des einen Weissen in das andere Weisse, des Weissen in das Schwarze deshalb nicht voraussetzen, weil uns überhaupt unmöglich erschien, wie das seiende Material der einen Qualität unmittelbar als seiendes Meterial der anderen Qualität verwendet werden könnte. Es scheint nun dass, indem wir an die Stelle des reinen Nichtseins diese neue qualitätslose Wirklichkeitart setzten, wir dabei dieselbe Schwierigkeit vor sich haben: offenbar, wenn das seiende Material des Weissen nicht unmittelbar das seiende Material des anderen Weissen oder einer anderen Qualität werden kann, scheint es klar, dass dasselbe auch nicht unmittelbar das seiende Material dieser qualitätslosen Wirklichkeitsart werden könnte, und dass es zuvor notwendigerweise wiederum in's absolute Nichtsein hinübergehen müsste, um in dieses neue Sein hinüberzugehen. Ich will mir, bevor ich auf diesen anscheinend so starken Einwand eingehe, eine Frage erlauben: wenn es absolut sicher ist, dass das eine seiende Material unmittelbar überhaupt kein anderes seiendes Material werden könne, ist es dann nicht sicher, dass dasselbe auch in's Nichtsein nicht übergehen könnte, und dass es, bevor es das positiv-nichtseiende Material würde, notwendigerweise das negativ-nichtseiende Material werden müsste, was jedoch undenkbar ist. Wenn ich also behaupte, dass das eine seiende Material nicht in das andere seiende Material übergehen kann, so wird dies nur soviel bedeuten können, dass es nicht

tn das seiende Material derselben Art unmittelbar übergehen kann, nicht aber, dass es nicht in das davon toto genere verschiedene Material übergehen kann. Das eine Weisse kann weder ein anderes Weisse noch irgend eine andere Qualität unmittelbar werden, nicht deshalb weil sie numerisch verschieden sondern deshalb weil sie alle gleicher Natur sind; dagegen lässt sich der Übergang des weissen Seinsmaterials in ein davon toto genere verschiedenes ganz wohl denken, oder, wenn man die positive Möglichkeit des Begreifens dieses Überganges nicht gerade zulassen will, dann ist gegen diese Möglichkeit kein positiver Grund anzuführen. Man muss immer bedenken, dass die Wirklichkeit reicher als unser erstes anfänglich so oberflächliches Denken ist, und dass erst die Feststellung dessen was in der Wirklichkeit unzweifelhaft ist, dem Denken neue Regionen eröffnet, die dasselbe sonst in seinem allzu schnellen Fluge wohl vorüberstreifen würde. Die qualitative Änderung ist eine Thatsache und das Denken muss diese Thatsache begreifen: wenn ihm dabei etwas dunkel und unbegreiflich auf den ersten Blick erscheint, so soll es sicher sein, dass es alles, sobald es nur gehörig sich selbst anstrengen will, wird erhellen können.

Wir wollen nun auf die Natur dieser qualitätslosen Wirklichkeit näher eingehen, um so ihre Voraussetzung noch besser zu begründen. Bisher haben wir nur soviel vorausgesetzt, dass sie ihrer inhaltlichen Natur nach etwas von der Qualität toto genere verschiedenes ist, und dass sie gerade dadurch dazu sich eignet, unmittelbar durch die Umwandlung der Qualität zu entstehen und ihrerseits sich wiederum unmittelbar in die Qualität umzuwandeln. Dies würde aber nicht mehr und nicht weniger bedeuten, als dass diese qualitätslose Wirklichkeit überall da entsteht, wo die eine Qualität sich in die andere umwandelt und wo der eine Negationsact vergeht und ein neuer entsteht (denn auch Negationsacte müssen unmittelbar in diese Wirklichkeit sich umwandeln und aus ihr wieder entstehen): sie würde aus dem Seinsstoffe beider entstehen und sich wiederum in diese Seinsstoffe zurückverwandeln. Aber solange die qualitätslose Wirklichkeit so als rein ephemeres Product der Veränderung einer bestimmten Qualität erscheint, solange ist weder das *Was* und *Wie* noch das *Dass* der Veränderung und des absoluten Werdens logisch begreflich. Warum soll sich die eine Qualität überhaupt in diese qualitätslose Wirklichkeit verwandeln, und warum soll sich diese qualitätslose Wirklichkeit wiederum in die qualitative zurückverwandeln, und ob diese Verwandlungen der einen in die andere beständig und fortwährend geschehen müssen? Würde man dies letztere voraus-

setzen, dann wäre das beständige Werden ganz ebenso gegeben wie dasselbe gegeben ist, wenn das absolute Werden im Sinne Hegel's zugelassen wird, was jedoch offenbar den unmittelbaren Erfahrungsthatsachen widerspricht. Sobald aber jenes beständige Werden nicht notwendig ist, bleibt es absolut unbegreiflich, wie und warum die Qualität sich in die qualitätslose Wirklichkeit und diese sich in jene umwandeln soll. Diese zwei Fragen müssen dann gestellt werden: sind die vielen qualitätslosen Wirklichkeiten, die bei jenen Änderungen entstehen, simultan und successiv (als Vielheit gegeben, oder ist nicht vielleicht nur eine einzige qualitätslose Wirklichkeit gegeben, aus der alle die vielen Qualitäten, die sich zugleich verändern, entstehen (resp. vergehen), und aus der alle die vielen Veränderungen der vielen Qualitäten, die zeitlich aufeinanderfolgen, entstehen (resp. vergehen). Denn ist diese Substanz eine und einzige, dann wird uns vielleicht gelingen, die Thatsache der qualitativen Veränderung uns begreiflich zu machen, ist sie aber bei jeder Veränderung eine andere und besondere, dann wissen wir nur soviel, dass wirklich bei jeder qualitativen Veränderung eine solche qualitätslose Wirklichkeit vorhanden *ist*, aber wir wissen dann weder warum überhaupt jene Verwandlung der Qualität in dieselbe (und umgekehrt) stattfindet, noch wie sie stattfindet.

Wir müssen also zunächst versuchen, die Einheit und Einzigkeit jener qualitätslosen Wirklichkeit für alle die vielen Veränderungen der qualitativ-quantitativen Wirklichkeit nachzuweisen. Wir müssen also zunächst nachweisen, dass, so verschieden die einzelnen Qualitäten auch sein mögen, die sich in die qualitätslose Wirklichkeit umwandeln, diese Wirklichkeit nur von einer einzigen Art sein könne, d. h. eine und dieselbe qualitätslose Wirklichkeit muss es sein, die immer und überall bei der Umwandlung der verschiedenen Qualitätsarten und bei der Umwandlung der Negationsacte entsteht. Und thatsächlich, sobald wir eine Verschiedenheit dieser qualitätslosen Wirklichkeiten voraussetzen würden, müssten wir notwendigerweise Negationsacte in dieselbe einführen, und dadurch hörte diese Wirklichkeit auf qualitätslos zu sein, sie würde nur eine Verdoppelung der qualitativen Wirklichkeit selbst bedeuten. Und würde man andererseits voraussetzen, dass die qualitätslosen Wirklichkeiten, die zugleich durch eine gleichzeitige Menge von qualitativen- und Negationsänderungen entstehen (diese Folgerung würde man nur dann vermeiden, wenn man voraussetzen würde, dass in einer und derselben Zeit nur eine einzige Veränderung geschehen kann — was offenbar der Erfahrung widerspricht), völlig unabhängig sind und

in einer ebensolchen Vielheit auftreten, wie die in sie umgewandelten Seinsinhalte der qualitativ-quantitativen Wirklichkeit, so bekäme man eine Vielheit von zugleich bestehenden Seinsinhalten, diese aber nur durch örtliche Negationsacte bestehen kann, man würde also die quantitative Negationsbeziehung in die qualitätslose Wirklichkeit hineinführen, also wiederum die qualitative Wirklichkeit verdoppeln. Aus diesen Ausführungen folgt also mit absoluter Sicherheit, dass die qualitätslose Wirklichkeit all der qualitativen Veränderungen, die zugleich geschehen, notwendigerweise eine und dieselbe sein müsse, und es fragt sich nur noch, ob sie nicht eine und dieselbe auch für alle die vielen nacheinanderfolgenden Veränderungen bleibt, ob also die qualitätslose Wirklichkeit des einen Veränderungsaugenblicks nicht ebenso mit der qualitätslosen Wirklichkeit des anderen Veränderungsaugenblicks zusammenfällt, wie die qualitätslose Wirklichkeit der einen Veränderung mit der qualitätslosen Wirklichkeit der anderen gleichzeitig mit ihr geschehenden Veränderung zusammenfällt. Die Frage lässt sich nicht so unmittelbar aus dem Wesen der successiven Vielheit der qualitätslosen Wirklichkeiten auflösen, wie es mit der simultanen Vielheit der qualitätslosen Wirklichkeiten der Fall war: man sieht unmittelbar ein, dass diese letztere nicht möglich ist, man sieht aber nicht so unmittelbar ein, dass die erstere nicht möglich ist, man muss vielmehr einen Umweg machen, um auch jenes erstere einzusehen. Wir müssen sehen, ob die Einzigkeit der qualitätslosen Wirklichkeit der vielen gleichzeitigen Veränderungen nicht notwendigerweise die Einzigkeit derselben in den vielen successiven Veränderungen nach sich zieht. Wir müssen fragen, ob es wirklich möglich ist, dass aus einer und derselben qualitätslosen Wirklichkeit so viele Seinsinhalte zugleich entstehen resp. in dieselbe vergehen. Es ist offenbar, dass, wenn aus einer und derselben untheilbaren und ungetheilten qualitätslosen Wirklichkeit viele einfache qualitativ-quantitative Inhaltseinheiten entstehen können, diese Wirklichkeit so gefasst werden muss, dass es ihr wirklich ganz gleichgültig ist, wieviel Theile von ihr abgelöst und ihr wieder hinzugefügt werden, man muss also offenbar voraussetzen, dass diese qualitätslose Wirklichkeit, da sie einig und einzig ist, aktuell genommen absolut ungetheilt, aber potentiell genommen eben in's Unendliche theilbar ist, und dass von ihr gleichzeitig viele Theile abgetrennt und wieder mit ihr vereinigt werden können, ohne dass sie dadurch im geringsten ihre aktuelle Natur verändert. Sobald man sie aber so fasst, muss sie auch in den vielen Augenblicken der aufeinanderfolgenden Veränderungen eine und dieselbe bleiben. Denn können von ihr zugleich viele Theile

abgetrennt werden *ohne* dass sie ihre aktuelle Natur ändert, dann bleibt sie offenbar von der Veränderung selbst völlig unbetroffen, sie selbst setzt ihre Existenz fort und bleibt im nächsten Augenblicke ganz dieselbe die sie in dem früheren war. Sobald also die vielen simultanen Veränderungen eine und dieselbe qualitätslose Wirklichkeit zu ihrem Substratum haben, muss diese Wirkliehkeit auch das Substratum aller successiven Veränderungen sein.

Wie kann, so wird man nun fragen, das Entstehen so vieler Seinsinhalte aus dieser einen einzigen Wirklichkeit erklärt werden, wenn diese Wirklichkeit selsbt dabei absolut unvergänglich sein und bleiben soll? Es ist wahr, sobald wir uns diese qualitätslose Wirklichkeit nur deshalb voraussetzen, weil wir das unmittelbare Übergehen des einen Seinsbestandtheils der qualitativ-quantitativen Wirklichkeit in den anderen deshalb nicht denken können, weil sie gleichartig sind, müssen wir ja diese qualitätslose Wirklichkeit so fassen, dass sie von der qualitativen toto genere verschieden wird. Und doch, sobald wir sie wirklich so fassen, scheint sie nicht mehr fähig zu sein, die Umwandlungen der einzelnen Seinsbestandtheile der qualitativen Wirklichkeit zu vermitteln! Denn wirklich scheint es schwierig zu sein, eine solche Wirklichkeit sich zu denken, die, indem sie sich in etwas anderes umwandelt, selbst unwandelbar bleibt, es scheint, dass, wenn sie sich in etwas anderes verwandelt, dass sie eben dadurch selbst verschwindet? Haben wir nicht, indem wir eine solche seltsame Wirklichkeitsart voraussetzten, den Widerspruch im Begriffe des Werdens, dessen Thatsache wir nun einmal anerkannt haben, nur hinausgeschoben, nicht aufgehoben, nur aus dem Reiche der qualitativen in dasjenige der qualitätslosen Wirklichkeit hinübergetragen? Eine Wirklichkeit, die selbst wirklich bleibt, indem sie sich in etwas anderes umgewandelt hat, scheint das nicht eine contradictio in adjecto zu sein, ein schreienderer und grellerer Widerspruch als selbst derjenige des absoluten Werdens, dem wir damit entgehen wollten? Und thatsächlich, würde der Versuch diese Wirklichkeit widerspruchslos zu denken, misslingen, dann müssten wir ihre Voraussetzung fallen lassen, und das absolute Werden sammt allen seinen Unbegreiflichkeiten gelten lassen?

Aber so schwierig auch die Entdeckung des widerspruchslosen Begriffs einer solchen Wirklichkeit sein mag, derselbe muss doch existieren, wenn sich unser logisches Denken nicht für bankerott erklären will. Und thatsächlich, sobald man die Eigenthümlichkeit der logischen Structur der vielheitlich-mannigfaltigen Welt gefasst hat, sobald kann man sich einen widerspruchslosen Begriff von jener

davon toto genere verschiedenen qualitätslosen Wirklickeit machen. Schon der Weg durch den wir zu dieser Fassung des Begriffs der qualitätslosen Wirklichkeit gelangten, zeigt uns den weiteren Weg, auf dem wir diesen Begriff so formulieren können, dass er völlig widerspruchslos wird. Wir brauchen dazu nicht unseren Untersuchungen in den nächsten drei Kapiteln vorzugreifen, in denen die discrete und endliche Structur dieser unseren qualitativ-quantitativen Welt nachgewiesen werden wird, in denen nachgewiesen werden wird, dass ihre erste formale Kategorie, nämlich die Zeit, aus einer endlichen Anzahl von untheilbaren Zeitmomenten besteht, und ebenfalls für den Raum, dass er endlich und begrenzt und aus einer endlichen Anzahl von untheilbaren realen Raumpunkten besteht, und für die Bewegung, dass sie ein Maximum von Geschwindigkeit besitzt und vollkommen discontinuirlich ist, dass also die qualitative Wirklichkeit ihrer quantitativen Natur nach völlig discret, discontinuirlich und endlich ist, und dass etwas continuirliches im Reiche derselben absolut nicht angetroffen werden kann. Aus den Ausführungen des vorigen Kapitels erhellt ja zur Genüge, dass diese qualitative Wirklichkeit durch Negationsbeziehung gesetzt und dass sie als solche aus letzten untheilbaren Theilen bestehen muss. Wenn nun letzten Endes alle Quantität aus letzten untheilbaren Theilen bestehen muss, mag die Zahl dieser Theile auch unendlich, und dieses Unendliche unendliche Male unendlich sein, es wird auch damit die discrete Natur der qualitativ-quantitativen Wirklichkeit nicht im geringsten angetastet werden. Damit ist aus der qualitativ-quantitativen Wirklichkeit eben nur das Eine und zwar vollständig und absolut ausgeschlossen: und dieses Eine ist die absolute Continuität. Das absolute Continuum schliesst, wie wir dies in den nächsten zwei Kapiteln eingehend nachweisen werden, alle sowohl endliche als unendliche Theilung aus, das absolute Coutnuum bedeutet den absoluten Mangel, den absoluten Ausschluss aller Getheilheit in Theile, ganz gleichgültig, ob die Anzahl dieser Theile als unendlich oder als endlich angenommen wird, das Continuum fehlt also im Reiche der qualitativen Wirklichkeit vollkommen, da diese Wirklichkeit durch Beziehungen gesetzt, und Beziehungen notwendigerweise schliesslich einfache untheilbare Bestandtheile voraussetzen. Der Begriff des Continuums ist in der Mathematik und der Philosophie gebildet worden, um den Begriff des aktuell-Unendlichen zu vermeiden: wird die reelle Getheiltheit im Seienden (resp. im Raume und in der Zeit) zugegeben, dann muss man die wirklichke vollendete Unendlichkeit von Theilen anerkennen, und diese Unendlichkeit ist ein Widerspruch

in sich; deshalb setzt man an Stelle des aktuell-Unendlichen das potentiell-Undliche, dasjenige also was keine getheilten Theile enthält, aber gerade deshalb ein Continuum und kein Discretum ist. Der Begriff eines Continuums als eines etwas, das nur potentiell in's Unendliche theilbar, aber aktuell nicht in eine unendliche Anzahl von Theilen getheilt ist, ist nun wirklich kein Wiederspruch, nur darf man dann die wirklich in reelle Theile getheilte qualitative Wirklichkeit nicht für ein solches Continuum ausgeben, was jedoch so oft geschieht.

Haben wir nun so einen ganz widerspruchslosen Begriff von einer besonderen Art der Wirklichkeit, und können wir doch die uns gegebene vielheitlich-mannigfaltige Wirklichkeit unter jenem Begriffe nicht fassen, so muss dann eben jener Begriff mit dem gesuchten Begriffe der qualitätslosen Wirklichkeit zusammenfallen. Und thatsächlich ist dem so. Wenn jene qualitätslose Wirklichkeit im Gegensatz zu der discreten Natur der qualitativen Wirklichkeit als ein absolutes Continuum aufgefasst wird, was notwendigerweise geschehen muss, sobald sie als vollkommen theillos aufgefasst wird, dann ist uns jenes Verschwinden der Qualitätsinhalte in dieselbe und ihr Entstehen aus derselben, ohne dass sie selbst dabei vergeht oder entsteht, ganz begreiflich. Die qualitätslose Wirklichkeit als Continuum bildet ein einheitliches absolut ungetheiltes Wesen, das als solches aber doch nicht ohne eine potentielle Möglichkeit der Theilung ist: als solche enthält die qualitätslose Wirklichkeit absolut gar keine Theile, sie ist völlig quantitätslos, wenn unter dem Quantum das discrete Quantum verstanden wird. In dem zweiten Kapitel des ersten Unterabschnitts im nächsten Abschnitt (über den Raum und die Zahl) werden wir sehen, dass ein extensives Continuum absolut unmöglich ist. Aber selbst wenn ein extensives Continuum möglich und denkbar wäre, könnte die absolute Substanz dieses extensive Continuum (in welchem Falle sie mit dem absoluten leeren Raume identisch wäre) nicht sein: denn kein Theit dieses extensiven Continuums kann von ihm abgelöst werden, ohne dass dadurch in dem Continuum eine leere d. h. absolut nichtseiende Lücke verbliebe, was jedoch unmöglich ist, da das Nichtseiende eben nicht existiert. Kann die absolute Substanz kein extensives, so muss sie als intensives Continuum gedacht werden. In der That werden wir in dem zweiten Unterabschnitt des nächsten Abschnitts sehen, dass das intensive Discretum im Reiche der vielheitlich-mannigfaltigen Wirklichkeit nur deshalb möglich ist, weil im Princip das intensive Continuum möglich ist. Das Aussereinander der Theile bringt nämlich mit Not-

wendigkeit das Getrenntsein der Theile mit sich, während das Ineinander der Theile kein Getrenntsein derselben mit sich bringt, sondern diese ursprünglich ganz wohl als absolut ungetrennt gedacht werden können. Die Thatsache des intensiven Discretums im Reiche der empirischen Wirklichkeit zeigt die logische Möglichkeit und Notwendigkeit des intensiven Continuums, und so wird die absolute Substanz, da sie als das absolute Continuum gedacht werden muss, mit diesem intensiven Continuum zusammenfallen. Wenn nun aus diesem absoluten Continuum ein Theil sich ablöst und in den Qualitätsinhalt sich umwandelt, so hat sich dabei ein Theil von dem Ganzen abgelöst, der als aktueller Theil im Ganzen zuvor nicht war, sondern im Acte seines Entstehens sich erst ablöst; und wenn ein Qualitätsinhalt sich in die qualitätslose Wirklichkeit umwandelt, so wird das Continuum um ein Theil vermehrt, der nach dem Vergehensacte nicht mehr in ihm als actueller Theil ist. Das bedeutet aber nichts anderes als dass durch diesen Zufluss eines Theils aus der discreten Wirklichkeit in die continuirliche und durch jenen Abfluss aus derselben in die discrete, sich die continuirliche Wirklichkeit weder vermehrt noch vermindert hat, weil sie eben absolut theillos ist, und es ihr völlig gleichgültig ist, ob sie einen Theil in sich aufnimmt oder einen von sich abtrennt, sie ändert ja ihre actuelle wirkliche Natur dadurch gar nicht. Und darin besteht eben ihre wunderbare Natur. So viele Theile wir uns von diesem absoluten Continuum abgenommen auch denken mögen, das Continuum hat sich dadurch absolut nicht vermindert, denn seine Theilbarkeit hat keine Grenzen, und der abgetrennte Theil verhält sich zu der zurückgebliebenen Realität wie das Unendlich-kleine der kleinsten Ordnung zu dem Unendlich-grossen der höchsten Ordnung, es ist also im Verhältniss zu diesem fast absolut nichts. Wenn das Continuum wirklich in diese unendlich viele unendliche Reihen von Theilen getheilt wäre, dann könnte wohl davon die Rede sein, dass es sich durch den Zugang (resp. Abgang) auch des kleinsten Theils vermindert oder vermehrt, so unendlich klein diese Verminderung und Vermehrung auch wäre. Dagegen wenn das Continuum etwas absolut theilloses ist, dann geht siene potentielle Theilung wirklich in alle Unendlichkeiten absolut und ohne jedes Ende fort, und so unendlich gross der verwirklichte resp. der in Qualität umgewandelte Theil jenes Continuums auch sein mag, das Continuum hat dadurch absolut nichts von seiner Realität eingebüsst. Man sieht also wirklich, dass wir einen widerspruchslosen Begriff haben, durch den wir uns jene wunderbare Natur der qualitätslosen Wirklichkeit zu denken vermögen, einen Begriff, der vollkommen fähig ist,

uns aus jenem grundlegenden Dilemma unseres Denkens wahrhaft zu erlösen.

So unbegreiflich nun manchem auch nach Auffindung dieses widerspruchslosen Begriffs der absolut continuirlichen Natur der qualitätslosen Wirklichkeit diese letztere noch immer erscheinen mag, so muss er doch, wenn er nur consequent genug sein will, dieselbe anerkennen. Denn sonst muss man durchaus das absolute Werden als solches, d. h. das Vergehen in das absolute Nichtsein und das Entstehen aus dem absoluten Nichtsein zulassen, was jedoch durchaus unmöglich ist. Aber selbst wenn man es zuliesse, müsste man doch das absolute Nichtsein selbst in der Weise des absoluten Continuums denken. Das Nichtsein hat absolut keine Theile, und wenn sich ein Theil von ihm ablöst oder ein neuer Theil zu ihm hinzugefügt wird, so wird sich dasselbe weder vermehren noch vermindern. Und nun frage ich: was ist logischer, eine eigenthümliche besondere Wirklichkeitsart vorauszusetzen, die als absolutes Continuum zu fassen ist, oder das absolute Nichtsein als dieses absolute Continuum zu betrachten. Der Vertreter des absoluten Werdens wird allerdings behaupten, dass die zweite Voraussetzung logischer ist: das absolute Continuum ist undenkbar und es ist natürlich, dass das absolute Nichtsein als das Undenkbare in der Form des absoluten Continuums erscheint. Dem Vertreter des absoluten Werdens kann man aber antworten: daraus, dass das absolute Nichtsein undenkbar ist, folgt nicht dass das absolute Continuum als seine Form undenkbar ist, das absolute Continuum kann ganz gut etwas denkbares sein, und wenn wir an Stelle des absoluten Nichtseins eine besondere Wirklichkeitsart setzen, die in der Form der Continuität erscheint, dann haben wir der denkbaren Form einfach einen denkbaren Inhalt gegeben. Und wir sind genöthigt dies zu thun, weil das Werden sicherlich als Thatsache existiert und doch das absolute Werden nicht denkbar ist. Nur wenn Bewusstseinsinhalte keine ansichseienden Realitäten wären, nur dann wäre das Werden keine wirkliche Thatsache und die Voraussetzung der qualitätslosen Wirklichkeit wäre nicht nöthig. Denn wenn Bewusstseinsinhalte scheinbare Inhalte wären, so enthielten sie als Schein das Nichtseiende schon in sich und im Zustande des Werdens würden sie sich nur gleichsam von der Hülle des täuschenden Seins befreien, um in das absolute Nichtsein völlig und absolut hinüberzugehen. Sobald aber der Schein aus dem Reiche der Wirklichkeit nur deshalb ausgeschlossen wird, weil das Nichtsein als das Undenkbare aus diesem Reiche ausgeschlossen wird, ist auch das absolute Werden aus diesem Reiche völlig ausgeschlossen.

Dasselbe ist aber nur durch die Voraussetzung der qualitätslosen Wirklichkeit völlig aus dem Reiche der Wirklichkeit ausgeschlossen, und so muss ihre Existenz als eine absolute Notwendigkeit anerkannt werden.

Jene qualitätslose Wirklichkeit nun, deren Existenz sich uns aus dem Begriffe des Werdens mit absoluter Notwendigkeit ergeben hat, ist nichts anderes als die von fast allen Metaphysikern mit so einer Hartnäckigkeit ohnegleichen behauptete absolute Substanz. Diesen Begriff der Substanz als eines absolut unwandelbaren realen Substratums der wandelbaren quantitativ-qualitativen Erscheinungswelt haben zuerst die Eleaten in seiner Abstraktheit gefasst: sie waren wohl nicht fähig bei ihm völlig von dem Begriffe der Einheit im quantitativen Sinne zu abstrahieren, aber die Qualität hatten sie schon von demselben abgestreift. Plato ist der erste Denker, der vermuthlich diese absolut qualitätslose Substanz in die Philosophie eingeführt hat. Da es aber höchst wahrscheinlich ist, dass derselbe unter der „Hyle“ als dem einheitlichen Substratum der veränderlichen Erscheinungswelt den leeren Raum gemeint hat, so ist es erst Aristoteles, der mit genügender Klarheit und genialem Blick den springenden Punkt entdeckte, der zu dieser qualitätslosen Substanz führt und zugleich die Art und Weise ihrer Realität zu bestimmen suchte. Da das Werden der reinen Qualitäten als solchen, die als reine logische Wesenheiten absolut unveränderlich sind („die Formen sind unbeweglich“, sagt Aristoteles), nicht möglich, und der Übergang der einen Qualität in die andere undenkbar ist, so muss die reine qualitätslose Materie vorausgesetzt werden, in die die Qualitäten verschwinden und aus der sie wieder entstehen. Diese aristotelische Auflösung des Werdensproblems ist im Grunde ganz richtig, nur hat Aristoteles die qualitätslose Materie, die jenes notwendige Substratum, jene notwendige Vermittlerin bei jedem Werden ist, nicht so zu bestimmen gewusst, dass das Werden der Qualitäten selbst vollkommen begreiflich wird. Deshalb ist diese seine Auflösung des Werdensproblems in der Geschichte der Metaphysik gänzlich unbeachtet geblieben, und doch kann man sie mit Recht für seine grösste Leistung erklären, eine Leistung die ihn seinem dialektischen Geiste nach hoch über alle seine Vorgänger hinaushebt. Aristoteles bestimmt dieses Substratum ganz richtig als völlig bestimmungslos, was in seiner reinen Potentialität den Ausdruck findet. Dagegen hat er seine quantitative Natur gänzlich missverstanden: denn er sucht in der reinen Materie als solcher das Individuationsprincip, und doch liegt dieses gerade in der Materie als solcher nicht, sondern kann nur in einem der reinen

Form d. h. der qualitativ-quantitativen Wirklichkeit als solcher angehörenden Princip liegen (in dem von uns aufgestellten Negationsprincip). Diesen Grundfehler des aristotelischen Materiebegriffs hat keiner von seinen Nachfolgern bemerkt, und deshalb ist jene aristotelische Auflösung des Werdensproblems völlig unbeachtet und unfruchtbar geblieben. Zwar haben sich die Scholastiker viel mit dem aristoletischen Materiebegriff herumgeplagt; aber unfruchtbar wie sie waren, konnten sie ihm keine neue Seite abgewinnen. Die neuere Philosophie in ihren ersten und grössten Vertretern, Descartes, Spinoza und Leibniz, hat die Bedeutung der Substanz als reiner absolut qualitätslosen Realität im Sinne des Aristoteles nicht zu wahren vermocht, sie dachte sich die Substanz immer mit einer besonderen Qualität behaftet (materielle und seelische Substanz Descartes'; die absolute Substanz Spinoza's, so sehr sie von demselben, nach seinen rein formalen Definitionen urtheilend, auch in rein aristotelisch[illegible] Sinne aufgefasst zu sein scheint, ist doch am Ende allzusehr mit ihren qualitativ-attributiven Bestimmungen verquickt; Leibniz [illegible] seine Seelensubstanz nicht genügend von ihren beiden attributiven Bestimmungen — appetitus et percepitio — zu trennen gewusst, und deshalb hat er die Substanz geradezu als Thätigkeit — Energie und Entelechie — aufgefasst); die Empiriker Locke und Hume haben, indem sie den Substanzbegriff bekämpften, unter Substanz immer jene reine qualitätslose Materie des Aristoteles verstanden; Berkeley, der die Seelensubstanz rein qualitativ (als reine Bewusstheit) auffasst, hat die Substanz im Sinne des Aristotelees ebenfalls bekämpft; die nachkantische Metaphysik (Kant hat den Substanzbegriff im Gebiete der Erscheinungswelt nicht als ein reelles Substratum der subjectiven Empfindungswelt, sondern als einen blossen formalen Kategorialbegriff betrachtet) hat entweder diesen Begriff sowohl in seinem reinen wie in seinem qualitativen Sinne völlig abgelehnt (Fichte, Schelling, Hegel, Lotze und neuerdings Wundt) und an seine Stelle den Begriff des absoluten Werdens oder der Thätigkeit gesetzt, oder sie hat ihn (Herbart) wieder in jenem qualitativen Sinne erneuert (wir haben gesehen, dass Herbart unter der Substanz die absolut einfache qualitative Einheit versteht). Die einzige Ausnahme unter den nachkantischen Metaphysikern und unter den neueren Philosophen überhaupt bildet Ed. v. Hartmann (sich übrigens in diesem Punkte auf die spätere Schelling'sche positive Philosophie stützend), der den Substanzbegriff in seiner ganzen Abstraktheit gefasst hat. Er unterscheidet klar das reine bestimmungslose Wesen der Substanz von ihren qualitativen Bestimmungen der beiden Attribute, nur dass

er diese Substanz für starr und an sich leblos d. h. für den blossen Träger und nicht für den Producenten der Wirklichkeit hält, wie das übrigens bei allen anderen Philosophen ausser Aristoteles der Fall ist.*)

Dass die absolute Substanz schon als rein passiver Träger der qualitativ-quantitativen Wirklichkeit existieren muss, hat man seit jeher behauptet und als Grund dafür angeführt, dass sie als das Subject der qualitativen Bestimmungen notwendigerweise existieren müsse, oder auch dass sie als das beständige Substratum der Veränderungen bestehen müsse (die Accidenzien wechseln, die Substanz bleibt), und in beiden Hinsichten wird die Substanz allein als das wahrhaft Seiende, während ihre Bestimmungen (Accidenzien) für so flüchtig und bestandlos gelten, dass sie ganz wohl absolut aus dem Nichtsein entstehen und in's Nichtsein vergehen können, ohne dass dadurch die beständige Substanz selbst irgendwie tangiert wird. So notwendig nun auch die Existenz der absoluten Substanz ist, auch wenn sie so als rein passiver Träger gefasst wird, ihre qualitativen Bestimmungen dürfen doch gar nicht für so flüchtig und nichtig angesehen

*) Die reale vielheitlich-mannigfaltige Erscheinungswelt ist nach Hartmann das Product der beiden Atribute der absoluten Substanz, des Willens und der Idee, die vor ihrer Verwirklichung im Reiche der uns gegebenen Wirklichkeit ein rein potentielles wandelloses Dasein führten. Das Attribut des Willens stellt das alogische, dem Widerspruchssatze nicht gehorchende Princip, während das Attribut der Idee allein diesem Princip unterworfen ist. Das widerspruchsvolle Werden hat seinen Ursprung in dem alogischen Willenswesen, und das Logische tritt in die Aktualität nur, um sich gegen diese antilogisch gewordene alogische Natur des Willens zu wehren. Die absolute Substanz selbst ist etwas metalogisches, etwas über den Gegensatz des Logischen und Alogischen erhabenes. Weil für Hartmann die Substanz nur dazu da ist, um das notwendige passive Substratum der beiden attributiven Bestimmungen herzugeben, vermag er in ihr nicht das Mittel zur Ausschliessung des antilogischen Elements in der Realität zu erblicken: sobald aber die absolute Substanz als der active Producent der attributiven Wirklichkeit aufgefasst wird, verschwindet die Notwendigkeit des antilogischen Elements in der Realität vollständig. Hartmann's Theorie des Logischen und Antilogischen stellt von einem gewissen Standpunkte aus einen Fortschritt gegenüber der widerspruchsvollen Logik Hegel's dar: wenn schon der Widerspruch in der Natur der Dinge bestehen soll, so scheint es besser zu sein, das Antilogische einem besonderen Princip zuzuschreiben, als dasselbe mit dem Logischen völlig zu vermischen; und einem metaphysischen Denken, das darauf gerichtet ist, die empirische Wirklichkeit möglichst empirisch zu erklären, wird das plausibel und berechtigt erscheinen. Ein strenges metaphysisches Denken dagegen wird die Doctrin Hegel's logischer und einheitlicher finden, obgleich sie inhaltlich völlig unhaltbar ist. Jene hartmann'sche Trennung hat in Wahrheit nur insofern einen Werth, inwiefern sie das Denken dahintreibt, in einem besonderen Princip den Ursprung des Werdens aufzusuchen, welches Princip aber nicht in dem antilogischen Willen, sondern einzig und allein in der absoluten qualitätslosen Substanz gefunden werden kann.

werden. Nach unserem metaphysischen Hauptprincip der absoluten Realität jedes Seinsinhalts müssen die angeblichen Bestimmungen der absoluten Substanz, an und für sich betrachtet, ganz ebenso absolut seiende Seinsinhalte sein wie die Substanz selbst, und in dieser Hinsicht hat die absolute Substanz absolut keine höhere Rangstufe des Seins. Wenn demnach die absolute Substanz der passive Träger jener Qualitäten sein soll, so muss es in der *besonderen Struktur* der qualitativen Wirklichkeit selbst liegen, wenn sie diese Substanz als ihren Träger erfordert. Und thatsächlich ist dem so. Wenn zwei Qualitäten als zwei nur durch das trennende Negationsprincip bestehen können, dann muss man wohl voraussetzen, dass dieser Negationsact sich selbst unmittelbar von den beiden Beziehungspunkten trennt. Die beiden Beziehungspunkte sind voneinander getrennt durch den Negationsact, der Negationsact selbst ist aber unmittelbar von den Beziehungspunkten getrennt, es muss also offenbar ein etwas da sein, welches einerseits den Negationsact mit den getrennten Beziehungspunkten und andererseits eben dadurch diese selbst miteinander vereinigt; und diese vereinigende Wesenheit ist nun nichts anderes als die vorausgesetzte absolute Substanz selbst. Denn als vereinigendes Princip kann sie in sich keine Vielheit und Mannigfaltigkeit enthalten, alle die vielen Negationsacte als solche sammt ihren entsprechenden Beziehungspunkten sind durch diese eine vereinigende Wesenheit miteinander vereinigt. Und wie es keines neuen Negationsactes bedarf, der den einfachen zwei Beziehungspunkte voneinander trennenden Negationsact von diesen Beziehungspunkten trennte, sondern die beiden unmittelbar voneinander getrennt sind, ebenso bedarf es keines neuen vereinigenden Princips, welches nun seinerseits die vereinigende Substanz mit den beiden Seinsinhalten, die sie vereinigt, vereinigte: diese beiden sind unmittelbar miteinander vereinigt, und erst dadurch kommt der Negationsact dazu die beiden Beziehungspunkte wirklich zu trennen und sie zugleich miteinander zu vereinigen. Auf dieses Verhältniss der drei Wirklichkeitsarten zueinander werden wir erst in dem dritten Abschnitte der Ontologie näher eingehen können, hier genügt es festgestellt zu haben, dass die absolut teillose Substanz als vereinigendes Princip der notwendige passive Träger der qualitativ-quantitativen Wirklichkeit ist.

Die absolute Substanz ist aber, tiefer besehen, nicht bloss der notwendige passive Träger der qualitativ-quantitativen Wirklichkeit, sondern auch ihr activer Träger in einem noch viel tieferen Sinne als wir dies bis jetzt festgestellt haben. Nicht nur dass bei jeder qualitativen Änderung Theile jener qualitativ-quantitativen Wirklich-

keit in diese absolute Substanz vergehen und wieder entstehen, d. h. von ihr produciert werden, sondern die gesammte qualitative Wirklichkeit stellt ein beständig-zeitloses Product der absoluten Substanz dar. Diese Behauptung wird auf den ersten Blick völlig sinnlos erscheinen: wie kann man von zeitloser Production der Wirklichkeit sprechen, da doch der Begriff der zeitlosen Production eine heillose contradictio in adjecto zu sein scheint. Entweder müsste man annehmen, dass die qualitativ-quantitative Wirklichkeit in jedem Augenblicke in die absolute Substanz zurückgeht, um in dem nächsten wieder daraus zu entstehen, dann wäre sie wohl das beständige Product dieser absoluten Substanz, aber kein zeitloses Product derselben. Aber diese Annahme lässt sich nicht aufrechterhalten, sie widerspricht gänzlich der Erfahrung, ganz abgesehen von den logischen Ungeheuerlichkeiten, die sie enthält (einerseits ist nicht zu begreifen, wieso die absolute Substanz dazu kommen soll, wenn sie in dem einen Augenblicke die gesammte qualitative Wirklichkeit verschlingt, dieselbe in dem nächsten Augenblicke zu producieren, und andererseits ist ja, wie das erste Kapitel des nächsten Abschnittes zeigen wird, eine anfanglose Succession von Veränderungen unmöglich). Wenn es beständige Seinsinhalte der qualitativen Wirklichkeit giebt, wenn diese Wirklickkeit auch ganz ohne Veränderung gedacht werden kann (so war sie vor dem Anfang der Veränderung), so muss sie dann, wenn sie ein wirkliches Product der absoluten Substanz ist und sein soll, zeitloses Product derselben sein. Wir müssen also den Begriff des zeitlosen Producierens offenbar als solchen ermöglichen, wenn uns das Bestehen der qualitativen Wirklichkeit begreiflich sein soll. Nun offenbar werden wir, wenn das schon möglich sein soll, dies nur so thun können, dass wir das Eigenthümliche des zeitlichen Producierens zunächst feststellen.

Wenn ein qualitativer Inhalt oder ein realer Negationsact in das Nichtsein hinübergeht, d. h. wenn er in die absolute Substanz selbst hinübergeht, und wenn er dann aus dieser absoluten Substanz selbst wieder entsteht, so ist offenbar dieses sein Vergehen in die Substanz und dieses sein Entstehen aus der Substanz der zunächst gesuchte Begriff der zeitlichen Production selbst. In erster Reihe ist dies freilich nur der Entstehungsact des qualitativen Inhalts aus der absoluten Wirklichkeit als solcher; aber in zweiter Reihe ist dies auch der Vergehensact, weil derselbe ja, nur auf indirectem Wege, die Möglichkeit der zeitlichen Production aus der absoluten Substanz beweist. Worin besteht nun und was ist eingentlich dieser Entstehungs- resp. dieser Vergehensact als solcher, was ist, um die

Frage allgemein zu stellen, der Veränderungsact überhaupt? Die Veränderung (resp. Veränderlichkeit) ist neben der Beständigkeit (Unverändertbleiben) die Zustandskategorie am Seienden und wir fragen nun, ob diese Kategorie zu den formalen oder zu den realen zu rechnen ist, ob mit anderen Worten der Veränderungsact nicht ein blosses nichtiges Verhältniss darstellt, etwa so wie das Nebeneinander, wie das Nacheinander, wie die reine Identität mit sich blosse Verhältnisse sind, oder ob dasselbe nicht ebenso etwas Reales darstellt, wie die Negationsbeziehung etwas reales ist, wie die Qualität, wie die Substanz etwas reales ist? Die Frage, die ich hiermit stelle, scheint mir völlig neu zu sein. Denn wenn man bisweilen anstatt des absoluten Werdens die Thätigkeit, oder die Bewegung für das ursprünglich Seiende erklärt hat, während das sogenannte inhaltliche (qualitativ-quantitative) Sein ein blosses secundäres Product jenes Thätigkeitsseins sein sollte, hat sich dieses Letztere am Ende immer als das absolute Werden selbst entpuppt. Und deshalb eben scheint es mir, dass das was ich hier in Bezug auf die Realität des Veränderungsactes behaupte und behaupten will, wenn ich mich nicht irre, etwas durchaus Neues ist. Ich behaupte also dass der Veränderungsact als solcher etwas Reales ist, ein etwas dessen Realität mit derjenigen des sich ändernden qualitativ-quantitativen Inhalts völlig unvergleichbar ist, aber doch ein etwas, das ganz ebenso eine Essenz, einen Inhalt in sich hat, wie dieser sich ändernde qualitative Inhalt. Diese Behauptung wird auf den ersten Blick so sinnlos erscheinen, dass ich sie eingehend begründen muss, wenn sie wirklich sinnvoll und richtig erscheinen soll. Ich muss meinem Leser, der wenig auf metaphysische Untersuchungen gewöhnt ist, hier wieder einmal in Erinnerung bringen, dass man sich in der Regel bei solchen Untersuchungen ganz und gar von der gewöhnlichen Anschauungweise der Dinge emancipieren müsse, dass wir da die letzten Seinsverhältnisse und Seinsprincipien suchen, die offenbar ganz anders aussehen müssen, wenn sie wirklich letzte Principien der uns so bekannten Dinge sein sollen, als diese Dinge selbst. Ich frage also, was ist wohl der Veränderungsact als solcher? Ist er ein Etwas oder ein Nichts? Offenbar muss er ein Etwas sein, da das Nichts eben dasjenige ist, was gar nicht besteht, was gar keinen essentialen Inhalt in sich hat. Ein reines Verhältniss, wofür gewöhnlich der Veränderungsact gilt, hat als solches gar keinen essentialen Inhalt, ist als solches wirklich ein Nichts, und bedeutet in Wahrheit nichts anderes als die Beschreibung einer nackten Thatsache, ohne selbst irgend etwas besonderes dabei zu sein. Veränderungsact ist offenbar etwas reales, etwas was nicht

einfach eine Thatsache sozusagen beschreibt, sondern was in die Wirklichkeit der Dinge etwas wesentlich neues bringt. Man denke sich das Seiende als ruhig und unbewegt und plötzlich bringe man in demselben eine Veränderung hervor: offenbar ist die Veränderung als solche, d. h. der Veränderungsact, etwas, was zuvor nicht da war, ein Etwas das in jener ruhenden Wirklichkeit eine Änderung herbeigeführt, und nun frage man sich ernstlich, ob der Veränderungsact so etwas für sich genommen ganz nichtiges ist, wie man sich ihn gewöhnlich denkt, und man wird sicherlich, sobald man sich genügend in diesen Sachverhalt vertieft hat, anerkennen, dass er ein besonderes Etwas im Reiche der Wirklichkeit darstellt. Wäre der Veränderungsact ein Nichts, so könnte derselbe auch keine Änderung in der Wirklichkeit herbeiführen, denn Nichts ist Nichts, bleibt Nichts und bringt Nichts hervor: folglich kann der Veränderungsact nicht ein inhaltsloses Nichts sondern muss ein inhaltliches Etwas sein, folglich ist der Veränderungsact eine besondere von allen anderen inhaltlichen Wesenheiten (ausser vielleicht der realen Negationswesenheit)toto genere verschiedene Wirklichkeitsart. Während der reale qualitative Inhalt besteht, *ist*, kann die Existenzart des Veränderungsactes nur als reines *Geschehen* bezeichnet werden, die Veränderung geschieht, und in diesem Geschehen besteht ihre eigenthümliche Wirklichkeitsart.

Die geschehende Wirklichkeitsart des Veränderungsactes muss, wie sie hier charakterisiert worden ist, streng von derjenigen des sogenannten absoluten Werdens unterschieden werden. Wenn das absolute Werden und Geschehen, als das beständige Übergehen des Seins in das Nichtsein und umgekehrt, für die wahre Form der Wirklichkeit erklärt wird, so ist damit jene unsere geschehende Wirklichkeit noch gar nicht gegeben, oder, besser gesagt, sie wird gegeben und ist gegeben, aber sie wird nicht als solche erkannt und anerkannt. Denn kein Vertreter des absoluten Werdens und Geschehens als der ursprünglichen Wirklichkeitsform hat sich jemals die Frage gestellt, was denn jener Act des Überganges des Seins in's Nichtsein selbst ist und worin er besteht: sobald man diese Frage stellt, vervielfacht sich das Problem des Werdens, denn nun haben wir nicht nur den Übergang des Seins in's Nichtsein und umgekehrt vor sich, sondern wir müssen nunmehr weiter fragen, woraus der Übergangsact beider selbst entsteht resp. vergeht. Nimmt man an, dass derselbe aus dem Nichtsein entsteht und in's Nichtsein hinübergeht, dann ist das absolute Werden auch auf ihn selbst angewandt, nur muss man annehmen, um den regressus in infinitum zu vermeiden, dass es weiter keinen Übergangsact mehr giebt, durch

den der Übergangsact selbst in's Nichtsein hinübergeht und aus dem Nichtsein entsteht, sondern dass der Übergangsact des Übergangsactes in dem Übergangsacte als solchem liegt. Setzt man dies voraus, dann besteht der wahre Kern der geschehenden Wirklichkeit des absoluten Werdens in der von uns charakterisierten Wirklichkeitsart des realen Übergangsactes; aber auch wenn man jenen Widerspruch des regressus in infinitum bestehen lässt, läuft die Sache doch auf dasselbe hinaus. Sobald man aber ein Übergehen des Seins in's Nichtsein nicht zulässt, kann man auch das Übergehen des Übergangsactes selbst in's Nichtsein nicht zulassen, und dann hat man die *geschehende Wirklichkeit vor sich ohne das absolute Werden vor sich zu haben.* Das absolute Werden und die geschehende Wirklichkeitsart fallen und müssen also gar nicht miteinander zusammenfallen, sobald man sich klar und deutlich zum Bewusstsein gebracht hat, worin die geschehende Wirklichkeitsart besteht: das absolute Werden kann ohne die geschehende Wirklichkeitsart des Übergangsactes nicht gedacht werden, da das Eigentlich-Geschehende in ihm am Ende nur diese geschehende Wirklichkeit selbst ist; die geschehende Wirklichkeitsart dagegen kann ganz wohl auch ausserhalb des absoluten Werdens bestehen, und das ist dasjenige was ich hier wohl zum ersten Male vortrage, und dessen enorme Wichtigkeit bald nachgewiesen werden wird.

Wenn wir nun so den Veränderungsact als eine besondere Wirklichkeitsart, als die geschehende Wirklichkeitsart erkannt haben, so werden wir nunmehr auch das zeitliche Producieren der qualitativen Seinsinhalten aus der absoluten Substanz verstehen. Durch den Entstehungsact wird ein qualitativer Seinsinhalt aus der absoluten Substanz produciert, durch den Vergehensact wird derselbe in die Substanz zurückgebracht. Wenn nun der Entstehungs- resp. der Vergehensact eine besondere Wirklichkeitsart ist, dann muss man offenbar voraussetzen, dass derselbe auch selbst aus der absoluten Substanz entsteht resp. vergeht, es fragt sich nur noch ob dies sein Entstehen und Vergehen nicht wiederum eine besondere Wirklichkeitsart darstellt etc. in infinitum. Wenn das Entstehen des Entstehungsactes und das Vergehen des Vergehensactes wieder etwas wirkliches und neues wäre u. s. f. in infinitum, dann käme das Entstehen resp. das Vergehen überhaupt nicht zu Stande, da aber doch das Entstehen und das Vergehen unzweifelhaft etwas reales ist, bleibt nur die Voraussetzung übrig, dass der Entstehungsact durch sich selsbt entsteht, und dass der Vergehensact ebenso durch sich selbst vergeht. Das Entstehen eines qualitativen Inhalts aus der absoluten Substanz ist nicht mög-

lich ohne den besonderen Entstehungsact, der ihn gleichsam von dieser Substanz abtrennt und als abgetrennten Theil setzt; indem aber der Entstehungsact so den qualitativen Inhalt von der absoluten Substanz trennt, trennt er zugleich auch sich selber von ihr, man kann sich keinen neuen (resp. ein zweites Exemplar desselben) Enstehungsact denken, durch den jener Entstehungsact selbst entsteht, einerseits weil man dadurch einen regressus in infinitum hätte, und andererseits weil es überhaupt nicht möglich ist, dass der Entstehungsact selbst durch einen Entstehungsact entsteht, da Entstehung nur Entstehung von Etwas, was nicht selbst Entstehung ist, ist und sein kann; es muss also durchaus vorausgesetzt werden, dass der Entstehungsact in wahrem und vollkommenem Sinne dieses Wortes durch sich selbst entsteht (ganz dasselbe gilt für den Vergehensact).

Wenn nun der Entstehungs- resp. der Vergehensact selbst aus der absoluten Substanz entsteht resp. in dieselbe vergeht, so ist die Frage zu stellen, was mit dem Entstehungsacte eines qualitativen Inhalts geschieht, wenn er aus der absoluten Substanz zusammen mit dem letzteren entsteht, und woraus entsteht der Vergehensact eines qualitativen Seinsinhalts, wenn er zusammen mit dem letzteren selbst in die absolute Substanz zurückgeht. Wie man also sieht, ist der Entstehungsact als solcher ein Vergehensact, und der Vergehensact ein Entstehungsact, nur dass der eine gleichsam am Ende jener und der andere im Anfang dieser ist: denn der Enstehungsact des qualitativen Seinsinhalts ist nur insofern Entstehungsact inwiefern durch denselben dieser Inhalt aus der absoluten Substanz entsteht, zugleich aber ist er Vergehensact weil er ja selbst zu sein aufhört; der Vergehensact dagegen ist Vergehensact eines qualitativen Seinsinhalts insofern inwiefern dieser Inhalt durch denselben in die absolute Substanz vergeht, zugleich aber ist er Entstehungsact, weil er ja als solcher selbst entstehen muss, bevor er vergeht. Würde man nun annehmen, dass in der absoluten Substanz sowohl das Vergehen wie das Entstehen des Entstehungsactes und ebenso das Enstehen und Vergehen des Vergehensactes stattfindet, dann bestände offenbar gar kein Unterschied zwischen beiden und dann könnte auch das Entstehen der qualitativen Seinsinhalte und ihr Vergehen nicht mehr stattfinden. Denn wie soll ein Entstehungsact, wenn er in der absoluten Substanz entsteht, wissen, ob er nun einen qualitativen Theil von dieser Substanz ablösen oder ob er einen der schon bestehenden qualitativen Inhalte in diese Substanz hineinbringen soll, offenbar kann er das nicht, und offenbar muss das Entstehen des Entstehungsactes einen anderen Ursprung als das Entstehen des Vergehensactes, und das Ver-

gehen des Vergehensactes einen anderen als das Vergehen des Entstehungsactes haben.

Wo liegt nun dieser verschiedene Ursprung? Zunächst wird man ja ganz natürlich auf den Gedanken kommen, er liege für das Vergehen des Entstehungs- und das Entstehen des Vergehensactes in der qualitativen Wirklichkeit selbst, da ja die absolute Substanz einzig und allein der Ursprung des Entstehens des Entstehungs- und des Vergehens des Vergehensactes sein kann und es unzweifelhaft ist. Ich lasse andere tiefere Gründe bei Seite (wir werden dieselben erst in dem letzten Abschnitte der Ontologie teilweise aber auch in dem zweiten zur Sprache bringen) und führe nur einen Grund an, der vollkommen genügt, uns über diesen Ursprung zu belehren. Bei der Bewegung der qualitativen Seinsinhalte besteht keine qualitative Änderung und doch ist der Bewegungsact selber ein Veränderungsact, der sich als solcher von dem Veränderungsacte des qualitativen Werdens in gar nichts unterscheidet; dieser Veränderungsact entsteht offenbar nicht aus dem qualitativen Inhalte noch vergeht er in denselben, da gar keine Änderung des qualitativen Inhalts stattfindet; woher ist also der Veränderungsact in diesem Falle? Wenn nun unsere Ausführungen in dem vorigen Kapitel, wonach es reale Negationsacte giebt, die die einfachen Inhaltspunkte der qualitativen Wirklichkeit voneinander trennen, richtig sind und wenn, nach den Ausführungen in diesem Kapitel, die Bewegung in der Aufhebung dieser realen Negationsacte besteht, so kann offenbar der Entstehungsursprung des Veränderungs- resp. des Bewegungsactes nur in diesen realen Negationsacten selbst liegen, während dann ihr Vergehen unzweifelhaft in der absoluten Substanz selbst liegt. Ist dem nun so bei der Bewegung der Fall, so muss offenbar auch bei der qualitativen Änderung der qualitative Vergehensact den Ursprung seines Entstehens nur in den betreffenden Negationsacten haben. Während also das Ende des Vergehens- und der Anfang des Entstehungsactes in der absoluten Substanz liegt, liegt der Anfang des ersteren und das Ende des letzteren notwendigerweise in den realen Negationsacten. Hieraus ersieht man dass, sobald der Veränderungsact als eine Wesenheit besonderer Art aufgefasst wird, die Existenz der realen Negationsacte und der absoluten Substanz zu einer unabweisbaren Notwendigkeit wird, da Veränderungsacte, wenn sie etwas sind, nicht aus dem absoluten Nichts entstehen können, sondern notwendigerweise selbst aus einem anderen Etwas entstehen, und da dieses Etwas nicht die qualitative Wirklichkeit sein kann, und da weiter die Natur des Veränderungsactes

es erfordert, dass dieses Etwas doppelter Art sein müsse, so müssen schon auf Grund der Realität des Veränderungsactes allein neben der qualitativen Wirklichkeitsart noch zwei andere voneinander und von ihr toto genere verschiedene Wirklichkeitsarten vorausgesetzt werden, die absolute Substanz einerseits und die realen Negationsacte andererseits. Die Existenz der absoluten Substanz folgt zwar schon aus der Thatsache der qualitativen Veränderung der qualitativ-quantitativen Wirklichkeit, wer aber, trotz aller Gründe, das Werden der Qualitätsinhalte nicht zulassen will, der muss doch nolens volens das Werden des Veränderungsactes selbst zulassen, weil das einleuchtend und selbstverständlich ist, und sobald er das gethan, ist die absolute Substanz mit absoluter Notwendigkeit da. Nun, mit derselben Notwendigkeit, mit der aus der Thatsache des Werdens des Veränderungsactes die Existenz der absoluten Substanz folgt, mit derselben Notwendigkeit folgt aus derselben auch die Existenz der realen Negationsacte. Wer also auf Grund der Erwägungen in dem vorigen Kapitel noch nicht von ihrer Existenz überzeugt war, der muss es nun sein auf Grund der Veränderung des Veränderungsactes, sobald er des letzteren eigenthümliche Realität eingesehen hat.

Nachdem wir nun so den Veränderungsact, insofern er Vergehensact ist, unmittelbar als den umgewandelten realen Negationsact erkannt haben, sind wir nun in der Lage, endlich einmal das zeitlose Producieren, durch welches die absolute Substanz die vielheitlich-mannigfaltige Wirklichkeit hervorbringt, zu begreifen. Der Veränderungsact ist, als der zeitliche Productionsact, sowohl in simultaner wie in successiver Hinsicht vollkommen einfach und untheilbar und unterscheidet sich dadurch wesentlich von dem realen simultanen Negationsact, der in successiver Hinsicht nicht mehr einfach ist, sondern in der Zeit selbst keine Veränderung erfährt, unveränderlich und dauerhaft ist. Wenn der Veränderungsact unzweifelhaft aus diesem simultanen Negationsacte entsteht, so muss die Frage erhoben werden, wie dies wohl geschehen kann. Offenbar nun muss der simultane Negationsact so gefasst werden, dass er fähig wird, Veränderungsact zu werden. Dies wird nun der simultane Negationsact nur dann thun, wenn er selbst als zeitloser Productionsact aufgefasst wird. Und thatsächlich, wenn wir den simultanen Negationsact, der zwei qualitative oder quantitative Einheiten voneinander trennt, aufmerksam betrachten, so müssen wir anerkennen, dass er wirklich zeitloser Productionsact ist: die einfache Negation, wenn sie wirklich und reell die Beziehungsglieder voneinander trennt, kann dies nur in activer Weise thun, und diese active Trennungskraft kann nur in

ihr selbst liegen. Der Negationsact muss zeitlos-beständig die beiden Beziehungsglieder setzen resp. von der qualitätslosen Wirklichkeit abtrennen. Und thatsächlich, ist die Negation das eigentliche Trennungsprincip, durch welches die Vielheit und Mannigfaltigkeit der Qualitätswelt gesetzt wird, und trennt dasselbe unmittelbar durch sich selbst diese qualitative Wirklichkeit von der qualitätslosen, dann muss der Negationsact der unmittelbare zeitlose Productionsact dieser Wirklichkeit sein, d. h. dieselbe zeitlos und beständig von der qualitätslosen Wirklichkeit abtrennen. Das ist sicher, nur fragt es sich, wie der simultane Negationsact dieser active Productionsact sein kann? Für uns wird es nun schliesslich nicht schwer sein, eine Antwort auf diese Frage zu geben. Den zeitlosen Productionsact könnte man zunächst als ein successives Continuum denken, ganz ebenso wie die qualitätslose Wirklichkeit als ein simultanes Continuum gedacht wurde; in dem ersten Kapitel des nächsten Abschnittes werden wir aber sehen dass das successive Continuum unmöglich ist, und dass beständig und zeitlos producieren nicht heisst, Augenblick für Augenblick eine und dieselbe Thätigkeit continuirlich wiederholen, sondern dass es heisst, eine und dieselbe Thätigtigkeit, ohne jede Unterbrechung in Augenblicken, absolut zeitlos fortsetzen. Hier genügt es nur im allgemeinen die Natur der zeitlosen Thätigkeit fesgestellt zu haben.

Sobald nun der simultane Negationsact als zeitloser Productionsact aufgefasst wird, ist seine Umwandlung in den zeitlichen Negationsact der Veränderung vollkommen begreiflich. Wenn der zeitlose Productionsact als zeitlos-beständige Thätigkeit aufgefasst wird, dann kann diese Thätigkeit offenbar in jedem Augenblicke ganz ebenso aufhören, wie von der simultan-continuirlichen Substanz einzelne Theile abgetrennt werden können und wirklich abgetrennt werden. Während aber die Abtrennung der einzelnen Theile von der simultan-continuirlichen Substanz das Dasein dieser Substanz selbst nicht aufhebt, weil sie eben absolut in's Unendliche theilbar ist, ist in dem absolut-beständigen Acte der zeitlosen Thätigkeit keine solche simultane Vielheit von Theilen gegeben, demnach können sich von ihm auch nicht einzelne Theile ablösen, sondern die Ablösung bedeutet in diesem Falle das Aufhören der Thätigkeit selbst. Wenn also die zeitlose Thätigkeit des simultanen Negationsactes aufhört, so ist wirklich mit ihr etwas geschehen, sie ist ein einfacher Veränderungsact geworden, und durch ihn geht sie in die absolute Substanz selbst zurück. Und umgekehrt, wenn ein Veränderungsact einen simultanen Negationsact setzt, so ist dieser

Veränderungsact als die (mittelbare) Abtrennung des zeitlosen Productionsactes aus der qualitätslosen Wirklichkeit aufzufassen und zwar so dass der simultane Negationsact die unmittelbare Umwandlung dieses Veränderungsactes darstellt. Wir begegnen hier einem ganz eigenartigen Verhältniss zwischen dem zeitlosen und dem zeitlichen Productionsacte, einem Verhältniss, welches nur im dritten Abschnitte der Ontologie eingehend erörtert und erklärt werden kann.

Ist nun so der simultane Negationsact der zeitlose Productionsact der qualitativen Wirklichkeit, so ist damit jene in dem ersten Kapitel angedeutete aber nicht durchgeführte Unterscheidung des Existenz- von dem Essenzmomente nunmehr vollzogen. Denn der simultane Negationsact, wenn er wirklich der zeitlose Producent der qualitativen Wirklichkeit ist, muss jenes reine Existenzmoment als solches sein. Existenz und Essenz können nur dann als zwei verschiedene (obgleich untrennbare) Momente anerkannt werden, wenn Existenz nicht als reine tote Position (als solche bedeutet sie nichts anderes als die blosse nackte Thatsache des Gegebenseins der Essenz) sondern als lebendige zeitlose Thätigkeit aufgefasst wird, die als solche nur jener reale Trennungsact der Negation selbst sein kann (demnach nur da wo eine Vielheit und Mannigfaltigkeit ist, kann jene Unterscheidung des Existenz- und des Essenzmomentes vollzogen werden, bei einem absolut einfachen Wesen hat sie keinen Sinn).

Besteht nun wirklich der zeitlose Productionsact, dann lässt sich unsere frühere Behauptung, dass die gesammte qualitativ-quantitative Wirklichkeit notwendigerweise ein zeitlos-beständiges Product der absoluten Substanz ist, ganz gut begreifen. Seit Ewigkeit musste die absolute Substanz die vielheitlich-mannigfaltige Welt zeitlos producieren, weil einerseits in dieser Welt die Veränderung notwendigerweise einmal beginnen musste, und andererseits weil es nicht begreiflich ist, wie die absolute Substanz, da sie als solche absolut unbewusst ist, je wissen kann, dass sie die Fähigkeit der Produktion hat, um diese Production in einem bestimmten Momente der zeitlosen Ewigkeit zu beginnen — das ist nicht möglich und weil das unmöglich ist, muss die qualitative Wirklichkeit seit Ewigkeit von der qualitätslosen produciert werden. Hier stossen wir nun auf eine grosse Schwierigkeit. Wenn der simultane Negationsact als der zeitlose Productionsact der qualitativen Wirklichkeit von der Seite der qualitätslosen durch einen zeitlichen Productionsact gesetzt werden kann, dann scheint es überhaupt, dass jeder zeitlose Productionsact durch einen zeitlichen entstehen muss, woraus folgte, dass ein zeitloses Bestehen der qualitativen Wirklichkeit seit Ewigkeit nicht möglich wäre. Diese Folgerung

ist ganz richtig, nur ihre Voraussetzung ist es nicht. Wenn der zeitliche Productionsact sich in den zeitlosen verwandeln kann, so bedeutet das gar nicht, dass er notwendigerweise mit dem zeitlichen Acte beginnen musste, ganz ebensowenig wie der zeitlose Productionsact, wenn er schon da ist, sich in den zeitlichen verwandeln muss, obgleich er in diesen unzweifelhaft verwandelt werden *kann*. Der zeitlose Productionsact setzt, symbolisch gesprochen, sich selbst unmittelbar von dem einen Augenblick zu dem anderen so fort, dass er absolut keine Unterbrechung erfährt, und so vermag er sich selbst sowohl nach vorwärtz (d. h. in der Richtung der Zukunft) wie nach rückwärtz (d. h. in der Richtung der Vergangenheit) fortzusetzen, ohne je ein Ende zu erreichen: in der Richtung nach vorwärtz *kann* er sich in den zeitlichen Act verwandeln, in der Richtung der Vergangenheit *konnte* er aus einem zeitlichen Acte entstehen, aber weder das eine noch das andere ist eine Notwendigkeit für ihn, so dass der anfanglose zeitlose Productionsact nichts Undenkbares darstellt. Die zeitlose Production der qualitativ-quantitativen Wirklichkeit von der Seite der qualitätslosen und zwar die schlechthin und absolut anfanglos-zeitlose Production derselben ist also ganz wohl möglich.

Ist nun diese Production auch notwendig? Wir haben vor kurzem ausgeführt, dass sie deshalb notwendig ist, weil die absolute Substanz als absolut unbewusst völlig unfähig ist, diese zeitlose Production in einem bestimmten Zeitpunkte der Ewigkeit anzufangen. Nun müssen wir diese Behauptung etwas näher betrachten und von einigen Seiten ergänzen. Die qualitätslose Substanz liegt erstens als solche absolut ausserhalb unseres und jedes anderen Bewusstseins, sie ist völlig und absolut transcendent, da sie als solche ohne alle und jede Vielheit und Mannigfaltigkeit ist, unser Bewusstsein aber gerade die Welt der Vielheit und Mannigfaltigkeit ist. Liegt die absolute Substanz völlig ausserhalb des Bewusstseins, so kann man ihr zweitens kein Bewusstsein beilegen, weil ja das Bewusstsein wesentlich der Welt der Vielheit und Mannigfaltigkeit angehört, sie ist also wirklich absolut unbewusst. Wenn nun die absolute Substanz absolut kein Bewusstsein hat, so weiss sie absolut nichts von ihrer Fähigkeit der Production der qualitativ-quantitativen Wirklichkeit und kann folglich diese Fähigkeit nie gebrauchen. In dem zweiten Unterabschnitt des zweiten Abschnitts der Ontologie werden wir auf diesen Punkt eingehend zurückkommen, hier genügt es hervorzuheben, dass die absolute Freiheit des Beginnes der Production nur zusammen mit dem Bewusstsein von dieser Freihert bestehen kann, und dass wo dieses Bewusstsein fehlt auch von jener Freiheit kein Gebrauch

gemacht werden könne. Der absolut unbewusste Beginn der Weltproduction von Seiten der absoluten Substanz wäre mit dem Zulassen des absoluten Zufalles in dem Reiche der Wirklichkeit identisch, doch ist dieser absolute Zufall ganz ebenso ausgeschlossen wie das Entstehen aus dem absoluten Nichts und das Vergehen in das absolute Nichts ausgeschlossen ist: auch der Zufall muss, dem Satze vom Grunde gemäss, genügend begründet werden, um bestehen zu können. Ist nun die unbewusste Production von Seiten der absoluten Substanz unmöglich, dann muss jene Production seit Ewigkeit da sein — denn sonst hätte die absolute Substanz eine Eigenschaft, die sie doch nie zeigen könnte. Die einzige positive Eigenschaft der absoluten Substanz, diejenige Eigenschaft die ihr specifisches Wesen bildet, besteht in ihrer Fähigkeit der potentiellen Theilung in's Unendliche, der Abtrennung einzelner Theile von ihr. Wenn nun die absolute Substanz seit Ewigkeit allein in der Wirklichkeit bestände, dann könnte sie diese ihre einzige positive Eigenschaft nicht zeigen und das würde soviel bedeuten, wie als ob sie dieselbe überhaupt nicht hätte, was wiederum nicht mehr und nicht weniger bedeutet, als dass sie als solche dann gar nicht bestände. Denn eine Wesenheit, die eine Eigenschaft seit Ewigkeit potentiell in sich hat und die doch verhindert ist, dieselbe je *actuell* zu haben, hat sie überhaupt nicht, besteht also als solche gar nicht. Die anfanglos-zeitlose Production der qualitativ-quantitativen Wirklichkeit von Seiten der qualitätslosen ist also eine Notwendigkeit.

So gross nun schon aus dem eben angegebenen Grund diese Notwendigkeit der anfanglos-zeitlosen Production der Welt auch ist, diese Notwendigkeit muss doch viel tiefer liegen, es muss ein letzter logischer Grund da sein, der die absolute Substanz zwingt, die vielheitlich-mannigfaltige Welt in ewig-schaffender Weise zu setzen. Und diesen letzten logischen Grund können wir nur in dem Negationsprincip selbst finden, demjenigen Princip, durch welches die logische Struktur der qualitativen Wirklichkeit nicht nur bedingt und bestimmt ist, sondern durch welches diese Wirklichkeit auch gesetzt wird (dasselbe bestimmt also nicht nur die Essenz sondern auch die Existenz dieser Wirklichkeit, was eben nur die Untrennbarkeit dieser beiden Momente bedeutet). Das Negationsprincip als solches ist nun in Wahrheit so völlig leer und inhaltslos, dass es gebieterisch von sich selbst aus eine reelle Grundlage fordert, auf der es sich gleichsam anheften und seine trennende Kraft offenbaren kann: die Negationsbeziehung zaubert hervor aus dem völlig leeren Wesen der absoluten Substanz alle die Vielheit und Mannigfaltigkeit

der qualitativ-quantitativen Wirklichkeit. sie nöthigt diese Substanz, jene Wirklichkeit zu setzen und zu producieren, und bietet sich zugleich als das reelle Instrument dieser Produktion selbst dar. Wenn die absolute Substanz deshalb notwendig ist, damit das leere Negationsprincip eine reelle Grundlage seiner trennenden Kraft habe, und ist das Negationsprincip das eigentliche Princip der Logik, dann ist sicherlich auch die absolute Substanz selbst durch dieses Princip logisch bedingt und gefordert. Die Negation, in der wir das eigentliche Princip der Logik erkannt haben, als solche, als leere einfache Trennungsfunktion fordert einen völlig leeren noch absolut unbestimmten Inhalt, an dem sie ihre trennende Kraft zu vollziehen vermag, unmittelbar und durch ihr eigenes Wesen fordert die Negation also, wie gesagt, die Existenz eines völlig entgegengesetzten Princips, und hierin, in dieser natürlichen Mangelhaftigkeit des leeren Negationsprincips, erblicken wir die letzte logische (logisch ist sie offenbar, weil sie von dem logischen Princip selbst gefordert wird) Notwendigkeit der absoluten Substanz. Damit ist freilich nicht gesagt, dass das Negationsprincip (resp. die einzelnen Negationsacte) nicht reell von der absoluten Substanz als ihr Product gesetzt sind, damit ist nur gesagt, dass in der absoluten Substanz selbst die Nöthigung und die Notwendigkeit dieser Setzung des ihr völlig entgegengesetzten Negationsprincips nicht liegt, sondern nur in diesem letzten Princip selbst. Man kann eben das Verhältniss nicht anders denn so ausdrücken: reell genommen geht das bestimmungslose Princip der absoluten Substanz (oder der reinen Position) demjenigen der bestimmenden Negation zuvor, logisch aber ist jene erste durch diese zweite durchaus bedingt. Wie die beiden durch den einfachen Negationsact getrennten Qualitäten von der Negationsbeziehung selbst nicht mehr durch neue Negationsacte getrennt sind, sondern es die einfache Negation selbst ist, die die beiden Qualitäten voneinander trennend auch sich selbst unmittelbar von den beiden trennt, und wie die beiden Qualitäten dadurch, dass sie ausser der Negation als solcher liegen, nicht etwas „alogisches“ sind, ebenso ist die Negationsbeziehung als solche von der Position nicht durch einen neuen Negationsact getrennt, sondern unmittelbar trennt die Negation sich selbst von der Position, unmittelbar drückt sie ihr eigenes Wesen als etwas dem Wesen der Position absolut und direkt entgegengesetztes aus, und so muss die absolute Substanz ebenso etwas logisches sein, wie die beiden Beziehungspunkte selbst. Weit entfernt davon also, dass die transcendente Substanz etwas „metalogisches“ wäre, ist sie etwas durchaus logisches, weil etwas durch logische Beziehung

der Negation gesetztes und gefordertes. Und es ist auch nichts unverständliches mehr, dass ihr Wesen selbst etwas durchaus wiederspruchsloses darstellt und dadurch durch ihre Voraussetzung wirklich jene ungeheuere Antinomie unserer Vernunft vollständig überwunden ist.

Nur noch eines ist unklar in der Auflösung dieser Antinomie resp. in der Auflösung des Problems des Werdens zurückgeblieben. Wir konnten uns den Übergang des Weissen in das Weisse, des Schwarzen in das Weisse und der einen Qualität in die andere überhaupt nicht denken, weil alle diese Wirklichkeitselemente von gleichartiger Natur waren. Deshalb setzten wir ja die absolute qualitätslose Substanz voraus um das Werden jener qualitativen Wirklichkeitselemente zu ermöglichen. Weiter fanden wir dann dass auch die realen Negationsacte, durch die jene qualitativen Elemente gesetzt werden, ebenfalls in diese qualitätslose Wirklichkeit vergehen und aus ihr entstehen. Nun aber haben wir gesehen, dass die realen Negationsacte ganz ebenso eine besondere Wirklichkeitsart im Vergleich mit den qualitativen Wirklichkeitselementen darstellen, wie dies mit der absoluten Substanz der Fall ist, und doch haben wir die Möglichkeit des Übergangs der qualitativen Wirklichkeit in die Wirklichkeit der Negationsacte nicht zugelassen. Offenbar nun, wenn dieser Übergang wirklich unmöglich sein soll, und wenn die qualitätslose Wirklichkeit einzig und allein ihr gemeinsamer Ursprung sein kann, dann können jene beiden Wirklichkeitsarten im Vergleich zueinander nicht mehr so disparat sein, wie es die absolute Substanz im Vergleich mit ihnen ist. Und thatsächlich ist dem so. Die realen Negationsacte bilden ja mit den qualitativen Wirklichkeitselementen die vielheitlich-mannigfaltige Qualitätswelt selbst, sie sind also Glieder einer und derselben Welt, während die qualitätslose Wirklichkeit ihnen beiden als eine fürsichseiende Welt gegenübersteht. Die Negationsbeziehung trennt die beiden Beziehungsglieder von der qualitätslosen Wirklichkeit zugleich mit sich selbst: sie setzt also unmittelbar diese qualitativen Beziehungsglieder der qualitätslosen Wirklichkeit entgegen, indem sie sich selbst dieser Wirklichkeit entgegengesetzt. Die qualitativen Wirklichkeitselemente einerseits und die realen Negationselemente andererseits sind also, in Vergleich mit der absoluten Substanz, eine besondere aus zwei entgegengesetzten Gliedern bestehende Gattung von Wirklichkeit, sie beide haben also etwas gemeinsames unter sich, was sie von der qualitätslosen Wirklichkeit *beide zusammen* unterscheidet, und diese ihre Gleichartigkeit ist es, die sie verhindert ineinander übergehen zu können, so dass sie nur in die absolute Substanz übergehen können und diese sich in

sie verwandeln kann. Das Nähere über dieses ganz eigenartige und einzigartige Verhältniss der drei Wirklichkeitsarten kann erst in dem dritten Abschnitte der Ontologie ausgeführt werden.

Ebenso werden wir erst in dem dritten Abschnitte das letzte Wesen des Werdens, die Art und Weise der Ablösung einzelner Theile von der absoluten Substanz erörtern können. Den Process des Werdens konnten wir weder auf die Thatsache der blossen Ortsänderung zurückführen, weil uns ja diese Thatsache der Ortsänderung selbst bei näherem Zusehen als etwas Zusammengesetztes und Erklärungsbedürftiges sich herausstellte, noch auf das absolute Werden in's Nichtsein und aus dem Nichtsein zurückführen, sondern wir haben ihn auf die Ablösung (resp. Hinzufügung) der Theile der absoluten Substanz zurückgeführt. Wie und auf welche Weise aber es geschieht, dass der von der absoluten Substanz abgelöste Theil eine von dieser Wirklichkeit toto genere verschiedene Wirklichkeitsart wird, das werden wir erst in dem dritten Abschnitte der Ontologie angeben können, hier haben wir nur die Thatsache selbst als solche festgestellt, und zwar mit absoluter Sicherheit festgestellt.

Ebenso ist das Verhältniss zwischen dem Negationsprincip und der Position hier nur im allgemeinen dargestellt, wie viel es nöthig war um ihre logisch notwendige Zusammengehörigkeit nachzuweisen. Erst nachdem wir die Entfaltung des Negationsprincips im Gebiete der empirischen Wirklichkeit betrachtet haben, erst nachdem wir diese Wirklichkeit aus jenem Princip deducieren und erklären, werden wir in dem letzten und abschliessenden Abschnitt der Ontologie auf das letzte Wesen dieser beiden obersten Weltprincipien eingehen. Jetzt übergehen wir nun zu unserer eigentlichen Aufgabe, zur Erklärung der Wirklichkeit aus diesen allgemeinen ontologischen Principien. Wir werden die Entfaltung des Negationsprincips erst im Gebiete der rein formalen Kategorien (Ordnung, Zustand und Quantität insofern jene beiden ersten Kategorien von dieser dritten und der Qualität abhängen) und dann im Gebiete der realen Kategorien (Quantität und Qualität insofern jene erste von der zweiten und diese zweite von der ersten abhängt), betrachten und werden nachweisen, dass sowohl in dem ersten als in dem zweiten Gebiete das Negationsprincip wirklich nur discrete Wirklichkeitselemente setzen kann und gesetzt hat, womit sich auch im einzelnen bestätigen wird, dass der Begriff des Discreten das Wesentliche der qualitativen und derjenige des Continuirlichen das Wesentliche der qualitätslosen Wirklichkeit bildet.

Zweiter Abschnitt.

Entfaltung des Negationsprincips.

Erster Unterabschnitt.

Die formalen Kategorien.

Erstes Kapitel.

Über die Zeit.

Uber die Natur der Zeit sind drei Haupttheorien möglich:

1) Die Zeit ist ein besonderes neben den realen Dingen bestehendes Wesen, welches diese letzteren enthält, und ihr Nacheinandersein, ihre Veränderungen ermöglicht, indem die letzteren als nur in der Zeit verlaufend gedacht werden können.

2) Die Zeit ist kein besonderes neben den realen Dingen bestehendes Wesen, welches ihre Veränderungen ermöglichte, sondern dieselbe ist nichts anderes als das blosse Nacheinandersein der realen Vorgänge selbst, also ein blosses Verhältniss der realen Dinge, inwiefern sie nacheinander gegeben sind. Nicht das reale Ding wird in einen schon bestehenden Zeitort gesetzt, sondern der Zeitort wird erst durch das reale Ding gesetzt, der Ort in der Zeit ist nichts anderes als der Ausdruck für die Thatsache, dass die Dinge Verhältnissglieder des Nacheinanderverhältnisses sind.

3) Die Zeit ist weder ein besonderes Wesen neben den realen Dingen noch ein Verhältniss derselben, sondern sie ist eine subjective Anschauungsform a priori, die nur als vorstellungsmässige Auffassungsform des die empirisch-realen Bewusstseinsinhalte enthaltenden Subjects existieren kann.

Das reine absolute Wesen der Zeit wird als ein absolutes unendliches Continuum gedacht, das sich nur in einer einzigen Dimension ausdehnt, und deshalb als gerade unendliche Lienie symbolisch

vorgestellt wird; diese Vorstellung der geraden Linie soll also ein blosses Symbol sein, die reine Zeit, obgleich sie eindimensional ist, ist doch nicht die gerade Linie selbst, denn die gerade Linie ist etwas räumliches, die Zeit ist aber eben kein Raum. Wie sind nun die Theile dieser reinen Zeit in Bezug aufeinander gegeben: sind sie nebeneinander oder nacheinander? Bei dem leeren Raume ist die Frage leicht zu beantworten: die Theile des Raumes sind selbstverständlich nebeneinander. Der Grund hierzu liegt einfach darin, dass wir uns ein Nebeneinander der realen Dinge nur im leeren Raume denken sollen, dass das Nebeneinander der Dinge nur also vom leeren Raume herrühren soll, dass das Nebeneinander im leeren Raume selbst liegt, und dass der leere Raum nur deshalb die Bedingung des Gegebenseins der realen Dinge ist, weil seine Theile als solche nebeneinander gegeben sind. Wenn nun die Sache bei dem Raume so eindeutig ist, so müsste es ebenfalls bei der Zeit der Fall sein. Die Theile der reinen Zeit müssten ebenso nacheinander sein, wie die Theile des Raumes nebeneinander sind, wenn die Zeit in eben dem Sinne Bedingung des Gegebenseins der realen Dinge sein soll wie der Raum. Man ist aber in Bezug auf das Gegebenseinsverhältniss der Theile der reinen Zeit nicht so einig wie in Bezug auf das Gegebenseinsverhältniss der Theile des reinen Raumes: die reine Zeit soll bald selber ohne Succession sein, bald aber selbst die Succession besitzen. Die reine Zeit wird von den einen als das ruhende Bett gedacht, in dem der Strom der Erscheinungen dahinfliesst, von den anderen als dieser Strom selbst, der die Erscheinungen gleichsam mit sich fortreisst.

Das Eine oder das Andere vorausgesetzt, erweist sich nun die Voraussetzung der reinen Zeit schon durch ihre wesentlichen Eigenschaften selbst als etwas unmögliches. Sind die Theile der reinen Zeit nicht selbst nacheinander, so müssen sie notwendigerweise nebeneinander sein, denn Nebeneinander und Nacheinander sind die einzig möglichen Ordnungsverhältnisse, in denen die Dinge gegeben werden können. Nach dem allgemeinen Negationsprincip müssen alle einfachen Kategorien paarig gegeben sein: dass Räumlichkeit und Zeitlichkeit einfache letzte Kategorien sind, das folgt unmittelbar daraus, dass sie von der numerischen Negationsbeziehung gesetzt sind. Das Nacheinander ist der reine Gegensatz des Nebeneinanders, und das Nebeneinander der reine Gegensatz des Nacheinanders, und wenn der Gegensatz das einzige absolute Weltprincip ist, so kann es nicht zweifelhaft sein, dass Nacheinander und Nebeneinander die einzig möglichen Ordnungsformen der vielen Dinge sein können. Wenn also die

Theile der reinen Zeit nicht nacheinander sind, so müssen sie nebeneinander gegeben sein. Dann aber unterscheidet sich die reine Zeit von dem reinen Raume in gar nichts, denn das Wesen des letzteren bildet eben das Nebeneinandersein seiner Theile; dann ist die reine Zeit nicht bloss durch die gerade Lienie symbolisch dargestellt, sondern sie wäre dann diese unendliche gerade Linie selbst. Dies ist so klar und deutlich, dass man auf so einfache Sachen nicht mehr Worte zu verlieren braucht. Wer unser Grundprincip der Negation anerkennt, der wird auch diese Consequenz desselben anerkennen.

Wenn man aber die Theile der reinen Zeit als nacheinander gegeben voraussetzt, dann kommt man dazu, die Wirklichkeit zu verdoppeln. Denn was soll neben dem eigentlichen Strome der realen Erscheinungen noch ein besonderer Strom der reinen Wesenheit der Zeit bedeuten? Wenn man schon die Zeit von dem zeitlichen Strome der Erscheinungen trennen will, so kann dies nur auf die Weise geschehen, dass man die Zeit als das ruhende Bett betrachtet, in dem der Strom der Erscheinungen dahinfliesst und nicht als diesen Strom selbst, denn in dem Falle muss man zwei parallel laufende Ströme voraussetzen, einen der sich unmittelbar auf die realen Dinge als solche bezicht und den anderen, der sich auf die Theile der reinen Zeit selbst bezieht. Man könnte hierauf antworten, dass dabei jedoch keine eigentliche Verdoppelung des Zeitstromes stattzufinden braucht, dass ebenso wie die realen Dinge in dem Raume erst dadurch nebeneinander gegeben sind, dass sie im Raume gegeben sind und dabei das Nebeneinander der Dinge nicht ein Nebeneinander neben dem Nebeinander der Raumtheile ist, sondern mit diesem letzteren zusammenfalle, dass ebenso in dem reinen Strome der Zeit die realen Vorgänge so gegeben sind, dass ihr Strom mit dem Strome dieser reinen Zeit als solcher zusammenfällt, und dass wir nur den Zeitstrom vorausssetzen, weil uns der reine Strom der Erscheinungen als solcher nicht denkbar ist. Und dieser Vorwurf ist ein ganz richtiger, wenn man die Zeit wirklich als einen Strom auffassen will, wenn man die Succession wirklich in die Zeittheile setzen will. Nur entsteht dabei eine andere Schwierigkeit. Bei dem Raume ist die Trennung der reinen Nebeneinanderform von den realen Dingen noch anscheinend möglich, weil die Theile im Raume nebeneinander gegeben sind, und der Raum wirklich als ein Totum gedacht werden kann. Die reine Zeit dagegen, soll sie sich von dem reinen Raume wirklich unterscheiden, kann nur als Strom gedacht werden, als ein Wesen dessen Theile nacheinander sind.

Wenn aber die Theile der reinen Zeit nacheinander gegeben sind, so ist die Zeit als solche nie gegeben, sondern gegeben ist nur immer der gegenwärtige Theil derselben, der mit dem gegenwärtigen Augenblicke im Seienden zusammenfällt. Was für ein Wesen ist nun das, dessen Theile nie zugleich gegeben werden können, das als solches nie wirklich und reell gegeben ist? Man beachte wohl: ich verkenne nicht die eigenthümliche Art und Weise des Gegebenseins des zeitlichen Stromes, der zeitliche Strom als solcher, als reines Nacheinander, ist nichts wunderbares und unmögliches, solange man diesen Strom in die realen Dinge als solche verlegt. Der Strom wird nur dann etwas unbegreifliches und wunderbares, wenn man denselben einer besonderen Wesenheit, der reinen Zeit, zuschreibt: diese reine Wesenheit müsste doch etwas reelles sein, wenn sie die wunderbare Macht besitzen sollte, die realen Dinge in ihren Veränderungen zu beherrschen, was für Realität hat sie aber wohl, wenn sie immer nur in einem ausdehnungslosen Theile reell gegeben ist, wenn sie so unvermögend ist, sich selbst festzuhalten. Ein solcher reiner Strom ist wirklich etwas unbegreifliches, und es ist darum ganz begreiflich, weshalb man immer wieder die reine Zeit als ruhendes Wesen auffasst, weshalb man immer wieder zu jener ersten von uns vollkommen widerlegten Ansicht über das Wesen der reinen Zeit zurückkehrt*.

Der principielle Beweis aber, dass der reine zeitliche Strom nicht bestehen kann, liegt darin, dass eine Trennung der Ordnungsform von dem realen Inhalte überhaupt nicht möglich ist, weder als reiner zeitlicher Strom noch als reine ruhende Zeit, noch als leerer Raum. Denn was soll die Zeit für sich genommen sein: ein reales Wesen wohl nicht. Denn enthielte dieselbe einen Seinsinhalt, so fragt es sich, worin unterscheidet sich dieser reale Seinsinhalt von dem primären Seinsinhalt, und in der Beziehung ist kein Unterschied zwischen beiden zu statuieren. Das reine Wesen der Zeit soll auch in Wahrheit weder mit dem realen Seinsinhalt, dessen blosse Existenzbedingung dasselbe sein soll, identisch sein, noch mit dem absoluten Nichts, da das absolute Nichts eben gar nicht ist, die reine Zeit aber doch etwas bedeuten soll, sondern dasselbe soll etwas zwischen Sein und Nichtsein gleichsam in der Mitte schwebendes sein. Es soll also etwas sein, was Einheit von Sein und Nichtsein bedeutet, ein Etwas, welches nur seiner Existenz nach real, seiner Essenz aber nach

* Wer sich näher über das notwendig zu statuierende Verhältniss dieses leeren Zeitstromes zum Strome der Erscheinungen unterrichten will, den verweise ich auf die glänzenden Ausführungen Lotze's in seiner Metaphysik, 2. Aufl. 1884. § 147.

irreal sein soll. Der Begriff eines solchen „Etwas“ ist nun ebenso widersprechend, wie der Begriff des Scheins, den wir im ersten Abschnitt analysiert und verworfen haben. Der Unterschied zwischen beiden besteht nur darin, dass sich beim Schein das Nichtsein selbst als Sein ausgiebt, dass es ein Nichtseiendes ist das als seiend gedacht werden soll, hier haben wir aber ein Seiendes das als Nichtseiendes gedacht werden soll, ein Sein also das Nichtsein sein soll. Dort soll das Nichtsein als Sein, hier soll das Seiende als Nichtseiendes gedacht werden (als „leeres“ d. h. nichtseiendes Sein). Der Begriff der Zeit als eines „leeren“ Wesens ist demnach der umgekehrte Begriff des Scheins: Während beim Schein das Nichtseiende als Seiendes scheinen soll, soll hier das Seiende als Nichtseiendes scheinen. Demnach ist der Begriff des „leeren“ Zeitwesens, sei es dass dasselbe als ruhend oder sich verändernd gedacht wird, ebenso widerspruchsvoll wie der Begriff des Scheins.

Es bliebe nur noch ein Ausweg übrig, die reine Zeit als solche zu retten: ihr dieselbe Art und Weise der Realität zu verleihen wie sie der reale Seinsinhalt selber hat, nur der Qualität nach von derselben verschieden. In diesem Falle wird aber nur leider die reine Zeitform als solche ganz überflüssig. Denn wenn der reale Seinsinhalt der Zeit als solcher das Nacheinander in sich hat, warum sollte dieses Nacheinander nicht der primäre reale Seinsinhalt als solcher schon in sich haben? Aber nicht nur überflüssig ist die reine Zeitform in diesem Falle, sondern auch ganz und gar unmöglich. Denn wenn der reale Seinsinhalt unvermögend ist, das Nacheinander in sich selbst zu haben, so ist es die reine reale Zeit als solche ebenso, man müsste also voraussetzen, dass die reine Zeit, um ein Nacheinander in sich zu haben, in einer anderen Zeit existieren müsste u. s. f. in infinitum.

So ist also diese erste Ansicht über die Natur der Zeit vollkommen falsch. Dasselbe gilt nun auch für die dritte, die von Kant ausgebildet worden ist. Die Auffassung des Wesens der Zeit in dieser dritten Theorie ist im Wesentlichen dieselbe mit derjenigen in der ersten, nur dass hier die Zeit nicht mehr als die absolute Bedingung des Gegebenseins der objectiven Dinge, sondern als die absolute Bedingung des Gegebenseins der subjectiven Erscheinungen im menschlichen Bewusstsein gilt. Wie jenes objective Wesen der Zeit als ein „leeres“ Etwas gedacht werden soll, selbst also keine inhaltliche Realität hat, ebenso soll hier das subjective Wesen der Zeit eine blosse vorstellungsmässsige (nicht ansichseiende) subjective Anschauungsform a priori sein, ein rein ideelles Wesen,

welches nur empirische Realität aber blosse transcendentale Idealität hat. Nun, in dem ersten Kapitel des ersten Abschnittes haben wir gesehen, dass unsere unmittelbare Erfahrung absolute ansichseiende Realität hat, und demnach in derselben keine reine Anschauungsform a priori vorhanden sein kann, weil sie blosse Vorstellung also ein reiner Schein wäre, und Schein jedoch im Reiche der unmittelbaren und aller Realität überhaupt völlig ausgeschlossen ist.*)

Es bleibt also nur die zweite Ansicht übrig, und sie muss die richtige sein. Die Zeit kann kein besonderes neben den realen Vorgängen bestehendes Wesen sein, weder in objectiver noch in subjectiver Weise, die Zeit kann nur die den realen Vorgängen selbst inhärirende Form des Nacheinanders sein, sie ist das unmittelbar den realen Dingen immanente Verhältniss des Nacheinander. *Das Wesen der Zeit besteht also in dem Nacheinander* Gewöhnlich wird nicht nur das Verhältniss des Nacheinanders sondern auch dasjenige des Zugleichseins zum Wesen der Zeit gerechnet. Das ist absolut falsch. Zugleichsein ist das Gegentheil von Nacheinander, das Gegentheil von Nacheinander ist auch Nebeneinander, und demnach müssen Nebeneinander und Zugleichsein miteinander zusammenfallen. Und wirklich, nur dasjenige ist zugleich was nebeneinander gegeben ist, und nur dasjenige ist nebeneinander was zugleich gegeben ist, demnach sind sie eins und dasselbe, nur ist das Zugleichsein mehr durch direkte Beziehung auf das Nacheinandersein gewonnen, während das Nebeneinander die ursprüngliche positive Beschaffenheit des Zu-

*) Von den fünf Zeitbeweisen, die Kant in der zw. Auflage der „Kritik d. reinen Vernunft" vorträgt, sind die wichtigsten der vierte und der fünfte, die im Wesentlichen ein und dasselbe Argument in sich enthalten. Wir werden uns deshalb nur bei diesem Argumente aufhalten, da die übrigen keine principielle Bedeutung haben. Die Zeit, sagt Kant, kann kein Begriff sondern muss eine Anschauung sein, weil die Theile (resp. die in einem Begriffe enthaltenen — ausgedrückten — Gegenstände) des Begriffs unter dem Begriff, die Theile der Anschauung dagegen i n dieser enthalten sind, demnach können die einzelnen Theile der Anschauung nur durch Einschränkung des Ganzen entstehen, während bei dem Begriff jeder Theil (resp. Gegenstand) schon den ganzen Begriff in sich hat; die Anschauung ist die Summe ihrer Theile, der Begriff ist die formale abstrakte Seite des concreten Gegenstandes. Der Unterschied zwischen den Begriffen und Anschauungen, den Kant hier so scharf formuliert hat, besteht in Wahrheit nicht. Ist Negation das allgemeine Seinsprincip, so sind sowohl Gegenstände als Anschauungen Producte derselben, und dann kann kein principieller Unterschied zwischen beiden bestehen. Es ist wahr, dass ein Raum- resp. Zeitort nur zusammen mit anderen Raum- resp. Zeitorten bestehen kann, das gilt aber in Wahrheit auch für alle anderen in erster Reihe für die qualitativen Bestimmungen im Seienden: auch eine bestimmte Qualität kann nur zusammen mit der entgegengesetzten gedacht werden. Dieser Zusammenhang zwischen Gegenständen und Anschauungen resp. Qualität und Quantität wird der besondere Gegenstand des zweiten Unterabschnitts dieses Abschnittes sein.

gleichseins bedeutet. Zugleichsein kann als etwas von dem Nebeneinandersein verschiedenes nur solange betrachtet werden, solange Nebeneinander und Nacheinander nicht als direkte Gegensätze erkannt sind, denn nur bis dahin fassen wir das Zugleichsein, da dasselbe Negation des Nacheinanders ist, einzig und allein als den direkten Gegensatz des letzteren auf. Sobald wir aber dazu gelangen, Nacheinander und Nebeneinander als direkte Gegensätze zu erkennen, verschwindet dieser Irrthum, und die vollkommene Identität zwischen Zugleichsein und Nebeneinandersein wird sogleich eingesehen. Es besteht aber noch ein tieferer Grund ihres Unterscheidens: wie wir sehen werden, bilden Nacheinander und Nebeneinander keine wechselseitige sondern eine einseitige Abhängigkeit, in der dem Nebeneinander die primäre Stellung angehört. Ein Nebeneinander ist ohne Nacheinander denkbar, aber nicht umgekehrt, deshalb wenn wir die Abwesenheit des Nacheinander im Nebeneinander ausdrücken wollen, thun wir es durch den Ausdruck des Zugleichseins, wäre das Nacheinander immer mit Nebeneinander gegeben so wäre auch dieser besondere Ausdruck seiner Abwesenheit nicht nöthig. Freilich ist diese Abwesenheit nichts positives und das ist der Irrthum der begangen wird, wenn das Zugleichsein neben dem Nacheinander als ein wesentliches Zeitverhältniss betrachtet wird.

Worin besteht nun das Wesen des Nacheinanders im Unterschiede von Nebeneinander? Da diese Verhältnisse ganz einfach sind, so lassen sie sich nicht auf einfachere zurückführen und demnach nicht weiter erklären. Nur in Bezug auf die Art und Weise der Existenz, die das Seiende in diesen beiden Verhältnissformen hat, lassen sich beide näher unterscheiden und beschreiben: das Seiende befindet sich in dem reinen Nebeneinander in vollkommener Ruhe, in dem reinen Nacheinander in vollkommener Bewegung und Veränderung. Wenn Seinsbestandtheile *nebeneinander* sind, so befinden sie sich im Zustande der Ruhe, wenn sie *nacheinander* sind, so befinden sie sich im Zustande der Bewegung, oder wenn sie nebeneinander sind bleiben sie *unverändert*, wenn sie nacheinander sind sind sie *veränderlich*. Ruhe und Bewegung, Unveränderlichkeit und Veränderlichkeit sind die beiden einzig möglichen Zustände des Seienden, die unmittelbar mit den beiden Ordnungen des Nebeneinander- und Nacheinanderseins im Seienden zusammenhängen. Ohne Ruhe ist das Nebeneinaner, ohne Veränderung ist das Nacheinander undenkbar, und umgekehrt, ohne Nebeneinander ist die Ruhe, ohne Nacheinander ist Veränderung und Bewegung undenkbar. Nebeneinander und Nacheinander sind, für sich betrachtet, reine Verhältnisse,

also rein formale Kategorialbestimmungen. Als solche sind sie völlig nichtig und inhaltslos und wenn sie doch im Seienden eine Bedeutung haben sollen, müssen sie in unmittelbare Beziehung mit realen Kategorialbestimmungen gebracht werden. die sie ermöglichen und die ihnen einen Sinn verleihen. Nun ist der Zustand der Ruhe eine reale Kategorie, weil es der reale zeitlose simultane Negationsact selbst ist, der die Ruhe als solche setzt und bedeutet, während der reale Veränderungsact ebenso als reale Kategorie den Zustand der Veränderlichkeit setzt und bedeutet. Nebeneinander als reines inhaltsloses Verhältniss bedeutet nichts anderes als dass eine Vielheit von Seinsinhalten durch reale Negationsacte im Zustande der Ruhe erhalten wird, und ebenso kann das Nacheinander als inhaltsloses Verhältniss nichts anderes bedeuten. als dass eine Vielheit von Seinsinhalten durch reale Veränderungsacte im Zustande der Veränderung begriffen ist. Nebeneinander und Nacheinander sind also keine besonderen Wesenheiten (leerer Raum und leere Zeit) sondern rein formale Verhältnisse, also rein formale Kategorialbestimmungen im Seienden. Dass das Nacheinander keine reale Wesenheit ist und sein kann, sondern ein blosses Verhältniss. haben wir mit absoluter Gewissheit fesgestellt. indem wir die Unmöglichkeit des leeren Zeitwesens festgestellt haben: dass es mit dem Nebeneinander dasselbe Bewandtniss hat. wird uns das nächste Kapitel lehren.

Dass das Nacheinander ohne die Veränderung nicht möglich ist. ist wohl einleuchtend, dass umgekehrt die Veränderung ohne Nacheinander nicht möglich ist. ist etwas was einem vorurtheilslosen Verstande auf den ersten Blick einleuchtet. was aber jedoch von einigen in Zweifel gezogen worden ist. Man hat sich nämlich die Möglichkeit einer zeitlosen Veränderung gedacht. Nun, wir haben ja im letzten Kapitel des ersten Abschnitts in der That gesehen. dass die zeitlose Thätigkeit möglich ist. müssen aber hier feststellen, dass zeitlose Thätigkeit ganz gut von der zeitlichen Thätigkeit, von der Veränderung unterschieden werden kann. Während die zeitlose Thätigkeit vor einer aber allerdings recht tiefen kritischen Analyse Stand hält und wirklich ein widerspruchsloser Begriff ist. ist die zeitlose Veränderung eine wahre contradictio in adjecto. Wenn man von zeitloser Veränderung spricht. so meint man im Grunde die zeitlose Thätigkeit. und vergisst dabei dass zeitlose Thätigkeit nicht Thätigkeit im gewöhnlichen Sinne ist. und dass dieselbe mit Veränderung gar nichts zu thun hat. ein absolut beständiger Setzungsact ist. Bei der zeitlosen Thätigkeit erhält sich zeitlos ohne Änderung ein bestimmter Zustand: jede Änderung des Zustandes ist notwendiger-

weise an die Zeit, an das Nacheinander gebunden. Wenn ein bestimmter Zustand, eine bestimmte Atomenconstellation z. B., geändert werden soll, so kann sie nur in der Zeit verändert werden: denn der neue Zustand ist eben nicht mehr der alte, der alte ist durch die Veränderung in den neuen übergegangen, der neue ist *nach* dem alten gekommen. Veränderung ohne Nacheinander ist demnach absolut undenkbar. Es kann ein und derselbe Zustand so verändert werden, dass er ein und derselbe bleibt, d. h. wiederholt wird, dabei ist aber der neue Zustand wenn nicht qualitativ (keine neue Constellation) so doch *numerisch* von dem früheren verschieden, und diese numerische Verschiedenheit ist genügend, um dabei Veränderung und Nacheinander vorauszusetzten und diesen Fall streng zu unterscheiden von dem beständigen Erhalten eines und desselben Zustandes durch die zeitlose Thätigkeit. Unveränderlichkeit liesse sich noch ohne Nebeneinandersein denken, wenn man nämlich durch Abstraktion ein Seiendes als einfache Einheit isoliert, Veränderung dagegen ist ohne das Nacheinander absolut undenkbar, denn durch Veränderung wird schon eine Vielheit gesetzt, der eine Augenblick ist von dem anderen numerisch verschieden, und Vielheit ist entweder als nebeneinander- oder als nacheinanderseiende Vielheit gesetzt. Veränderung ist Aufhebung des Unveränderlichen, ist Negation, Negation ist aber Trennung und jede Trennung bringt Vielheit hervor, wie ist also Veränderung ohne das Nacheinander denkbar?

Nachdem wir die absolute Identität von Zeitlichkeit, Succession und Veränderung nachgewiesen haben, kommen wir nun auf das grosse Problem der Theilbarkeit der Zeit in's Unendliche, ein Problem von dessen Lösung das quantitative Weltproblem in letzter Instanz abhängt.

Das Hauptargument für das notwendige Bestehen der Zeit aus absolut einfachen untheilbaren Theilen ist zwar längst gefunden, aber wenig beachtet und verstanden worden.*) Die Theile der Zeit sind offenbar nacheinander gegeben, und es kann in derselben, wenn Zeit und Raum wirklich die beiden einzig möglichen Ordnungsformen im Seienden sind, und wenn alle Kategorien letzten Endes aus dem Negationsprincip stammen, keine nebeneinanderseiende Theile geben, die Zeitreihe kann, um vollständiger Gegensatz der simultanen Raumreihe zu sein, nur nacheinanderseiende, successive Theile besitzen. Wenn dem nun so ist, dann kann die Zeit nicht bis in's Unendliche theilbar sein, sie muss aus letzten absolut einfachen Theilen

*) Das Argument befindet sich bei Hume (vgl. Treatise on human nature, Book I, p. II, sect. II.) und bei Bayle, Dictionnaire historique et critique, Art Zénon.

bestehen. Sind die Theile der Zeit nacheinander, dann kann es mehrere Zeittheile zugleich nicht geben, d. h. es kann nur ein einziger Zeittheil reell gegeben sein. Denn könnten mehrere Zeittheile reell gegeben werden, dann wären sie nicht mehr nacheinander, sondern nebeneinander, da nur dasjenige reell gegeben ist, was zugleich gegeben ist (in dem Nacheinander ist der vergangene Theil nicht mehr gegeben, der zukünftige noch nicht gegeben und nur der gegenwärtige da, also nur der gegenwärtige reell gegeben). Enthielte aber der eine reell gegebene Zeittheil Theile in sich, d. h. wäre er aus einfacheren Theilen zusammengesetzt, dann fragt es sich, ob diese Theile nebeneinander oder nacheinander sind. Nebeneinander können sie nicht sein, weil es in der Zeit kein Nebeneinander giebt, nacheinander können sie auch nicht sein, weil sie dann nicht alle reell sein könnten, also kann es in dem einen reell gegebenen Zeittheile keine einfacheren Theile mehr geben, derselbe muss einfach und untheilbar sein.

Man wird, indem man sich in diese Argumentation vertieft, finden, dass sie mit absoluter Klarheit nur so viel beweist, dass in der Zeitreihe der reell gegebene d. h. der eben gegenwärtige Augenblick absolut einfach und untheilbar ist, dann aber gleich hinzufügen, dass aus der Untheilbarkeit des Gegenwartsaugenblickes gar nicht die Untheilbarkeit der Zeitreihe selbst folgt. Das Nacheinander schliesst eine Vielheit von zugleich gegebenen Zeittheilen aus — und daraus folgt unzweifelhaft die Untheilbarkeit des Gegenwartsaugenblickes. Aber der Nacheinanderact selbst, der Veränderungsact, der den einen gegenwärtigen Augenblick von dem eben vergangenen trennt, dieser Veränderungsact selbst kann vielleicht in's Unendliche theilbar sein, und das würde dann auch die Theilbarkeit der Zeitreihe in's Unendliche bedeuten. Um zu entscheiden, ob der Veränderungsact wirklich in's Unendliche theilbar ist, stellen wir die folgende Frage: sind die Theile des Veränderungsactes selbst nacheinander oder nebeneinander? Wenn sie nebeneinander sind, dann ist offenbar keine Veränderung da, wenn nacheinander, dann muss man anerkennen, dass immer zugleich nur ein einziger gegeben ist, dass also schliesslich jeder der vorausgesetzten Theile ein einfacher untheilbarer Veränderungsact ist, wodurch man aber nur die Einfachheit und Untheilbarkeit des Veränderungsactes selbst anerkennt. Aristoteles, der die Untheilbarkeit des Gegenwartsaugenblickes in seiner Physik *anerkennt*, behauptet, dass der Veränderungsact selbst in's Unendliche theilbar ist, und vergleicht dabei den Gegenwartsaugenblick (das Jetzt) mit dem geometrischen Punkte in einer continuir-

lichen Raumlinie, so dass die continuirliche Raumstrecke, die zwischen zwei solchen Punkten liegt, der Continuirlichkeit des Veränderungsactes in der Zeitreihe entsprechen soll (wie es in dem geometrischen Punkte keine Ausdehnung, so giebt es in dem Jetzt keine Veränderung), und bemerkt dabei nicht, dass diese Analogie ganz unzutreffend ist. Ich kann in der continuirlichen Raumlinie durch zwei geometrische Punkte eine beliebig kleine Raumstrecke abgränzen, und umgekehrt in jeder noch so kleinen Raumstrecke sind geometrische Punkte zu setzen; in dem vorausgesetzten continuirlichen Veränderungsacte dagegen, der den gegenwärtigen Zeitpunkt von dem eben vergangenen und unmittelbar vor ihm gegenwärtig gewesenen Zeitpunkt trennt, sind keine einfachen Zeitpunkte mehr vorhanden, sondern nur Veränderungsacte als Bestandtheile jenes ganzen Actes. Da diese vorausgesetzen Veränderungsacte aber nacheinander sind, so müssen sie durch gegenwärtige Zeitpunkte voneinander getrennt sein, was aber nicht mehr und nicht weniger bedeutet als dass der zwei unmittelbar aufeinanderfolgende einfache Zeitmomente trennende Veränderungsact absolut einfach sein muss.

Die absolute Einfachheit des Veränderungsactes lässt sich aber auch ganz direkt und ohne Hülfe der Nacheinanderordnung, die er ja erst setzt, beweisen. Im letzten Kapitel des vorigen Abschnitts haben wir zwar gesehen, dass der Veränderungsact nicht mit dem simultanen Negationsact zu verwechseln ist, dass er aber als solcher selbst alle die formalen Eigenschaften des Negationsactes hat und in diesem Sinne selbst Negation, nur eine Negation besonderer Art ist. Der Veränderungsact ist nicht nur in Bezug auf Simultaneität — diese ist ja in ihm selbst schon als solche absolut ausgeschlossen, — sondern auch in Bezug auf die Successivität absolut einfach, in Bezug auf die Simultaneität ist dies bei ihm selbstverständlich, auch wenn er nicht als Negationsact betrachtet wird, in Bezug auf Successivität in Wahrheit auch ganz ebenso, was sobald eingesehen wird, sobald man sich in sein Wesen vertieft. Wäre die Veränderung aus successiven Theilen zusammengesetzt, so hiesse das offenbar, dass der eine Theil derselben erst durch den vorhergehenden ermöglicht wird, dass dieser vorhergehende also der Veränderungsact dieses zweiten Veränderungsactes ist u. s. f. in infinitum, es müsste damit also anerkannt werden, dass Veränderung nur durch eine andere ihr unmittelbar vorhergehende Veränderung entstehen kann u. s. f. in infinitum, was jedoch offenbar absurd ist, da Veränderung nur Veränderung eines Etwas sein kann, was nicht selber Veränderung ist, sondern eben sich durch die ihm gleichsam hinzu-

kommende Veränderung verändert. Der Veränderungsact muss also auch in successiver Hinsicht ebenso einfach sein, wie der simultane Negationsact aus eben demselben Grunde (weil eine Beziehung der Beziehungen unmöglich ist) simultan einfach und untheilbar ist. Der eigenthümliche Unterschied aber, der zwischen beiden besteht, kann hier noch nicht so formuliert werden, dass man denselben wirklich als solchen erkennt; erst die ganze Untersuchung über das Wesen der Zeit und des Nacheinanders wird uns in die Lage setzen, den Unterschied als solchen wirklich aufstellen zu können.

Zwei Gründe lassen sich der oben ausgeführten Argumentation entgegenstellen. Erstens wird man sagen, dass dieselbe nur die Untheilbarkeit der letzten Bestandtheile der Zeit feststellt, damit ist aber nicht gesagt, dass eine unendliche Anzahl von solchen untheilbaren Theilen nicht in einem endlichen Zeittheile bestehen kann. Man vergisst aber dabei, dass, sobald man die Theilung einer endlichen Grösse in unendlich viele Theile erster Ordnung zulässt, man dann weiter mit eben derselben Notwendigkeit die Theilung jeder dieser unendlich kleinen Theile erster Ordnung in eine unendliche Anzahl unendlich kleiner Theile zweiter Ordnung zulassen muss u. s. w. in's Unendliche der Unendlichkeiten, dass man also dabei vollständig die letzten untheilbaren Theile der Zeit verschwinden lässt, was doch jene Argumentation so unzweideutig feststellt.*) Daraus folgt, dass eine endliche Zeitstrecke nur aus einer endlichen Anzahl von diesen einfachen Zeittheilen bestehen kann, dass die Zeit also nicht in's Unendliche theilbar ist.

Zweitens kann man die absolute Geltung dieser Argumentation aus den angegebenen Gründen anerkennen, wenn die Zeit als aus discreten Theilen bestehend vorausgesetzt wird, die Geltung derselben aber völlig wegläugnen für die absolut continuirliche Zeit. Und ich will gerne bekennen, dass man mit diesem Einfall wirklich die zwingende Macht jener Argumentation völlig lahmlegen würde, nur leider ist die dabei gemachte Voraussetzung selbst in Bezug auf die

*) Wäre die Zeit in's Unendliche theilbar, dann käme nie eine Veränderung zu Stande. Denn wenn jede Veränderung eine andere ihr vorhergehende voraussetzt, durch die sie erst ermöglicht wird, und die Reihe dieser Veränderungen in's absolut unbestimmte Unendliche geht, so dass man nie zu letzten absolut einfachen Veränderungen gelangt, dann kann eine Veränderung (resp. eine irgendwie endliche oder unendlich kleine Zeitstrecke) überhaupt nicht entstehen, da es letzten Endes nichts giebt was sie als solche hervorbrächte. Ich bemerke ausdrücklich, dass diese Argumentation hier nur die Theilung der Veränderung in's Unendliche betrifft, ohne Rücksicht darauf ob sie auf die unendliche Reihe der Veränderungen selbst nach oben, d. h. in der Richtung der Vergangenheit und Zukunft Anwendung finden kann oder nicht.

Natur der Zeit völlig und absolut unhaltbar. Der leere Raum lässt sich noch anscheinend als ein absolutes Continuum denken, in dem absolut keine geschiedenen Theile, weder endlicher noch unendlicher Art, anzutreffen sind, nur dass dieser leere Raum, wie wir sehen werden, dadurch völlig unfähig wird, die getheilten Dinge in sich aufzunehmen, die leere Zeit aber, da sie als Zeitstrom zu denken ist (fliesst die leere Zeit nicht selbst, so unterscheidet sie sich, wie wir gesehen haben, in gar nichts von dem leeren Raume), kann als ein solches Continuum absolut nicht gedacht werden, denn der Zeitstrom ist fliessend, und als Fluss vermag er nicht etwas continuirliches zu sein. In dem reinen Zeitstrome ist immer nur der eine und zwar der gegenwärtige Theil reell gegeben, und in jedem Augenblicke ist es ein anderer Theil der reell gegeben ist, in jedem Augenblicke also wird die Zeit unterbrochen, und in diesem fortwährenden Unterbrechen besteht der Zeitstrom, besteht das Fliessende des Zeitstromes. Wenn der Zeitstrom als continuirlich aufgefasst wird, so schiebt dabei unser Denken unvermerkt das Bild der reinen leeren ruhenden die Zeit darstellenenden geraden Linie dem Begriffe des Zeitstromes unter, nicht bedenkend, dass dasjenige, dessen Dasein immer nur in einem untheilbaren kleinsten Theile besteht, und das nie als Totum gegeben ist, nicht als ein Continuum, d. h. als ein aus ungetheilten Theilen bestehendes Ganze existieren kann. Der gegenwärtige Moment der Zeit ist einzig und allein gegenwärtig gegeben, der vergangene ist nicht mehr und der zukünftige noch nicht: wie kann da von einer continuirlichen Zeit gesprochen werden, wenn das Wesen der Zeit gerade darin besteht, immer in einem einzigen Theile zu bestehen. Das Nacheinander schliesst notwendig die Continuität aus, indem es das gleichzeitige Bestehen der vielen Theile *völlig* ausschliesst, und dadurch die Zeit in reelle Theile, von denen immer nur einer reell gegeben ist, theilt. Das Nacheinander als Negation (und wie kann man das Nacheinander mit der Negation *nicht* identificieren) trennt reell den einen Theil der Zeit von dem anderen, so dass die Zeit kein Continuum sein kann: wenn es irgendwo im Gebiete des Wirklichen eine Negation und eine Trennung giebt, so ist es bei der Zeit der Fall, wo der eine Theil durch Negation wirklich aufgehoben und so als aufgehobener erst das Auftreten des anderen ermöglicht, und da wo die Trennung, wo das Zerfallen in Theile so offenkundig ist, spricht man noch von einem Continuum! Wie man also sieht, ist dieser zweite Einwand gegen jene Argumentation völlig nichtig und ein blosser Einfall müssiger Phantasie, die ihre Produkte durch das strenge Denken

nicht zu kontrolieren vermag. Zugleich sieht man aber auch, wie sich diese Argumentation nur dann als absolut unüberwindlich erweist, wenn Veränderung und Negation identificiert werden, was seinerseits wieder nicht abzuweisen ist, wenn die Negation als das innere formale Princip des Seienden anerkannt wird.

Die Schwierigkeit, die Zeit aus discreten Theilen zusammensetzen zu lassen, besteht darin, dass man meint, dadurch werde die Extensität der Zeit selbst vernichtet. Wie ist Ausdehnung, wie ist Vielheit in der Zeit denkbar, wenn ihre letzten Theile einfach und absolut untheilbar sind? Was einfach und untheilbar ist, deren Grösse ist Null und aus lauter Nullen ist keine Grösse zu gewinnen. Diese Schwierigkeit zu beheben hat nun wirklich kein Endlichkeitsphilosoph versucht, und deshalb ist der Unendlichkeitsbegriff bei der Zeit (und von da auch beim Raum) zu einer so unbedingten Herrschaft gelangt. Nun, die Sache ist nicht gerade so schwer, wie es auf den ersten Blick zu sein scheint. Erstens ist, rein mathematisch betrachtet, die Behauptung, dass eine extensive Grösse aus einfachen Einheiten nicht zusammengesetzt werden kann, falsch. Nur dann wäre das richtig, wenn die Definition der Quantität als desjenigen was Theile hat und theilbar ist richtig wäre. Dem ist aber nicht so. In der reinen Arithmetik, wenn wir aus derselben gebrochene und irrationale Zahlen ausschliessen und nur die ganzen Zahlen behalten, giebt es zwischen einer zusammengesetzten Zahlvielheit und der Null, als der Abwesenheit der Zahlgrösse, etwas in der Mitte was nicht mehr Vielheit ist, was also nicht mehr theilbar ist, und was doch unzweifelhaft ein Quantum ist, und das ist die absolut einfache untheilbare Zahleinheit, das Eins. Wenn wir uns also eine arithmetische Grösse aus einfachen Grössentheilen zusammengesetzt denken können (in dem nächsten Kapitel wird der stringente Beweis geliefert werden, dass die arithmetische Zahleinheit absolut einfach und untheilbar ist), warum sollten wir uns nicht eine extensive Grösse ebenso aus einfachen Einheiten zusammengesetzt denken können. Das Beispiel der arithmetischen Zahlengrösse zeigt, dass eine solche aus einfachen untheilbaren Einheiten zusammengesetzte Grösse keine begriffliche Unmöglichkeit darstellt: wenn es also begrifflich möglich ist eine discrete aus einfachen Einheiten zusammengesetzte Grösse zu denken, dann wird auch eine solche reale Grösse möglich sein, sobald es irgendwo im Seienden ein reales Correlatum jener einfachen begrifflichen Einheit geben wird. Und eine solche reale Einheit ist nun thatsächlich im Gebiete der Zeitreihe gegeben: es ist der reell gegebene absolut einfache Gegenwartsaugenblick, der mit realem Inhalte

erfüllt ist. Und zweitens, in der reinen arithmetischen Grösse sind alle die dieselbe zusammensetzenden einfachen Einheiten so miteinander verbunden dass sie in der einen Zahlgrösse gleichsam ihre Selbstständigkeit verloren, nicht mehr auseinander sind. Die nacheinanderfolgenden realen Augenblicke der Zeit dagegen sind getrennt gegeben, sie sind durch die realen aber mit keinem Seinsinhalt erfüllten Veränderungsacte voneinander getrennt, und darin besteht eben die Extensität der Zeit. Warum sollte also die extensive Zeitreihe als die blosse Aneinanderreihung der einfachen inhaltlich erfüllten durch einfache Veränderungsacte voneinander getrennten nacheinander folgenden Gegenwartsaugenblicke nicht zu Stande kommen können? Die Grösse des einfachen erfüllten Gegenwartsaugenblicks ist ja 1 und nicht 0, während die Grösse der dieselben trennenden Veränderungsacte 0 ist: die mit keinem realen Inhalte erfüllten Veränderungsacte sind nämlich im Vergleich mit den erfüllten Zeitaugenblicken ihrer Grösse nach als Nullen zu betrachten.

Wir müssen nun erklären, in welchem Sinne dies Letztere gemeint ist, da ja die Veränderungsacte, wie wir in dem letzten Kapitel des vorigen Abschnitts gesehen haben, eine besondere Realitätsart darstellen, also selber mit einem eigenthümlichen Inhalt erfüllt sind, also nicht absolute Nullen, sondern besondere mit den Einheiten des realen Inhalts unvergleichbare Einheiten darstellen. Wenn wir nun also sagen, dass der Veränderungsact als solcher nicht mit realem Inhalt erfüllt ist, so meinen wir damit, dass derselbe nicht mit dem primären qualitativ-quantitativen Inhalte erfüllt ist, nicht aber dass er mit keinem Inhalte erfüllt ist. Die vergangenen und die zukünftigen Augenblicke, aus denen die Zeitreihe besteht, sind, da dieselben ja die einmal gegenwärtig gewesenen und die einmal gegenwärtig sein werdenden Augenblicke sind, in diesem Sinne ganz ebenso als erfüllte Augenblicke zu betrachten, wie es der eben gegenwärtige Augenblick ist. Es kann nun gefragt werden, ob der zwischen den erfüllten Zeitaugenblicken bestehende Veränderungsaugenblick selbst in diese Zeitreihe hineingehört oder nicht. Denn gehört der Veränderungsact selbst als solcher in die Reihe der erfüllten Augenblicke hinein, so dürfen wir eigentlich nicht mehr die Veränderungsacte als Null-Grössen in der Zeitreihe betrachten, sondern wir müssen die Zeitreihe als aus zwei gänzlich heterogenen Einheitsarten bestehende extensive Grösse betrachten. Bei der Raumreihe werden wir nun in dem nächsten Kapitel sehen, dass die einfachen Negationsacte, die die realen Raumpunkte voneinander trennen, in dieser Reihe selbst als solcher nicht gegeben sind, und deshalb

ganz wohl in jener Reihe als leere nichtseiende Lücken betrachtet werden können, deren Grösse 0 ist. Bei der Zeitreihe ist dasselbe der Fall, nur können wir dies hier noch gar nicht einsehen, in diesem Kapitel werden wir erst später daran eingehen können, um es dann in dem dritten Abschnitt der Ontologie endgiltig festzustellen. Aber selbst wenn Veränderungsaugenblicke in die Reihe der erfüllten Zeitaugenblicke selbst hineingehörten, wäre damit doch die extensive aus einfachen Einheiten bestehende Grösse der Zeit da, nur bestände sie dann aus zwei heterogenen Arten von einfachen Einheiten, und nicht aus denjenigen einer und derselben Art.

Ob die Zeit die notwendige Form aller Seininhalte sein muss, ob das Seiende ebenso notwendigerweise der Succession unterworfen sein muss, wie es mit dem Nebeneinander, wie wir sehen werden, der Fall ist? Ist die Zeitreihe unendlich, d. h. in der Richtung der Vergangenheit ebenso anfanglos wie in der Richtung der Zukunft endlos? Um dies grosse Problem, das sich in letzter Instanz als das die ganze Metaphysik beherrschende erweisen wird, auflösen zu können, müssen wir uns, besonders wenn, wie wir dies in der Erkenntnisslehre (Kap. III.) ausgeführt haben, auf die Vielheit der zeitlichen Momente nur auf Grund der zählenden Thätigkeit des zeitlosen Subjects, die dasselbe an unveränderlichen Wahrnehmungsinhalten vollzieht, geschlossen werden kann, des Zeitsymbols der geraden Linie bedienen.

Die gerade Linie ist auch in Wahrheit nicht bloss eine zufällige äusserliche Analogie zur Verdeutlichung der Grundeigenschaften der Zeit, sondern sie ist eine notwendige Analogie, da wir erst dadurch zum Bewusstsein der zeitlichen Reihe überhaupt gelangen. Durch unsere Apperception durchlaufen wir successiv die einfachen Punkte der geraden Linie, indem wir jeden dieser einfachen Punkte als Zahleinheit fixieren und alle zusammenzählen. Der einfache Raumpunkt der geraden Linie stellt so den erfüllten einfachen Zeitaugenblick dar, der unerfüllte Zwischenpunkt (resp. die continuirliche Raumstrecke), der zwei erfüllte Raumpunkte trennt, entspricht dem unerfüllten Zeitaugenblicke der Veränderung, die Vielheit der nebeneinander gegebenen einfachen Punkte der geraden Linie entspricht der Vielheit der aufeinaderfolgenden Augenblicke, die Eindimensionalität der geraden Linie entspricht der Einförmigkeit der Zeitreihe. Die Eindimensionalität der geraden Linie entspricht, sagten wir soeben, der Einförmigkeit der Zeitreihe: Vergangenheit und Zukunft, die von Gegenwart getrennt werden, stellen zwei ganz entgegengesetzte Richtungen dar, die durch die negative Natur des Successionsactes bedingt sind. Während im Gebiete der realen Kategorien die

Negation einen inhaltlichen qualitativen (resp. numerischen) Unterschied setzt, setzt sie hier im Gebiete der formalen Kategorien des Raumes und der Zeit einen blossen Richtungsunterschied (nämlich insofern Raum und Zeit als reine Verhältnisse betrachtet werden). Ebenso wie weiss und schwarz unvertauschbar sind, ebenso sind es die positive und die negative Richtung im Gebiete der Zeitlichkeit. Im Gebiete der Räumlichkeit besteht wohl ein absoluter Richtungsunterschied zweier getrennten Punkte von der Stelle ihrer Trennung aus gerechnet, es ist aber dabei ganz gleichgültig, welche von beiden Richtungen als positiv und welche als negativ betrachtet wird, das Abhängigkeitsverhältniss zwischen beiden ist dasjenige der wechselseitigen Abhängigkeit, dagegen ist das Abhängigkeitsverhältniss zwischen Vergangenheit und Zukunft ein einseitiges. Während nämlich Vergangenheit ohne Zukunft nicht denkbar ist, ist die Zukunft ohne Vergangenheit ganz gut denkbar, da alles was vergeht notwendigerweise zuvor zukünftig sein musste, während das Zukünftige gar nicht zu vergehen braucht. Was vergangen ist kann nicht mehr zukünftig werden, während also Zukunft in Vergangenheit übergehen kann, kann die Vergangenheit nie in die Zukunft hinübergehen. Vergangenheit ist die negative und die Zukunft ist die positive Richtung der Zeit und diese beiden Grundrichtungen der Zeit sind *unvertauschbar*. Bei der Einförmigkeit der Zeit sind eigentlich zwei Momente zu unterscheiden: der blosse gleichmässige Verlauf und die Unvertauschbarkeit der Richtungen desselben. Das erste formale Moment der Einförmigkeit ist durch die absolute Geradheit der geraden Linie dargestellt, die an keiner Stelle Biegungen und Abweichungen von der geraden Richtung zeigt, das zweite inhaltliche Moment ist durch die gerade Linie nicht auszudrücken, da die beiden entgegengesetzten Richtungen dieser letzteren vertauschbar sind.*)

*) Nur durch eine willkürliche Fiktion lässt sich diese Unvertauschbarkeit der beiden Zeitrichtungen an der geraden Linie zur Darstellung bringen: wenn man nämlich an einer geraden Linie eindeutig diese Richtung als — und die andere als + willkürlich festhält, dann lassen sich auch diese Richtungen in dem Sinne nicht mehr vertauschen, dass, so sehr wir die eine der beiden auch fortgesetzt denken mögen, dieselbe nie zu der anderen sich nähern und die andere werden kann. Wir werden im zweiten Abschnitt sehen, dass die gerade Linie wirklich diese Eigenschaft besitzt, sowohl im endlichen wie im unendlichen Raume, dass sie in keinem Falle als Peripherie eines Kreises mit unendlichem Radius betrachtet werden kann. Dass bei dieser willkürlichen Fixierung die Vergangenheit durch die negative, die Zukunft durch die positive Richtung darzustellen ist, braucht wohl nicht besonders hervorgehoben zu werden, da die Momente der Vergangenheit nicht mehr sind, also nicht sind, während die Momente der Zukunft noch nicht sind, in einem gewissen Sinne also noch sind.

Und hier liegt die einzige Discrepanz zwischen der geraden Linie und dem Zeitstrom: Vielheit und formale Einförmigkeit sind in der geraden Richtung darstellbar, die Unvertauschbarkeit dagegen nicht, dasjenige also worin gerade das Unterscheidende der Succession von der Simultaneität liegt. Das Aufeinanderfolgen der vielen zeitlichen Momente ist nur als das Nebeneinanderfolgen der einfachen Punkte der geraden Linie darstellbar, deshalb aber weil wir dies Nebeneinander nur nacheinander in seiner genauen Zahlengrösse auffassen können entsteht der Schein, als ob die Succession der vielen zeitlichen Momente in dem Nebeneinandersein der vielen Einheiten der geraden Linie selbst läge. Nur das Aussereinandersein der vielen nacheinanderfolgenden Momente ist durch das Aussereinandersein der vielen Raumpunkte der geraden Linie adequat darstellbar, die Succession selbst aber bloss symbolisch, indem das Nebeneinander in unserer apperceptiven Auffassung nacheinander aufgefasst wird, und nun das Eine das Andere zu vertreten kommt. Die gerade Linie als etwas simultanes kann demnach das Wesentliche der Succession, die Unvertauschbarkeit der beiden Richtungen, nicht darstellen. So notwendig demnach die gerade Linie als Darstellung des Zeitverlaufs auch ist, so ist sie doch ein blosses Symbol, das in dem wichtigsten Punkte hinter dem reellen Urbild zurückbleibt.

Nun können wir uns die gerade Linie sowohl nach rückwärts als nach vorwärts, wenn wir in unseren Gedanken beide Richtungen eindeutig obgleich willkürlich fixiert haben, in's Unendliche fortgezogen denken, und zwar geschieht dieses Fortziehen der geraden Linie, wie ihr Zählen überhaupt, nur in der Zeit. Eine wirklich und actuell unendliche Linie können wir uns nicht vorstellen, wir stellen uns immer eine endliche gerade Linie vor, nur können wir sie in jedem Augenblicke grösser denken, indem wir sie in jedem Augenblicke durch unsere produktive Einbildungskraft verlängern. Dieses zeitliche Verlängern der geraden Linie scheint uns nun sowohl in der Richtung der Vergangenheit (der negativen) als in derjenigen der Zukunft (der positiven Richtung) ohne Ende möglich zu sein, so dass wir der Zeit selber keine Grenzen setzen können, so dass uns die Zeit sowohl nach rückwärts wie nach vorwärts endlos erscheint. Sobald wir aber näher diese Endlosigkeit der Zeit in ihren beiden Richtungen betrachten, glauben wir einen wesentlichen Unterschied zwischen beiden entdecken zu können. Da der Unterschied zwischen den beiden unvertauschbaren Richtungen der Vergangenheit und der Zukunft darin besteht, dass Vergangenheit *nicht mehr ist* d. h.,

schon verwirklicht ist, während die Zukunft *noch nicht ist* d. h. *noch nicht verwirklicht ist*, so schliessen wir daraus, dass die endlose Vielheit der vergangenen Augenblicke schon verwirklicht ist, d. h. dass von dem gegenwärtigen Augenblicke aus gerechnet eine endlose resp. anfanglose Vielheit von Momenten vergangen ist, während die endlose Vielheit der zukünftigen Augenblicke noch nicht verwirklicht ist. In der Richtung der Vergangenheit ist die endlose Reihe der Zeitmomente schon vollendet, schon da, in der Richtung der Zukunft ist diese endlose Reihe gar nicht vollendet, die Endlosigkeit der Zukunft besteht eben darin, dass die Reihe ihrer Momente nie zu Ende kommen, dass diese Reihe nie *actu* unendlich werden kann, während die endlose Reihe der vergangenen Momente *actu* unendlich geworden ist. Die Endlosigkeit der Zukunft besteht darin, dass, so weit wir in die Zukunft hinaus auch fortgehen, immer eine endlose ewige Zukunft vor uns bleibt, deren Momente nie gegenwärtig werden können, d. h. die Reihe der zukünftigen Momente ist wohl potentiell endlos, sie kann immer und immer weiter ohne Ende vermehrt werden, aber die Anzahl der actuell gewordenen zukünftigen Momente ist immer eine *endliche* und *bestimmte*. Unbestimmt ist nur die Endlichkeit der actuell werdenkönnender zukünftigen Momente, aber jede verwirklichte Reihe der zukünftigen Glieder ist endlich und bestimmt. Darin soll eben auf den ersten Blick der Unterschied zwischen der endlosen Zukunft und Vergangenheit bestehen: dass jene immer unvollendet, diese immer vollendet ist, von welchem gegenwärtigen Augenblicke im Zeitstrome wir auch ausgehen mögen.

Nun, in dieser Bestimmung der unendlichen Zeitreihe hat man mit Recht Schwierigkeiten gefunden. In seiner ersten Antinomie der reinen Vernunft hat sie Kant zum erstenmale klar formuliert. Ob die Welt in der Zeit einen Anfang gehabt hat oder nicht, d. h. ob die Zeitreihe in der Richtung der Vergangenheit wirklich *actu* unendlich ist, das ist die Frage, die Kant hier behandelt. Die Thesis behauptet, dass die Welt einen Anfang in der Zeit habe, die Antithesis, dass sie keinen Anfang hat, und beide sollen mit gleich guten Gründen zu vertheidigen sein. Die Thesis beweist Kant indem er die Unmöglichkeit der Antithesis zu beweisen sucht und umgekehrt. Die Thesis beweist er so: „Man nehme an, die Welt habe der Zeit nach keinen Anfang, so ist bis zu jedem gegebenen Zeitpunkte eine Ewigkeit abgelaufen, und mithin eine unendliche Reihe aufeinanderfolgender Zustände (resp. Momente) der Dinge in der Welt verflossen. Nun besteht aber eben darin die Unendlichkeit einer

Reihe, dass sie durch successive Synthesis niemals vollendet sein kann. Also ist eine verflossene endlose Weltreihe unmöglich, mithin ein Anfang der Welt eine notwendige Bedingung ihres Daseins". Die Antithesis beweist er so: „Man setze, die Welt hat einen Anfang. Da der Anfang ein Dasein ist, wovor eine Zeit vorgeht, darin das Ding nicht ist, so muss eine Zeit vorhergegangen sein, darin die Welt nicht war, d. h. eine leere Zeit. Nun ist aber in einer leeren Zeit kein Entstehen irgend eines Dinges möglich, weil kein Theil eines solchen Dinges vor einem anderen irgend eine unterscheidende Bedingung des Daseins für die des Nichtseins für sich hat (man mag annehmen, dass sie von sich selbst oder durch eine andere Ursache entstehe). Also kann zwar in der Welt manche Reihe der Dinge anfangen, die Welt selber aber kann keinen Anfang haben, und ist also in Ansehung der vergangenen Zeit unendlich". Dass die Welt einen Anfang haben müsse, soll also daraus folgen, dass eine unendliche Reihe durch successive Synthesis nie vollendet werden kann, dass sie aber anfanglos sein müsse daraus, dass sonst eine leere Zeit vor der Succession stattfände, in der die Succession nicht anfangen könnte.

Wenden wir uns nun zuerst der Thesis zu. Die Unmöglichkeit der endlosen Reihe der vergangenen Zeitmomente soll in der Unmöglichkeit der Vollendung einer unendlichen Reihe durch successive Synthesis liegen. Nun ist es freilich selbstverständlich, dass eine unendliche Reihe durch successive Synthesis nie als vollendet gedacht werden kann, d. h. wir können in Gedanken nie eine unendliche Reihe von simultanen Punkten durch successive Synthesis vollkommen durchlaufen, oder, anders ausgedrückt, durch successives Fortziehen der geraden Linie nie dazu kommen, diese Linie als aktuell unendlich vorzustellen, aber in Wahrheit nur deshalb, weil unser Fortziehen dieser geraden Linie sowohl in der Richtung nach rückwärts als in derjenigen nach vorwärts in der Zeit geschieht und zwar in der Zukunftsrichtung der Zeit, die freilich nie actu sondern bloss potentiell unendlich ist. Wir können die unendliche Linie nur deshalb nicht durch successive Synthesis durchlaufen, weil jede unsere successive Synthesis in einem bestimmten Zeitmomente anfängt und in der Richtung der Zukunft verläuft. Jede successive Synthesis, die wir in Gedanken vornehmen, bewegt sich also in der Richtung der Zukunft, aus der Unvollendbarkeit der Zukunft aber können wir gar nicht so ohne weiters auf die Unvollendbarkeit der Vergangenheit schliessen. Kant dreht sich bei seiner Beweisführung demnach in einem Circulus: er will beweisen, dass die Succession

einen Anfang in der Vergangenheit haben müsse und beweist dies damit, dass er die Succession als Anfang habend voraussetzt. Wenn ich von dem gegenwärtigen Augenblicke ausgehe, so kann ich wohl in der Zukunft nie die endliche Reihe der Momente durch successive Synthesis zu Ende bringen, aber ich habe deshalb noch kein Recht dasselbe auch für die Vergangenheit anzunehmen. Das Wesen der Vergangenheit besteht gerade darin, dass sie eine der Zukunft entgegengesetzte Richtung ist, und was demnach in dieser ausgeschlossen ist, kann in jener vielleicht ganz gut zu Stande kommen. Für die Vergangenheit vorauszusetzen, dass in ihr die endlose Reihe der successiven Momente nicht zu Stande kommen könnte, weil die endlose Reihe der Momente in der Richtung der Zukunft, als worauf sich alle *denkbare* successive Synthesis zurückführt, nicht vollendet werden kann, diese Schlussfolgerung ist demnach völlig fehlerhaft und grundlos. Wenn Kant beweisen will, dass die Succession einen Anfang haben muss, so muss er dies direkt aus dem Wesen der Vergangenheit selbst beweisen, und nicht eine Eigenschaft, die zunächst nur der Zukunft angehört, ohne weiters auf die Vergangenheit übertragen.

Dass eine Schwierigkeit in dem Begriffe der anfanglosen Vergangenheit besteht, ist richtig, aber die von Kant gefundene besteht nicht und ist von Grund aus fehlerhaft. Denn wirklich wunderbar erscheint der unaufhaltsame Zeitstrom, der nie begonnen, und doch immer zu Ende ist, oder, was dasselbe ist, der von Ewigkeit her begonnen hat und *nie* zu Ende kommen wird. Er erscheint uns dann als eine halbe Unendlichkeit, die sich immer nur nach einer Seite ausdehnt, ohne je ganz unendlich zu werden. Und eine solche halbe Unendlichkeit ist ein wundersames Ding: wir fragen uns, wenn in der Vergangenheit die Zeit seit allen Ewigkeiten fliesst, warum sollte sie nicht einmal auch die ganze Zukunft durchlaufen und so dieselbe und also die ganze Zeit zu einem Stillstande bringen? Denn warum sollte eine Unendlichkeit, die auf der einen Seite unendlich ist, nicht ebenso auf der anderen Seite unendlich sein resp. werden können? Ob wir nun voraussetzen, dass diese Vollendung möglich ist oder dass sie nicht möglich ist, in jedem Fall kann die Succession nicht die notwendige Beschaffenheit am Seienden sein. Denn kann die ewige Zukunft nie mit zeitlichen Momenten ganz erfüllt werden, dann bleibt das Seiende offenbar in dieser ewigen Zukunft ohne Succession, setzt man aber voraus, dass die ewige Zukunft actu vollendet werden kann, dann hörte mit derselben auch das Seiende auf, folglich hörte dann mit demselben auch die

Succession selbst als solche auf, folglich ist die Succession nicht die notwendige Beschaffenheit am Seienden. Die eben dargelegte Antinomie ist zu einfach und einleuchtend als das sie jemandem auf den ersten Blick als ernst und werthvoll erscheinen könnte. Und doch sobald man sich in dieselbe vertieft, wird man einsehen, dass sie eine ernste tief in das Wesen der Zeit eingreifende Schwierigkeit darstellt. Wenn es nun unzweifelhaft ist, dass das Seiende, als etwas von dem Nichtseienden völlig und absolut verschiedenes, nie das Nichtseiende selbst werden, d. h. nie zu sein aufhören kann, dann werden wir von der Thatsache der ewigen Zukunft ausgehend, die aus diesem metaphysischen Axiom folgt, auch das Problem der Notwendigkeit der Succession für das Seiende leicht auflösen können.

Soll nun das Seiende ewig sein, soll die endlose Zukunft wirklich bestehen, dann kann der zeitliche Strom ebensowenig nach rückwärts actuell unendlich sein, wie er nach vorwärts nicht actuell unendlich ist. Denn die ewige Zukunft ist nur dann wirklich vorhanden, wenn das Seiende nie aufgehoben werden kann, denn kann das Seiende nie aufgehoben werden, dann ist auch der Strom der Zeitmomente in der Richtung der Zukunft endlos, d. h. es kann keinen absoluten Stillstand, es kann kein absolutes Ende desselben geben. Die ewige Zukunft ist also nur dann nicht von successiven Momenten erfüllt, wenn das Seiende absolut unaufhebbar ist Nicht ist die absolute Aufhebung des Seienden undenkbar, weil die absolute Aufhebung des endlosen Zeitstromes in der Richtung der Zukunft undenkbar ist, sondern umgekehrt, der endlose Zeitstrom in der Richtung der Zukunft ist unaufhebbar, weil das Seiende unaufhebbar ist. Wir wissen, dass die ewige Zukunft nie mit zeitlichen Momenten erfüllt werden kann nur auf Grund der absolut sicheren Wahrheit, dass das Seiende absolut unaufhebbar ist. Wenn dem nun so ist, woran nicht gezweifelt werden kann, dann kann auch die anfanglose Succession nicht bestehen, dann kann der endlose Zeitstrom in der Richtung der Vergangenheit nicht bestehen. Denn wenn die Zukunft deshalb endlos ist und nie vollendet werden kann, weil das Seiende kein Ende seiner Existenz hat, dann kann auch die Vergangenheit nicht vollendet sein, nicht aus einer unendlichen Anzahl von actuell vergangenen Momenten bestehen, denn das würde nicht weniger und nicht mehr bedeuten, als dass diese unendliche Reihe einmal begonnen hat, dass also das Seiende einen Anfang seiner Existenz gehabt, dass es einmal entstanden ist. Wir wollen dies durch die gerade Linie veranschaulichen. Denken wir uns die gerade Linie als actuell unendlich, so stellt,

von einem Mittelpunkte aus gerechnet der mit unserem Gegenwartspunkte zusammenfällt, die eine Richtung die unendliche Vergangenheit die andere die unendliche Zukunft. Der gegenwärtige Augenblick ändert fortwährend seinen Ort in dieser geraden Linie sich dem positiven Ende nähernd. Das positive Ende der absolut unendlichen Geraden kann dieser sich fortwährend bewegende Punkt nie erreichen, so weit er sich in dieser Richtung auch bewegen mag, immer bleibt vor ihm die halbe Unendlichkeit, die er nie erreichen kann, die ewig zukünftige Zukunft nämlich, d. h. die Zukunft deren Momente nie gegenwärtig werden können, die immer nur zukünftig sind. Dass diese ewig zukünftige Zukunft im Wesen der Zeit liegt, so widersprechend der Begriff derselben auch erscheinen mag, ist doch selbstverständlich, und folgt unmittelbar aus der geraden Linie. Dagegen soll sich nach der gewöhnlichen Auffassung der Sachlage in der negativen Richtung der Vergangenheit der Punkt seit Ewigkeit bewegt haben, was, wenn man die Sache nur vorurtheilslos betrachtet, nicht mehr und nicht weniger bedeutet als dass der sich bewegende Punkt seine Bewegung an dem von der Gegenwart unendlich weit nach rückwärts gelegenen Punkte begonnen hat d. h. dass die Succession einen Anfang in der Unendlichkeit gehabt hat. Wenn ich hiermit behaupte, dass die Succession notwendigerweise einen Anfang gehabt hat, so meine ich natürlich nicht den Anfang, den sie *in* der unendlichen Vergangenheit eventuell gehabt hat (und den sie, wie wir bald sehen werden, auch wirklich gehabt hat) sondern den mit dem die unendliche Vergangenheit selbst begonnen habe. Dass diese unendliche Vergangenheit selbst einen Anfang ihrer Unendlichkeit haben muss, folgt ja unmittelbar daraus, dass auch die unendliche Zukunft actuell gedacht ein absolutes Ende haben müsste, denn darin besteht eben der Unterschied zwischen dem actuell und potentiell Unendlichen, dass das potentiell Unendliche endlich nur unbestimmt endlich ist, d. h. kein bestimmtes Ende hat, während das actuell Unendliche die Vollendung einer unendlichen Reihe darstellt, also Anfang und Ende haben muss. Das actuell Unendliche unterscheidet sich von dem actuell Endlichen nur darin, dass bei jenem die Anzahl der Glieder unendlich, bei diesem endlich ist, aber beide als actuelle Grössen haben im Unterschied von der potentiellen Grösse das Gemeinsame, dass sie vollendet, d. h. Anfang und Ende habend sind. Die unendliche Vergangenheit, die einen absoluten Anfang hat, ist somit das notwendige Correlatum der unendlichen Zukunft, die ein absolutes Ende hat.

Wenn nun die Zukunft in Wahrheit nie actuell unendlich

werden kann, wenn sie in Wirklichkeit (und nicht bloss im Symbol) kein absolutes Ende haben kann, und zwar deshalb nicht weil das das absolute Aufhören des Seienden selbst bedeuten würde, so kann auch die Vergangenheit in Wahrheit nie actuell unendlich werden, weil das bedeuten würde, dass das Seiende einmal entstanden ist. Dieser Schluss ist absolut notwendig. Vor mir steht eine ewige endlose Zukunft, die nicht durch successive Synthesis erfüllt werden kann resp. erfüllt werden wird, d. h. wie weit ich auch in die Zukunft gehen mag, es stellt sich vor mir immer eine unendliche Reihe von zukünftigen Momenten dar, die nie gegenwärtig werden können, die ewig zukünftig sind: würden sie einmal gegenwärtig werden, so würde die unendliche Zukunft einmal vollendet werden, und das Seiende hörte auf weiter zu existieren, was nicht möglich ist, wenn das Seiende ewig ist. Nun als Correlatum dieser ewig zukünftigen Zukunft muss eine ewig vergangene Vergangenheit existieren, d. h. wie weit ich auch von meinem gegenwärtigen Augenblicke aus in die Vergangenheit gehen mag, es stellt sich vor mir immer eine unendliche anfanglose Reihe von vergangenen Augenblicken dar, die nie gegenwärtig gewesen, die ewig vergangen sind: wären sie einmal gegenwärtig gewesen, so wäre die unendliche Vergangenheit durch successive Synthesis vollendet da, sie müsste also einen Anfang gehabt haben (dieser Anfang ist freilich unendlich weit von meinem gegenwärtigen Augenblick entfernt), was nur bedeuten würde, dass das Seiende einmal zu existieren begonnen, dass es aus dem Nichts entstanden ist, was nicht möglich ist, wenn das Seiende ewig ist.

Noch einfacher lässt sich Notwendigkeit der ewig vergangenen Vergangenheit feststellen. Die einfache unumkehrbare Richtung in der die Zeit verläuft besteht darin, dass jeder vergangene Moment einmal gegenwärtig gewesen, und jeder gegenwärtige einmal zukünftig; wenn also die Succession keinen Anfang in der Vergangenheit gehabt hat, wenn die Vergangenheit actuell unendlich ist, so musste dieselbe einmal ganz zukünftig gewesen, da jeder vergangene Moment einmal zukünftig sein musste, sie musste also einen absoluten Anfang haben, was mit der absoluten Unaufhebbarkeit des Seienden im Widerspruch steht. Oder auch, da alle Momente dieser endlosen Vergangenheit zukünftig sein mussten, diese endlose Vergangenheit deshalb nicht möglich ist, weil dies die Vollendbarkeit der Zukunftsreihe voraussetzen würde, was doch anerkanntermaassen unmöglich ist. Es muss also, wenn das Seiende ewig sein soll, mit absoluter Gewissheit angenommen werden, dass es ebenso eine ewig

vergangene Vergangenheit giebt wie es unzweifelhaft eine ewig zukünftige Zukunft giebt, dass also die Succession einen absoluten Anfang in der Vergangenheit haben musste.*)

Wenn die Succession einen absoluten Anfang hat, so ist sie zwischen der ewig zukünftigen Zukunft und der ewig vergangenen Vergangenheit gleichsam eingeschlossen: zwar kann sie sich beliebig weit in diesem Raume bewegen, aber auch nie denselben ganz erfüllen, weil der letztere eben unendlich, und sie endlich, weil er über und ausser ihr, sie unter und in ihm ist und ewig stehen bleibt. Bildlich gesprochen, kann jeder Punkt der unendlichen geraden Linie in der Richtung der Vergangenheit der Anfang, jeder Punkt in der Richtung der Zukunft das Ende der Succession sein: die Totalität dieser Linie kann aber nie durch successive Synthesis vollendet werden, weil dies das Aufhören der Ewigkeit bedeuten würde, was widersinnig ist. Nun besteht das Eigenthümliche dabei darin, dass, von dem gegenwärtigen Augenblicke aus gerechnet, die Anzahl der möglichen Momente in der Vergangenheit, d. h.

*) Diesen unseren Argumentationen wird man sicherlich ihre zwingende Kraft nicht absprechen können, man wird nur behaupten, dass dieselben leicht zu nichte gemacht werden können, wenn man den Begriff des Unendlichen in Bezug auf die Vergangenheit erweitert. Was unsere Argumentationen beweisen, das ist, wird man sagen, nur dies, dass die Vergangenheit nicht als das unendlich grosse erster Ordnung gefasst werden kann, sondern dass man an Stelle desselben die ganze unendliche Reihe der Ordnungen unendlicher Grössen setzen muss. Nun gut, es wäre ganz consequent, wenn wir dies voraussetzen würden. Aber einerseits könnte diese Reihe der Unendlichkeiten nicht absolut unbestimmt sein, denn alle ihre einzelnen Punkte sind ja einmal gegenwärtig gewesen, mag man sich also jene Unendlichkeit noch so gross denken, sie bleibt immer bestimmt. Und andererseits, sobald man eine solche Reihe von Unendlichkeiten voraussetzen würde, müsste man voraussetzen dass z. B. bevor die erste Unendlichkeit nach rückwärts begann, diese Unendlichkeit in der Zukunft war, man müsste also voraussetzen dass die ewig zukünftige Zukunft einmal vollendet gewesen und das ist Widerspruch. Eine unbestimmte Reihe von Unendlichkeiten nach rückwärts kann man einfach deshalb nicht voraussetzen, weil man dann genöthigt wäre dieselbe auch nach vorwärts vorauszusetzen. Mag man dabei noch so sehr argumentieren, dass diese Reihe in Bezug auf die Zukunft, da dieselbe offenbar absolut unbestimmt unendlich sein müsse, nie vollendet d. h. nie erfüllt werden könne, wir wissen mit absoluter Sicherheit dass unsere ewige Zukunft schon durch das Unbestimmt-Endliche der Zeitreihe nie erfüllt werden kann, dass demnach die Zukunft, auch wenn die Vergangenheit eine Reihe von Unendlichkeiten darstellt, nur die bestimmte Unendlichkeit erster Ordnung darstellt und darstellen kann, allerdings stellt sie sie nur als blossen absolut unerreichbaren Grenzwerth der immer endlich bleibenden zukünftigen Zeitreihe. Und diese Thatsache, dass die Zukunft nur das Unendliche erster Ordnung potentiell darstellen kann, auch wenn die Vergangenheit actuell unendlich ist, zeigt einen besonderen Widerspruch der durch die Anwendung des Unendlichkeitsbegriffs auf die Zeitreihe entsteht, zeigt also, dass diese Reihe weder nach vorwärts noch nach rückwärts unendlich sein kann.

der schon verwirklichten Momente der Vergangenheit eine *bestimmt endliche* ist, während die Anzahl der möglichen Momente in der Zukunft eine *unbestimmt endliche* ist. Den Zeitpunkt, in dem die Succession in der Vergangenheit anfing, können wir uns beliebig weit rückwärts gelegen denken, solange die Succession noch nicht angefangen hat, aber sobald die Succession schon wirklich angefangen hat — wie es nun in der That ist — können wir nur bis zu einem bestimmten Zeitpunkte rückwärts gehen, diese Strecke nach rückwärts ist eine absolut bestimmte. Darin liegt eben das Ungleichwerthige, das Unvertauschbare der Zukunft mit der Vergangenheit: bevor die Succession anfing, existierte nur die leere Vergangenheit und die leere Zukunft, sobald die Succession anfing, schob sich zwischen beiden die unruhige Gegenwart der Succession hinein. Die Succession war damals d. h. vor ihrem Beginn etwas was nur in der Zukunft lag, und in der Zukunft ist die Strecke der Succession bis zu einem bestimmten Zeitpunkte immer bestimmt und endlich. Da Vergangenheit Vergangenheit von zukünftigen Momenten ist, so ist es kein Wunder, dass die bis zu diesem eben gegebenen Gegenwartsmomente in der Vergangenheit geschehenen Momente ihrer Anzahl nach bestimmt endlich sind, es kann gar nicht anders sein, wenn die Succession wirklich einen absoluten Anfang gehabt hat. In der Vergangenheit konnte zwar die wirklich begonnene und gegebene Succession einen ganz anderen Zeitpunkt ihrer Verwirklichung gehabt haben, denn vor der ersten Verwirklichung lag neben der ewigen leeren Vergangenheit die noch unverbrauchte ewige Zukunft, deren unbestimmt endlicher Theil verwirklichungsfähig war. Damals war kein Fliessen in der Zeit vorhanden, die Vergangenheit war still und vermehrte sich nicht, weil von der Zukunft kein Vermehren von Momenten stattfand, das Vermehren der Vergangenheit fing erst an, als die Succession anfing, als der verwirklichungsfähige Theil der Zukunft sich zu verwirklichen begann und damit ein Zufluss der zukünftigen Momente durch die Gegenwart in die Vergangenheit begann.

So wären wir nun wirklich und glücklich zu demselben Resultate gelangt, zu dem Kant in seiner Thesis gelangt ist, und es bliebe uns nur noch übrig, die Grundlosigkeit seiner Antithesis nachzuweisen, womit die von ihm im Begriffe der Zeit nachgewiesene Antinomie zerstört wäre. Aber leider sind wir noch nicht so weit. Indem wir das Vorhandensein der ewig vergangenen Vergangenheit festgestellt haben, die uns den absoluten Anfang der Succession zu einer Notwendigkeit macht, stossen wir dabei auf einen Widerspruch,

der eine viel ernstere Antinomie im Begriffe der Zeit zu verursachen scheint, als es diejenige Kant's ist. Bisher haben wir vorausgesetzt, dass in der ewigen leeren Vergangenheit vor dem wirklichen Anfang der Succession ebenso ein unbestimmt endlicher Theil mit Succession erfüllt sein konnte, wie ein unbestimmt-endlicher Theil der ewigen leeren Zukunft durch die Succession erfüllt werden kann und wird. Aber tiefer besehen, ist das nicht der Fall. Wir verwechseln dabei den Standpunkt, den wir mitten in der Succession einnehmen, mit demjenigen, den wir vor der Succession einnehmen sollen, und dieser ist es, den wir dabei eigentlich einnehmen müssen. Es ist wahr, dass wir, wenn wir von dem eben gegeben Gegenwartsaugenblicke im Strome der Succession ausgehen, nach rückwärts ebenso scheinbar in's Unendliche gehen können wie wir nach vorwärts in's Unendliche gehen können, wir vergessen aber dabei, dass wir eigentlich in der Richtung nach rückwärts überhaupt nicht gehen können, dass unser angebliches Rückgehen in die Vergangenheit nur ein Vorwärtsgehen in der Richtung der Zukunft ist. Wir müssen uns vor den Anfang aller Succession setzen; um zu sehen, ob wirklich dieser Anfang unbestimmt weit in die Vergangenheit verlegt werden kann. Und dabei ergiebt sich einem aufmerksamen und in die Sache vertieften Denken eine seltsame, eine äusserst ernste Schwierigkeit. Denn wenn wir uns vor den Anfang aller Succession versetzt denken, sehen wir ja ein, dass uns einzig und allein nur die ewige leere Vergangenheit und die ewige leere Zukunft gegeben sind, die beide noch absolut leer sind. Nun aber ergiebt sich dabei, dass dann die ewige leere Vergangenheit sich gänzlich und vollkommen mit der ewig vergangenen Vergangenheit deckt, da es ja noch keine Succession giebt, die diejenigen Momente dieser leeren Vergangenheit, die mit Succession erfüllt werden konnten, von denjenigen unterschiede, die nicht mit der Succession erfüllt werden konnten. Anders steht die Sache mit der ewigen Zukunft, in ihr ist ja erst die Verwirklichung der Succession möglich, und sobald diese verwirklich ist, grenzt sich sogleich der unbestimmt endliche mit Succession erfüllte Theil von demjenigen ab der nie erfüllbare ewig zukünftige Momente enthält. Um diese Schwierigkeit wirklich einzusehen — denn sie ist, der Compliciertheit der Sache wegen, nicht leicht einzusehen — muss man sich immer vor Augen halten, dass vor aller und jeder Succession kein Fliessen der Zeit stattfand, dass die Vergangenheit ganz still war und sich nicht vermehrte — diese Vermehrung fing erst an, als das Fliessen der Zeit anfing, denn erst dadurch kam der Vergangenheit ein Zufluss aus der Zukunft hinzu, indem von der Zukunft einzelne Momente durch

die Gegenwart hindurch in die Vergangenheit gingen, dieser also zugingen — dass sie demnach vollständig mit der ewig vergangenen Vergangenheit zusammenfiel und zusammenfallen musste, da diese eben still ist und sich nur vermehren aber nicht vermindern lassen kann. Zwar ist auch die ewige Zukunft dabei still — nur dass man deutlich spürt, wie sie mit successiven Momenten erfüllt werden kann, während die Vergangenheit dies nicht kann, sondern höchstens *konnte*, aber dieses konnte hier keinen Sinn mehr hat, da in einer Vergangenheit, *die schon ist*, von *konnte* nicht mehr die Rede sein kann. Mag man sich also drehen und wenden wie man will, hier besteht ein wirklicher Widerspruch in dem Begriffe der Zeit.

Jener erste Widerspruch, den wir in dem Begriffe der Zeit fanden, lag in der Annahme der anfanglosen Succession d. h. der actuell unendlichen successiven Vergangenheit, der Widerspruch betraf also die Zeit insofern sie Succession ist und als reine Succession aufgefasst wird. Wir hofften dieses Widerspruchs loszuwerden, indem wir die Succession als in der Vergangenheit endlich auffassten, dabei aber ergiebt sich wiederum dieser Widerspruch, dass in der Vergangenheit nur ein bestimmter Zeitpunkt Anfang der Succession sein konnte, während es doch in dem Wesen der Succession liegt, in ihren beiden Richtungen *unbestimmt endlich* zu sein. Zugleich aber bemerken wir, dass dieser zweite Widerspruch eigentlich nicht mehr die Zeit, insofern sie als successiver Zeitstrom aufgefasst wird, betrifft, sondern sich auf die Zeit bezieht, insofern sie als leere reine Zeitform aufgefasst wird. Wie man also sieht, gelangen wir ganz ebenso auf einen inneren Widerspruch in dem Begriffe der leeren Zeit wie wir auf einen inneren Widerspruch in dem Begriffe der successiven Zeit gekommen sind, wir haben also ganz ebenso eine Antinomie der Zeit vor sich, wie dies bei Kant der Fall ist.

Der eben gefundene Widerspruch lässt sich nun aber leicht zum Verschwinden bringen, sobald man sich ernstlich die Frage vorlegt, was denn jene beiden absolut leeren unendlichen Gebilde der Vergangenheit und der Zukunft noch bedeuten mögen, wenn die Zeit wesentlich Succession ist. Ist die Zeit wesentlich Succession dann ist offenbar die ewig zukünftige Zukunft keine Zukunft mehr, denn was soll noch für eine Bedeutung eine Zukunft haben, deren Momente nie gegenwärtig werden können, die nie successiv werden kann? Und ebenso was soll eine Vergangenheit noch bedeuten, deren Momente nie gegenwärtig waren, die nie successiv werden konnte? Offenbar sind sie beide, die ewig zukünftige Zukunft und die ewig vergangene

Vergangenheit, absolut widerspruchsvolle Begriffe. Man müsste also, wenn man sie durchaus als notwendige Zeitconstituenden behalten wollte, zu jener unmöglichen Vorstellung der leeren Zeit greifen, die, selbst unbeweglich, auf eine wunderbare Weise die realen Ereignisse zwingt sich in ihr zu bewegen. Wenn man sich aber beide so denkt, dann entsteht der oben charakterisierte Widerspruch des absolut bestimmten Anfangs der Succession in der Vergangenheit. Offenbar nun, wenn einerseits die leere Vergangenheit und die leere Zukunft keinen Sinn in der Succession haben, und wenn andererseits die leere Zeit etwas undenkbares ist, müssen diese beiden Zeitdinge in *absolute Zeitlosigkeit* umgewandelt werden. Denn ist die Zeit mit der Succession wirklich identisch, dann war das Seiende vor dem Anfang der Succession absolut zeitlos, d. h. es ist damals weder gewesen noch wird es in der Zukunft gewesen sein, sondern man konnte für dasselbe damals nur sagen *dass es ist*, dass es absolut gegenwärtig ist. Die absolute Gegenwart des Seienden vor der Succession ist eine Gegenwart die nicht fortschreitet, die sich nicht ändert, die absolut stillsteht, ein wahres *nunc stans*. So schwer es uns nun auch ist, eine solche Gegenwart *vorzustellen*, obgleich wir unmittelbar in unserer Erfahrung selbst das Exemplar einer zeitlosen Gegenwart (das zeitlose Ich nämlich, vgl. Principien der Erkenntnislehre III. Kap.,) unzweifelhaft vor uns haben, wir können doch den Gedanken derselben klar und widersrpruchslos fassen. Absolut zeitlose Gegenwart ist einfach eine Gegenwart, die sich nicht bewegt, die sich nicht ändert, dasjenige was ohne Änderung fortwährend ein und dasselbe bleibt ist eben das zeitlos Gegenwärtige. Zeitlos gegenwärtig in absolutem und uneingeschränktem Sinne dieses Wortes ist nur die absolut unveränderliche absolute Substanz, die als solche auch dann absolut beständig und unveränderlich bleibt, wenn die qualitativ-quantitave Wirklichkeit in die Zeitlichkeit hinübergeht. Einzelne Theile dieser qualitativ-quantitativen Wirklichkeit sind — worauf wir später zurückkommen — relativ zeitlos, da sie durch längere Zeit hindurch unveränderlich sein können; die absolute Substanz allein ist absolut zeitlos und in wahrem Sinne ewig, da sie sich nie verändern, nie entstehen kann. Vor dem Anfang der Succession war das gesammte Seiende zeitlos; solange die Succession dauert ist die absolute Substanz absolut zeitlos, der qualitativ-quantitative Theil des Seienden aber fast ganz zeitlich (obgleich nicht lückenlos zeitlich); wenn die Succession wieder eingeht, wird das gesammte Seiende wieder zeitlos werden.

Wenn nun das Seiende ursprünglich vollkommen zeitlos ist,

d. h. absolut gegenwärtig ist, so verschwindet jener Widerspruch zwischen der ewig vergangenen Vergangenheit und dem beliebigen Anfang der Succession vollständig. Denn das Seiende befindet sich dann nicht mehr in einer ewig vergangenen Vergangenheit, da das schon an und für sich ein Unsinn wäre. Denn in der nach beiden Seiten hin sich in's Unendliche ausdehnenden leeren Zeit müsste sich das successionslose Seiende doch in der Mitte befinden, gerade da wo die ewig vergangene Vergangenheit aufhört und wo die ewige Zukunft anfängt. Aber wozu braucht das absolut zeitlose Seiende diese beiden unendlich ausgedehnten Wesen nach vorwärts und nach rückwärts? Vielleicht deshalb, weil erst dadurch die Gegenwart in der Mitte möglich ist: aber diese Gegenwart in der Mitte ist doch absolut stehend, und die Gegenwart in der Zeit muss doch fortwährend ihren Ort wechseln. Jene Vorraussetzung der absolut leeren Zeit hat noch bischen Sinn, wenn man die bewegliche Gegenwart der Succession vor sich hat, man braucht dann scheinbar einen ausgedehnten Weg, auf dem sich diese Gegenwart bewegt, sobald aber die Gegenwart stille steht, entfällt auch jeder Grund, diese beiden leeren Unendlichkeiten noch festzuhalten. Dem Seienden ist dann die Fähigkeit, Veränderungen in sich hervorzurufen, etwas ewig Immanentes, d. h. etwas was mit dem Seienden selbst gegeben ist. Und diese Fähigkeit, weil sie dann eben durch keine leere Vergangenheit begrenzt ist, kann in jedem Augenblicke zur Actualität gebracht werden, so dass dann jener Widerspruch in dem Begriffe der ewigen Zeit nicht mehr vorhanden ist und die Succession also nicht mehr einen ganz bestimmten Anfangspunkt in der Vergangenheit zu haben braucht. Hätte die Veränderung einen ganz bestimmten Zeitpunkt in der Vergangenheit, wie dies im Falle der ewig leeren Vergangenheit stattfinden müsste, so müsste man voraussetzen, dass das Seiende vor diesem Zeitpunkte überhaupt nicht existiert habe, denn hatte dasselbe existiert, so musste es ganz ebenso die Potenz zur Veränderung auch früher gehabt haben, wie es in jenem Augenblicke hatte, als es die Succession anfing. Nur wenn man die Veränderung für einen absolut grundlosen Entstehungsact der gesammten Wirklichkeit d. h. des gesammten Seins erklären würde, in welchem Falle die ewig leere Vergangenheit nicht mehr mit Etwas sondern mit Nichts erfüllt wäre, nur dann könnte ein bestimmter Zeitpunkt in der Vergangenheit dieses absolute Entstehen des Seienden aus dem Nichts sein und bedeuten. Aber wie die ewig leere Zukunft mit dem Aufhören des Seienden zu sein aufhören würde, ebenso würde auch die ewig leere Vergangenheit mit dem Nichts erfüllt überhaupt

gar nicht mehr sein. Nur wenn die ewig leere Vergangenheit und die ewig leere Zukunft symbolische Ausdrücke für das anfanglose Unentstandensein und für das endlose Nichtvergehenkönnen des Seienden sind, nur dann hat es einen Sinn, dieselben symbolisch zu gebrauchen, sonst sind sie absolut bedeutungslos. Denn auf das Sein lassen sich noch die Begriffe der Succession und der leeren Dauer anwenden, obgleich auch da nicht überall und absolut, aber auf das Nichts absolut nicht, das absolute Nichts ist absolut zeitlos, und da verliert die Form der leeren Zeit alle und jede Bedeutung.

Die Schwierigkeit welche Kant in dem Begriffe der Zeit als der anfanglosen Succession der Weltzustände fand, ist, wie wir sahen, so wie sie von Kant formuliert worden, in diesem nicht vorhanden. Wir fanden diese Schwierigkeit ganz wo anders, in der notwendigen Voraussetzung der ewig leeren Vergangenheit als des ewigen Correlatums der ewig leeren Zukunft.*) Ähnlich steht es mit der Schwierigkeit, die Kant in dem Begriffe der Zeit als der endlichen (angefangenen) Succession der Weltzustände fand. Nach ihm soll die Gleichartigkeit der Momente der leeren Zeit resp. der leeren Vergangenheit ein Wirklichwerden der Veränderung unmöglich machen. Diese Schwierigkeit, die Gleichartigkeit der Momente der leeren Zeit, die Kant in der Antithesis der ersten Antinomie d. r. V. feststellt, um daraus auf die Notwendigkeit einer absoluten Anfanglosigkeit der Succession zu schliessen, ist nun in Wahrheit gar keine Schwierigkeit gegen den absoluten Anfang der Succession resp. der Veränderung. Denn darin besteht eben die Ewigkeit der Potenz der Veränderung im Seienden dass letztere *gleichermaassen* in jedem Momente zur Geltung kommen kann, und dass es rein und absolut zufällig d. h. grundlos ist, in welchem Momente sie in Wirksamkeit treten

*) Freilich strenggenommen ist auch die von Kant erwähnte Schwierigkeit vorhanden, aber nur dann wenn man die Unendlichkeit nicht als Zeit sondern als Zahl betrachtet. Wir werden in dem nächsten Kapitel den Widerspruch der unendlichen Zahl darlegen und sehen, dass dieser Widerspruch die actuelle Unendlichkeit sowohl in dem Raume als in der Zeit ausschliesst. Nun erkenne ich gerne an, dass der Widerspruch der unendlichen Zahl den wahren Kern jener Kant'schen Argumentation bildet: aber Kant ist bis zu diesem wahren Kern nicht vorgedrungen, er hat den abstrakten Zahlbegriff von dem Zeitbegriff nicht trennen können, und den Grund für die Unmöglichkeit der unendlichen Zahl in der Unvollendbarkeit der (zukünftigen) successiven Reihe gefunden, während dies, wenn die Frage so gestellt wird, wie es in dem Beweis der Thesis geschieht, nur umgekehrt gelten kann. Den Widerspruch der unendlichen Zahl habe ich nicht gebraucht, weil ich die absolute Endlichkeit der Zeit sowohl nach oben wie nach unten d i r e k t aus dem Wesen der Zeitreihe selbst beweisen wollte, ohne mich der Widersprüche des Unendlichkeitsbegriffs, die erst in dem nächsten Kapitel eingehend werden erörtert werden, zu bedienen.

wird. Nur wenn das Princip der äusserlichen Causalität ein allgemeines wäre, d. h. wenn jede Veränderung eine andere zur Voraussetzung haben müsste, nur dann könnte die anfangende Succession nicht bestehen, aber die Gleichartigkeit der Momente der leeren Zeit als solche kann kein Beweisgrund gegen dieselbe ausmachen. Der erste Anfang der Succession ist nur als ein absolut zufälliger Act aufzufassen, und die Gleichartigkeit der Momente der leeren Zeit kann kein Hinderniss der Wirksamkeit des absoluten Zufalls entgegensetzen. Nicht also in der Gleichartigkeit der Momente der leeren Zeit liegt die Schwierigkeit des Anfangs der Succession in derselben, sondern in der ewig leeren Vergangenheit dieser Zeit, wie wir dies ausgeführt haben. Wie wir also in Kant's Thesis die Schwierigkeit nicht dort fanden, wo sie Kant fand, sondern ganz anderswo, ebenso finden wir die Schwierigkeit in seiner Antithesis nicht da, wo er sie fand, sondern anderswo. Während aber bei Kant die Schwierigkeit der Antithesis in einem direkten Gegensatz mit derjenigen der Thesis steht, stehen beide Schwierigkeiten bei uns in direktem Zusammenhang. Die ewig leere Vergangenheit macht die anfanglose Succession als solche unmöglich, die ewig leere Vergangenheit als solche scheint aber ebenso die anfangende Succession unmöglich zu machen, und wenn wir uns dieser Vorstellung der ewig leeren Vergangenheit nicht befreien könnten d. h. wenn wir dieselbe nicht so transformieren könnten, dass sie widerspruchslos wird, dann hätten wir eine wahre Antinomie des Denkens vor uns, eine Antinomie die wirklich dasjenige darstellte, was Kant in seinen Antinomien anstrebte, einen Widerstreit der reinen Vernunft mit sich selbst, und zwar nicht nur einen Widerstreit in Behauptungen (resp. Folgen) sondern auch in Gründen (denn ein und derselbe Grund ist es bei uns, der sowohl die Thesis als die Antithesis begründet.

Wie aus allen vorhergehenden Ausführungen erhellt, ist die Zeit sowohl nach oben wie nach unten endlich, nur mit dem Unterschiede, dass sie nach unten bestimmt endlich, nach oben unbestimmt endlich ist, nach unten hat sie eine unüberschreitbare Grenze des einfachen Zeitmoments, nach oben kann die endliche Anzahl dieser Momente immer überschritten werden, sie ist wohl immer endlich, aber unbestimmt ist diese Endlichkeit selbst. Die Zeit ist nach oben von Zeitlosigkeit begrenzt, sie kann sich bis in's Unendliche (in indefinitum nicht in infinitum), sowohl nach rückwärts wie nach vorwärts, ausdehnen, weil die Zeitlosigkeit absolut unendlich ist, weil diese eben die Abwesenheit jeder Grenze der Zeitlichkeit bedeutet, weil sie eben die ewige Potentialität der Veränderun gim Seienden möglich macht.

So paradox nun diese Frage auf den ersten Blick auch scheinen mag, wir müssen sie doch stellen: ist der endliche zeitliche Strom als solcher selbst vollkommen zeitlich, enthält er nicht zeitlose Unterbrechungen, ist im Seienden, wenn einmal die Succession in ihm zu Stande kommt, diese Succession ein vollkommen gleichmässiger Strom, hat die gerade Richtung, in der die Succession verläuft, keine Unterbrechungen? Es fragt sich also ob es in dem Gebiete des reinen quantitativ-qualitativen Seins zeitlose Inhalte giebt (dass die qualitätslose Substanz absolut zeitlos ist und bleibt, haben wir schon gesehen) oder ob dieses Sein der Succession vollständig unterworfen ist. Nun zeigt uns nur ein aufmerksamer Blick auf dasjenige was in der unmittelbaren Erfahrung gegeben ist, dass es Seinsinhalte giebt, die zeitlos sind. In dem vierten Kapitel des vorigen Abschnitts haben wir nun die hierzugehörigen Thatsachen genügend festgestellt und brauchen nicht mehr auf dieselben besonders einzugehen. Dort haben wir gesehen, dass ein Körper (resp. ein Empfindungskomplex), wenn er sich durch den (Wahrnehmungs-) Raum dahinbewegt, als solcher völlig unveränderlich ist. Ebenso haben wir gesehen, dass alle die Empfindungen (resp. Empfindungskomplexe) die unmittelbar den Eindruck der absoluten Veränderungslosigkeit machen, auch wirklich unveränderlich sind, und, da wo keine Veränderung ist auch keine Zeit ist, zeitlos sind. In der Erkenntnisslehre haben wir gesehen, dass diese relativ zeitlosen Wahrnehmungsinhalte durchaus notwendig sind, wenn ein Bewusstsein der zeitlichen Succession als einer vielheitlichen Reihe entstehen soll. Ebenfalls aber haben wir dort gesehen, dass unser zeitloses Subject auch eine unumgängliche Bedingung dazu ist. Dass das zeitlose Ich nicht nur eine Bedingung des Constatierens der vielheitlichen Zeitreihe bildet, sondern dass ohne dasselbe nicht einmal die Wahrnehmung des einfachen Veränderungsactes möglich ist, haben wir schon in der Erkenntnisslehre gesehen, werden es aber im dritten Kapitel dieses Abschnitts noch besser sehen. Während die zeitlosen Wahrnehmungsinhalte doch schliesslich zeitlich werden, d. h. sich verändern, kann man nur für das Bewusstsein des zeitlosen Ich dasselbe sagen, für dieses Ich selbst aber kann man weder sagen, dass es relativ zeitlos bleibt, noch dass es absolut zeitlos ist, da wir noch nicht wissen, ob das Ich mit dem Bewusstsein und Selbstbewusstsein zusammenfällt oder nicht: das werden wir erst in dem zweiten Unterabschnitt dieses Abschnittes feststellen können, bis jetzt wissen wir nur dass die absolute Substanz absolut zeitlos ist.

Principiell genommen kann man gegen zeitlose Seinsinhalte

nichts einwenden, denn die Zeitlichkeit ist keine ursprüngliche notwendige Seinsform. Aber dass der zeitliche Strom nicht ein ununterbrochener ist, solange er dauert, dass Zeitlosigkeit nicht nur *vor* und *nach* diesem Strome sondern auch *in* ihm herrscht, die Möglichkeit davon folgt schon aus der discreten Natur desselben. Nur wenn die Zeit (resp. Veränderung) ihrer Natur nach continuirlich wäre, d. h. nicht aus letzten absolut einfachen Bestandtheilen bestände, nur dann wäre der Zeitstrom, wenn er anfängt und solange er dauert, in sich absolut continuirlich also ohne zeitlose Unterbrechungen. Wenn aber die Zeit aus einfachen absolut untheilbaren erfüllten Gegenwartspunkten und aus absolut einfachen unerfüllten Veränderungsaugenblicken besteht, dann ist die Möglichkeit zeitloser Unterbrechungen in derselben nicht von vorneherein ausgeschlossen. Diese Möglichkeit ist deshalb nicht ausgeschlossen, weil man, wenn man tiefer die discrete Natur der Zeit betrachtet, einsieht, dass in der Zeit eigentlich notwendig nur die zwei durch einen Veränderungsact voneinander getrennten Momente der Gegenwart und der Vergangenheit sind. Denn wenn ein Gegenwartsaugenblick aufgehoben wird, so ist es notwendig dass ein neuer an seine Stelle zu stehen kommt, dass aber dieser nun selbst aufgehoben werden müsse, folgt aus jener ersten Aufhebung gar nicht, jede Aufhebung ist ja ein einfacher Act für sich und zieht als solcher keinen anderen nach sich. Der beständige Zeitstrom ist also etwas was gar nicht aus der discreten Natur der Zeit selbst folgt (so wie derselbe notwendig wäre wenn die Zeit continuirlich wäre); wenn also der wirkliche Zeitstrom der Welt eine ganze Reihe von Veränderungen in sich enthält, so folgt diese seine Vielheit nicht aus der Zeitreihe selbst, sondern sie kann nur aus der besonderen Struktur der Weltelemente folgen, in denen die Veränderungen stattfinden. Obgleich nun dieser Zeitstrom der Welt, durch die Natur der Weltelemente genöthigt, ein langer sein müsse, und sich nicht auf jenen einen Zeitact mit den beiden erfüllten Augenblicken beschränkt, braucht dieser Zeitstrom doch kein lückenloses Discretum zu bilden, in ihm sind ganz wohl zeitlose Unterbrechungen denkbar. Und diese zeitlosen Unterbrechungen d. h. ihr Wann und Wo, werden ebenso durch die Natur der sich ändernden Weltelemente bestimmt werden, wie der lange Zeitstrom, der sie enthält, selbst. In dem dritten Kapitel dieses Abschnittes werden wir nun in der That sehen, dass diese zeitlosen Unterbrechungen des Zeitstromes notwendigerweise bestehen müssen, wenn es Verschiedenheiten in der Geschwindigkeit der Bewegung geben soll, wir werden dort sehen, dass die verschiedene Geschwin-

digkeit der Bewegung nichts anderes bedeutet, als die zeitlose Unterbrechung des beständigen Zeitstromes in dem die Bewegung geschieht. Der Zeitstrom wäre beständig, wenn jedem Augenblicke der Ruhe unmittelbar der Augenblick der Bewegung (d. h. des Bewegungsactes) folgte; sobald dies nicht geschieht, sobald der sich bewegende reale Punkt in dem Raumpunkte durch mehrere Zeitaugenblicke ruht, ist der beständige Zeitstrom unterbrochen, und die Bewegung hat eine andere Geschwindigkeit. Die zeitlosen Wahrnehmungsinhalte in unserem Bewusstsein sind dem analog zeitlose Unterbrechungen des beständigen Zeitstromes qualitativer Veränderung.

Man kann aber noch weiter gehen. Nicht nur dass in der Zeitreihe nur der eine die zwei Momente der Gegenwart und der Vergangenheit trennende Veränderungsact notwendig ist, dass also die Zeitreihe im Unterschiede von der Raumreihe, die eine Vielheit von Raumpunkten notwendigerweise enthält (vgl. darüber das nächste Kapitel), keine Vielheit von Zeitpunkten notwendigerweise in sich enthält, sondern die drei Momente gehören nicht einmal in eine und dieselbe Reihe hinein. Zunächst ist es klar, dass wenn jeder Veränderungsact von dem anderen völlig unabhängig ist, woran nicht gezweifelt werden kann, dann der erfüllte Gegenwarts- (resp. Vergangenheits-) augenblick eine Unterbrechung der Reihe der Veränderungsaugenblicke darstellt, d. h. diese Veränderungsaugenblicke gehören nicht in eine und dieselbe Reihe hinein, jeder stellt gleichsam eine Zeit für sich, die völlig unabhängig von anderen Zeiten ist. Aber auch umgekehrt sollte anscheinend der Veränderungsact eine Unterbrechung der Reihe der erfüllten Gegenwartsaugenblicke darstellen; dem ist aber nicht so, sobald man sich die Sache näher anschaut. Der Veränderungsact, indem er die zwei erfüllten Zeitmomente voneinander trennt, verbindet sie auch zugleich, er macht dass sie nacheinander kommen, er setzt sie in das Verhältniss des Nacheinanders. Weit entfernt also, dass der Veränderungsact die zwei Momente völlig unabhängig voneinander machte, macht er sie gerade voneinander abhängig, er setzt sie in eine und dieselbe Reihe hinein. Es fragt sich nun weiter ob die vielen erfüllten Zeitmomente, die aufeinander folgen, ebenso in eine und dieselbe Reihe hineingehören, wie die zwei durch einen einzigen Veränderungsact getrennten Momente selbst. Wenn nun der eine Veränderungsaugenblick völlig unabhängig von dem anderen ist, so scheint es, dass auch die von ihnen getrennten Momente nicht in eine und dieselbe Reihe hineingehören können. Dem ist aber nicht immer so. Wenn wir uns einen beständigen Zeitstrom vorstellen, in dem es keine zeitlose Unterbrechungen giebt — und ein

solcher ist ja principiell ganz wohl möglich — dann wird jeder erfüllte Zeitmoment in diesem Strome einerseits mit dem ihm vorhergehenden und andererseits mit dem ihm nachfolgenden Momente in einer und derselben Reihe liegen, also werden auch diese beiden Momente in einer und derselben Reihe liegen, alle die erfüllten Zeitmomente des lückenlos-discreten Zeitstromes werden also in einer und derselben Reihe liegen. In dem nächsten Kapitel werden wir sehen, dass auch die Raumpunkte, obgleich sie durch Negationsacte getrennt sind, die nicht in dieselbe Raumreihe mit ihnen hineingehören, doch alle in einem und demselben lückenlos-discreten Raume liegen, und dasselbe wird auch für den vorausgesetzten lückenlos-discreten Zeitstrom der Fall sein. Ob dies aber auch für den lückenhaft-discreten d. h. mit zeitlosen Unterbrechungen behafteten Zeitstrom gilt? Nun offenbar, wenn die erfüllten Zeitaugenblicke des lückenlos-discreten Zeitstromes nur deshalb eine und dieselbe Reihe bilden, weil jeder derselben von dem einen Veränderungsacte gesetzt und von dem anderen aufgehoben wird, können die erfüllten Augenblicke des lückenhaft-discreten Zeitstrommes nicht eine und dieselbe Reihe bilden, da es Augenblicke sind, die nicht mehr einfache untheilbare Augenblicke darstellen, sondern die zeitlos mehrere solche repräsentieren, die Reihe ist also unterbrochen, d. h. der besagte Zeitstrom stellt nicht eine einzige Reihe dar. Dass die vielen Veränderungsaugenblicke als solche nicht in eine und dieselbe Reihe hineingehören ist klar auch wenn die erfüllten Augenblicke selbst immer eine und dieselbe Reihe bildeten; es fragt sich also nur noch ob der einfache Veränderungsaugenblick, der die beiden erfüllten Momente voneinander trennt, nicht, wenn nur dieser (immer notwendige) kleinste Zeitstrom als solcher betrachtet wird, in eine und dieselbe Reihe mit ihnen hineingehört; offenbar aber, wenn er dies thäte, müssten in dem lückenlos-discreten Zeitstrome alle die Veränderungsaugenblicke miteinander in dieselbe Reihe hineingehören, weil sie mit den erfüllten in eine und dieselbe Reihe hineingehörten, was jedoch unmöglich ist; nicht nur also dass der eine Veränderungsact mit den anderen Veränderungsacten nicht in eine und dieselbe Reihe heineingehört, sondern er gehört auch nicht mit den erfüllten Augenblicken in eine und dieselbe Reihe hinein. Auf diese eigenthümlichen Verhältnisse kommen wir noch einmal in dem dritten Abschnitte der Ontologie zurück.

Diesen Ausführungen über das Verhältniss des Veränderungsactes zu den erfüllten Zeitaugenblicken und über das Wesen des lückenlosen und des lückenhaften Zeitstromes wird man nur das-

Eine vorwerfen können, nämlich dies, dass der Unterschied der Notwendigkeit des Aufeinanderfolgens der Veränderungen von der Notwendigkeit des einzelnen Veränderungsactes selbst noch nicht genügend angegeben ist. Wenn wir sagten, dass nur der eine zwei erfüllte Momente trennende Veränderungsact notwendig ist, so scheint damit ja von vornherein der lückenlose Zeitstrom ausgeschlossen zu sein. Der lückenlose Zeitstrom ist ja ein solcher Zeitstrom in dem auf die eine Veränderung notwendigerweise die andere folgt, ohne jede zeitlose Unterbrechung, und doch ist nur der eine Veränderungsact als solcher notwendig. Wenn nun wirklich nur die Notwendigkeit eines einzigen Veränderungsactes einleuchtend ist und wenn andererseits der lückenlose Zeitstrom ebenfalls eine Möglichkeit darstellt, so muss die Notwendigkeit des Aufeinanderfolgens der Veränderungen in dem letzteren etwas anderes bedeuten als es jene Notwendigkeit des einen Veränderungsactes ist. Wenn der Veränderungsact, sagten wir früher, da ist, dann sind auch der vergangene und der eben gegenwärtige Augenblick da; soll aber dieser neue Gegenwartsaugenblick durch eine neue Veränderung Vergangenheit werden und zwar unmittelbar nachdem er durch den früheren als gegenwärtiger gesetzt worden ist, so kann die Notwendigkeit davon nicht mehr in der früheren Veränderung als solcher liegen, sondern man muss voraussetzen, dass es in der Natur der eben veränderten qualitativ-quantitativen Elemente liegt, wenn sie nun von neuem verändert werden sollen. Sobald die Succession einen absoluten Anfang hat und sobald dieselbe discret und nicht continuirlich ist (beides lässt sich in Wahrheit gar nicht voneinander trennen) ist der alte Grundsatz, dass Veränderung nur durch eine ihr vorhergehende Veränderung gesetzt werden könne, nicht mehr richtig, da im Anfang der Succession eine Veränderung gesetzt wurde, die durch keine frühere Veränderung verursacht wurde; wenn ich also behaupte, dass im Strome der Succession auch da wo diese lückenlos ist, wo also die eine Veränderung unmittelbar und ohne zeitlose Unterbrechung auf die andere folgt, dieses Aufeinanderfolgen derselben nicht durch ihre Natur selbst bestimmt ist, sondern in der Natur des sich verändernden Seienden liegt, so habe ich damit nur den Grundsatz von der Unbedingtheit des einzelnen Veränderungsactes consequent ausgesprochen und nichts weiter. In dem zweiten Unterabschnitt dieses Abschnittes werden wir noch einmal und zwar eingehend auf diesen Grundsatz von der Unbedingtheit der einzelnen Veränderung in Verbindung mit dem Causalprincip zurückkommen.

Nur noch eine Schwierigkeit enthält diese Notwendigkeit der

Aufeinanderfolge zweier Veränderungsacte. Der erfüllte Zeitaugenblick nämlich, der die eine Veränderung von der anderen in dem lücken'os-discreten Zeitstrome trennt, muss, wenn er sich von dem zeitlosen erfüllten Augenblicke des lückenhaft-discreten Zeitstromes unterscheiden soll, eine absolut einfache zeitlose Einheit darstellen, und doch scheint es dass die Zeitlosigkeit als solche, da sie nichts quantitatives an sich hat, eine solche absolut einfache zeitlose Einheit nicht zulässt. Denn stellt die Zeitlosigkeit die absolut einfache untheilbare absolute Gegenwart dar, dann scheint es, dass ebenso wie die Anzahl der Veränderungen nach oben (d. h. in der Richtung der Zukunft, und, unter schon erwähnten Umständen, auch der Vergangenheit) ohne alle und jede Grenze ist, dass dieselbe auch nach unten ohne alle und jede Grenze sei, denn wie die absolute Gegenwart jene unbegrenzte Reihe nach oben nur deshalb zulässt, weil sie selbst ganz und gar ausserhalb derselben liegt, ebenso muss sie jene unbegrenzte Reihe nach unten aus demselben Grunde zulassen. Wenn man symbolisch die absolute Gegenwart darstellen wollte, dann müsste dieselbe durch die gerade absolut continuirliche Linie dargestellt werden: und wie diese Linie nach oben absolut unendlich gross ist, ebenso müsste sie nach unten, als continuirliche, absolut in's Unendliche theilbar sein. Obgleich also die Anzahl der Veränderungsacte immer eine endliche ist, so könnte doch in einer und derselben endlichen zeitlosen Strecke diese Anzahl grösser und kleiner sein, und eine kleinste untheilbare zeitlose Strecke existierte nicht, und doch ist diese untheilbare zeitlose Strecke, so widersprechend sie auch scheinen mag, durchaus notwendig, wenn zwei Veränderungsacte in notwendiger Weise aufeinander folgen sollen: existierte dieselbe nicht, dann könnte im Seienden, während auf einer Stelle in demselben eine Veränderung der anderen nach einer bestimmten Zeit (resp. einer zeitlosen Strecke) folgt, auf der anderen Stelle in demselben während dieser Zwischenzeit eine ganze Reihe von Veränderungen aufeinanderfolgen, wodurch jene Notwendigkeit der Aufeinanderfolge zweier Veränderungen vernichtet wäre. Folgt die eine Veränderung auf die andere notwendigerweise, dann muss der sie trennende zeitlose Zeittheil absolut untheilbar sein; denn wäre er theilbar, dann könnte er einmal kleiner und einmal grösser sein, und das widerspricht dem Begriffe der Notwendigkeit jener Aufeinanderfolge.

Dieser letzteren Behauptung wird man vielleicht entgegenstellen, dass der zeitlose Zeittheil, der zwei Veränderungsacte voneinander trennt, als solcher absolut theillos ist, ganz abgesehen davon ob die

Veränderungen, die er trennt, notwendigerweise aufeinanderfolgen oder nicht. Ein solcher Einwand würde aber nur beweisen, dass man die ganze vorherige Ausführung nicht verstanden hat. Gerade darin liegt ja die Schwierigkeit, dass der zwei Veränderungen trennende zeitlose Zeittheil absolut theillos ist und als solcher nicht mehr als eine einfache untheilbare Einheit betrachtet zu werden vermag. Die Frage besteht eben darin, ob noch von einer Untheilbarkeit dieses zeitlosen Theiles die Rede sein kann, wenn er als solcher alle und jede Theilung, alle und jede Quantität von sich ausschliesst. Gerade deshalb weil der zeitlose Zeittheil theillos ist, ist es fraglich, ob er und wie er als untheilbare einfache Einheit betrachtet werden kann. Nur ein einziges Beispiel analoger Art ist uns in unseren bisherigen Untersuchungen entgegengetreten: die absolute qualitätslose Substanz ist eine absolut theillose Einheit, aber sie ist keine einfache untheilbare Einheit, sie ist als absolutes Continuum in's absolut unbestimmte Unendliche theilbar. Die zeitlose Gegenwart schliesst nicht nur alle quantitative Vielheit von Zeittheilen von sich aus, wie die absolute Substanz alle simultane Vielheit von Theilen von sich ausschliesst, sondern sie enthält auch keine ungetrennten Theile in sich, sie ist kein successives Continuum, wie die absolute Substanz ein simultanes Continuum ist. Es scheint also wirklich, dass jene zeitlose Gegenwart nie und nimmer als einfache untheilbare Einheit betrachtet werden könne, der einfache untheilbare zeitlose Zeittheil scheint wirklich unmöglich zu sein! Und doch muss er möglich sein, wenn sich unser Verstand nicht für bankerott erklären will. Denn existiert der einfache zeitlose Zeittheil nicht, dann scheint die Welt der Veränderung dem planlosen Zufall völlig preisgegeben zu sein, jede Veränderung in ihr ist dann völlig isoliert und unabhängig von der anderen Veränderung, und wo eine Veränderung auf die andere notwendigerweise zu folgen scheint, ist das nur ein täuschender Schein unserer Wahrnehmung. Wenn es sicher ist, dass auch der Zufall im Reiche der Wirklichkeit nur bestehen kann, wenn er sicher begründet ist, und wenn es sicher ist, dass nur da die spontane zufällige Veränderung auftreten kann wo ein Bewusstsein besteht, dann muss man anerkennen, dass in der Natur, wo die Veränderungen unbewusst aufeinanderfolgen, diese Veränderungen notwendigerweise in notwendigen Zusammenhängen miteinander stehen müssen, und der zeitlose untheilbare Zeittheil ist die erste unumgängliche Bedingung dafür.

Solange nun die zeitlose Gegenwart als etwas von der zeitlichen Gegenwart toto genere Verschiedenes und mit ihr in keiner

Gemeinschaft Stehendes betrachtet wird, ist der einfache zeitlose Zeittheil durchaus unmöglich. Sobald dagegen die zeitlose Gegenwart als zeitloser absolut theilloser Setzungsact betrachtet wird, oder umgekehrt, sobald der absolut einfache Setzungsact der Negation, aus dem, wie wir in dem letzten Kapitel des vorigen Abschnittes gesehen haben, der zeitliche Veränderungsact entsteht, mit dieser zeitlosen Gegenwart identificiert wird, ist dieser einfache zeitlose Zeittheil da. Der zeitlose Negationsact, wenn er sich in den zeitlichen verwandelt, hört auf zu sein: stellen wir uns nun vor, dass, während der eine zeitlose Negationsact im Seienden in den zeitlichen übergeht, ein anderer Negationsact an anderer Stelle in demselben unverändert bleibt, so wird offenbar die zeitlose Strecke der Dauer dieses letzteren in diesem Falle mit dem gesuchten einfachen zeitlosen Zeittheile zusammenfallen. Denn würde man voraussetzen, dass dem nicht so ist, dann würde das offenbar bedeuten, dass während dieser zeitlosen Strecke seiner Dauer der Negationsact sich in zwei oder mehrere Veränderungsacte umwandeln könnte, was offenbar unmöglich ist, wenn der Veränderungsact selbst als solcher einfach und untheilbar ist (d. h. es hiesse das, dass der Veränderungsact in zwei oder mehrere einfache Veränderungsacte zerfallen kann). Solange der einfache Veränderungsact nicht in unmittelbare Verbindung mit dem zeitlosen Negationsacte gebracht wird, solange lässt sich absolut nicht behaupten, dass während jener zeitlosen Strecke des unveränderlichen Negationsactes nicht statt eines mehrere Veränderungsacte in dem sich ändernden Negationsacte geschehen können; sobald aber der unveränderliche Negationsact selbst der einfache zeitliche Veränderungsact werden kann, kann man mit absoluter Sicherheit behaupten, dass jene zeitlose Strecke absolut einfach und untheilbar ist, d. h. dass die zeitlose Strecke die die Unterbrechung der zeitlosen Gegenwart des veränderten Negationsactes erfüllte, wenn dieser Negationsact unveränderlich geblieben wäre, notwendigerweise ebenso absolut einfach und untheilbar sein müsse, wie dieser Veränderungsact selbst. Obgleich also der zeitlose Negationsact als zeitloser alle und jede Theilung völlig ausschliesst, setzt er gleichsam doch in sich selbst diese Theilung indem er sich selbst in einem absolut einfachen untheilbaren Veränderungsaugenblicke aufhebt; höbe er sich selbst in diesem einfachen untheilbaren Augenblicke nicht auf, so verbliebe er absolut theillos und von einer einfachen zeitlosen Strecke könnte dann absolut keine Rede sein. So ist also der einfache untheilbare zeitlose Zeittheil ganz gut möglich, also auch die notwendige Aufeinanderfolge zweier Veränderungen möglich, sobald die Umwandlungs-

fähigkeit des zeitlosen Negationsactes in dem zeitlichen Veränderungsact anerkannt wird, die wir ja in dem letzten Kapitel des vorigen Abschnitts auch thatsächlich festgestellt haben.

Nun sind wir auch endlich in der Lage, den Unterschied des zeitlosen von dem zeitlichen Setzungsacte resp. den Unterschied des simultanen von dem successiven Negationsact endgiltig festzustellen. Der simultane Negationsact ist zeitloser, der successive Veränderungsact ist zeitlicher Negationsact, und nun fragt es sich, worin liegt der specifische Unterschied zwischen beiden, was ist dasjenige das den einen zum zeitlosen und den anderen zum zeitlichen Act macht. Der zeitlose Setzungsact ist, sagten wir, absolut untheilbar, weil er absolut theillos ist, während der zeitliche Setzungsact ebenso untheilbar ist, aber nicht deshalb weil er die Anwendung der Quantitätskategorie ausschliesse, sondern deshalb weil er das einfachste erste Element dieser Kategorie, die einfache absolut untheilbare Einheit nämlich, darstellt. Um diesen Unterschied zu erklären können wir das Beispiel der absoluten Substanz zu Hilfe nehmen (was wir oben schon, obgleich zunächst in einem etwas anderen Zusammenhange, gemacht haben): die absolute Substanz ist ganz ebenso absolut einfach wie irgend eine einfache reale Einheit der qualitativ-quantitativen Wirklichkeit, während aber diese letztere zugleich untheilbar ist, ist jene erstere theilbar, d. h. es lassen sich von ihr Theile ablösen, ohne dass sie dadurch irgendwie in ihrer Natur geändert wird. Könnte der zeitlose Setzungsact als zeitloses Continuum aufgefasst werden, dann wäre der Unterschied der Einfachkeit und Theillosigkeit seiner selbst im Vergleich mit derjenigen des zeitlichen Setzungsactes damit ganz ebenso klar und eindeutig bestimmt, wie dieser Unterschied in dem eben erwähnten Falle der continuirlichen Substanz und der einfachen qualitativen Einheit klar und deutlich bestimmt ist. Aber ein zeitloses Continuum ist in Wahrheit absolut unmöglich. Ganz abgesehen von den allgemeinen Gründen, die ein extensives zeitliches Continuum als solches völlig ausschliessen, das extensive zeitliche Continuum müsste ganz aus denselben Gründen unmöglich sein, aus denen ein anfangloses zeitliches Discretum unmöglich ist (d. h. die ewig vergangene Vergangenheit macht ein anfangloses zeitliches Continuum ebenso unmöglich wie sie ein anfangloses zeitliches Discretum unmöglich macht). Ein intensives zeitliches Continuum ist aber absolut unmöglich: in der successiven Zeitreihe ist doch immer nur ein einziger Theil reell gegeben, nur da kann aber offenbar von einem Ineinander der vielen Theile die Rede sein, wo diese Theile zugleich gegeben sind, was nur in der simul-

tanen Reihe und nie und nimmer in der successiven der Fall sein kann. Wenn der zeitlose Setzungsact demnach gar nicht als ein successives Continuum aufgefasst werden kann, dann muss sein Unterschied von dem zeitlichen Setzungsacte wo anders gesucht werden.

Dieser Unterschied kann nun nur in der Art und Weise ihrer Setzungsfunktion gesucht werden. Denn zu sagen, dass sich der zeitlose Setzungsact von dem zeitlichen dadurch unterscheidet, dass der zweite nicht nur in simultaner Hinsicht sondern auch in successiver einfach und untheilbar ist, heisst nicht diesen Unterschied endgiltig anzugeben und festzustellen, sondern ihn nur provisorisch beschreiben (vgl. den Anfang dieses Kapitels). Denn es fragt sich eben was diese Untheilbarkeit in successiver Hinsicht bedeutet, und was jener simultane Act in successiver Hinsicht ist, wenn er nicht zeitlich-einfach ist. Er ist eben zeitlos, wird man antworten. Aber wir sehen eben, dass wir diese Zeitlosigkeit nicht positiv zu bestimmen wissen, dass wir sie nur negativ als die Abwesenheit von Zeitlichkeit bestimmen, und doch muss sie etwas positives sein, wenn ein zeitloser Setzungsact wirklich bestehen soll. Und thatsächlich, sobald wir die Art und Weise der Setzungfunktion des zeitlosen und des zeitlichen Setzungsactes betrachten, entdecken wir diesen fundamentalen Unterschied zwischen beiden auf die einfachste Art und Weise. Ist jeder Setzungsact ein Trennungsact, dann kann der Unterschied zwischen dem zeitlosen und dem zeitlichen Setzungsacte ganz leicht angegeben werden: der zeitlose Setzungsact trennt die von ihm gesetzten Glieder so voneinander, dass er sie beide zugleich setzt, dass er sie beide so setzt, dass der eine zusammen mit dem anderen besteht, dass die Realität des einen von der Realität des anderen unmittelbar abhängt, dass sie beide in einer *wechselseitigen Abhängigkeit* zueinander stehen. Der zeitliche Setzungsact dagegen trennt die beiden von ihm gesetzten Glieder so, dass er den einen setzt indem er den anderen aufhebt, dass die Realität des einen durch die Realität des anderen ausgeschlossen ist, dass die Realität des gesetzten von der gewesenen Realität des aufgehobenen abhängt, dass sie in einer *einseitigen Abhängigkeit* zueinander stehen. Der zeitlose Setzungsact ist eben der simultane und der zeitliche Setzungsact ist der successive Negationsact und sobald sie so aufgefasst werden ist ihr Unterschied in einer völlig klaren und eindeutigen Weise bestimmt. In dem zeitlichen Setzungsact ist die Simultaneität, in dem zeitlosen Setzungsacte ist die Succession völlig und absolut ausgeschlossen. Nicht also besteht der Unterschied zwischen dem zeitlosen und dem zeitlichen Negationsacte, wie es anfänglich schien, darin, dass der simultane

Negationsact als zeitloser und der successive Negationsact als zeitlicher Setzungsact aufgefasst wird, sondern umgekehrt besteht der Unterschied des zeitlosen von dem zeitlichen Setzungsacte darin dass der erste als rein simultaner und der zweite als rein successiver Negationsact aufgefasst wird. Der Setzungsact gliedert sich also nur dann naturgemäss in die beiden Arten des zeitlosen und des zeitlichen Setzungsactes, wenn er als Negationsact aufgefasst wird, wenn er also nicht als Existenzmoment eines einzigen einfachen Wesens sondern als Existenzmoment zweier einfachen realen Einheiten aufgefasst wird: dann entspricht dem zweifachen möglichen Abhängigkeitsverhältniss dieser realen Einheiten jene Zweiheit der Setzungsacte.

Haben wir nun so den einzig möglichen Unterschied zwischen dem zeitlosen und dem zeitlichen Setzungsacte bestimmt, dann haben wir damit auch die Möglichkeit der zeitlosen Thätigkeit endgiltig festgestellt. Der zeitlose Setzungsact stellt die zeitlose Thätigkeit dar, er ist der zeitlos thätige Productionsact der qualitativ-quantitativen Wirklichkeit aus der qualitätslosen. Ist die Negation das eigentliche Setzungsprincip der qualitativ-quantitativen Wirklichkeit, dann stellt diese Wirklichkeit das wirkliche Product der qualitätslosen Wirklichkeit dar, denn die Negation ist in ihren beiden Grundformen, sowohl derjenigen des zeitlosen als in derjenigen des zeitlichen Setzungsactes, ein Trennungs-, ein Thätigkeitsprincip. Wir hatten also ganz Recht als wir am Ende des letzten Kapitels im vorigen Abschnitt die gesammte qualitativ-quantitative Wirklichkeit für ein zeitloses Product der absoluten Substanz erklärten. Solange der zeitlose Setzungsact nicht mit dem simultanen Negationsacte identificiert wird, solange nur der zeitliche Setzungsact als der eigentliche Setzungsact betrachtet wird, solange kann man auch durchaus nicht begreifen, wieso man von einer zeitlosen Ablösung der qualitativ-quantitativen Wirklichkeit von der qualitätslosen reden kann, solange scheint diese Ablösung eine contradictio in adiecto zu sein. Es scheint ja nichts einleuchtenderes zu sein, als dass nur dasjenige als von der absoluten Substanz abgelöst zu sein betrachtet werden kann, was zuvor in dieser Substanz wirklich vorhanden war, eine zeitlose Ablösung also eine contradictio in adiecto. Und doch verschwindet diese Unbegreiflichkeit der zeitlosen Ablösung sogleich, sobald man auch den simultanen Negationsact als Ablösungs- und Setzungsact erkannt hat: denn er ist dann eben der zeitlose Setzungsact- d. h. der zeitlose Ablösungsact der qualitativ-quantitativen Wirklichkeit von der qualitätslosen. Die zeitlose Gegenwart dieses zeitlosen Setzungactes ist ebenweder als ein successives Continuum noch als reine tote Position

(die Ewigkeit nach der Definition *Spinoza's*) des Seins aufzufassen, sondern sie ist als simultaner Negationsact aufzufassen, denn nur als simultaner Negationsact ist der zeitlose Setzungsact wirklich zeitloser Setzungs- d. h. zeitloser Thätigkeitsact.

Zweites Kapitel.

Über den Raum und die Zahl.

Wie über die Zeit, so sind auch über den Raum drei Ansichten möglich:

1) Der Raum ist ein besonderes neben den realen Dingen bestehendes Wesen, welches diese letzteren enthält und ihr Gegebensein an einem Orte, d. h. ihr Gegebensein überhaupt ermöglicht.

2) Der Raum ist kein besonderes den realen Dingen als Bedingung ihres Gegebenseins vorhergehendes Wesen sondern derselbe ist nichts anderes als das blosse Nebeneinandersein der realen Dinge selbst, also ein blosses Verhältniss zwischen denselben. Nicht das reale Ding wird in einen schon bestehenden Raumort gesetzt, sondern der Raumort wird erst durch das reale Ding als solches gesetzt, der Ort ist nichts anderes als der Ausdruck für die Thatsache, dass die Dinge, von denen jedes eine numerische Einheit darstellt, nebeneinander gegeben sind.

3) Der Raum ist weder ein besonderes Wesen neben den realen Dingen, noch das blosse Nebeneinanderverhältniss derselben, sondern er ist eine subjective Anschauungsform a priori, die nur als vorstellungsmässige Auffassungsform des die realen Empfindungen appercipierenden Subjects bestehen kann.

Es ist nun leicht zu zeigen, dass die erste Ansicht, so alt und weitverbreitet dieselbe sowohl in der gewöhnlichen Meinung als in der Wissenschaft und Philosophie auch ist, vollkommen unhaltbar ist. Der Raum als leeres neben den realen Dingen als ihr Ortbehälter bestehendes Wesen ist deshalb undenkbar, weil derselbe den Widerspruch eines leeren Etwas, das als solches noch keinen realen Seinsinhalt hat, darstellt, was eben unmöglich ist. Der reine absolute Raum ist nicht der reale Seinsinhalt selbst als solcher, er soll ja die Bedingung dieses realen Seinsinhalts der Dinge sein, muss demnach für ganz leer, d. h. inhaltslos angesehen werden. Was bedeutet das aber? Das bedeutet nicht mehr und nicht weniger als dass der leere Raum ein Etwas sein soll, das Einheit von Sein und Nichtsein ist, ein Etwas, welches nur seiner Existenz nach real,

seiner Essenz nach aber durchaus irreal ist. Nun der Begriff eines „leeren“ Etwas ist ebenso widersprechend, wie es der Begriff des Scheins ist, den wir früher (im ersten Kapitel des ersten Abschnitts) analysiert und verworfen haben. Der Unterschied zwischen beiden besteht nur darin, dass sich beim Schein das Nichtseiende als Seiendes, während sich hier bei leerem Raume das Seiende für das Nichtseiende (ein „leeres“ Seiendes) ausgiebt, der leere Raum ist also der verkehrte Schein. Sowohl der direkte Schein als dieser indirekte Schein sind ihrer Existenz nach real, ihrer Essenz nach irreal, während aber bei dem direkten Schein von dem Seienden als der Einheit von Existenz und Essenz gleichsam die Essenz weggenommen wird, so dass nur die reine Existenz als solche zurückbleibt, wird bei dem leeren Etwas des Raumes dem Nichtseienden, welches die absolute Aufhebung der beiden Momente bedeutet, das reine Existenzmoment gleichsam hinzugefügt. Im Resultat sind also der direkte und der indirekte Schein vollkommen gleich, aber sie haben verschiedenen Ursprung, wir denken uns den Schein als das nichtseiende Sein, während wir uns den leeren Raum als das seiende Nichtsein denken, wir denken, dass sich in einem einfachen Veränderungs- und Umwandlungsacte der Schein in das reale Sein und der leere Raum in das irreale Nichtsein verwandeln würde: der Schein hat die Tendenz nach oben, nämlich er strebt danach dem Seienden so ähnlich wie möglich zu werden, der leere Raum hat die Tendenz nach unten, er strebt danach dem Nichtseienden so ähnlich wie möglich zu werden, so dass bei dem Verwandlungsacte wirklich der erste in das Sein, und der zweite in das Nichtsein vollständig übergehen würde. Wir denken uns ja thatsächlich den leeren Raum so von jedem realen Inhalte entblösst, dass es nur noch der dünne Faden der reinen Existenz als solcher ist, der ihn gleichsam am Leben erhält. Wenn dem nun so ist, so muss der leere Raum ebenso wie der widerspruchsvolle Schein, von dem er sich ja in seiner nackten Fakticität in nichts unterscheidet, vollkommen verworfen werden.

Es bliebe nur noch ein Ausweg übrig, denselben zu behalten: nämlich vorauszusetzen, dass der reale Raum nicht ein solches leeres nichtiges Etwas darstellt, sondern mit realem Seinsinhalte als solchem erfüllt ist. Nun, in diesem Falle ist der leere Raum nicht nur unmöglich sondern auch überflüssig. Überflüssig ist er deshalb, weil, wenn der leere Raum selbst den realen Seinsinhalt darstellt, es keinen Sinn hat, ihn von diesem realen Inhalte abzutrennen: wenn der reale Seinsinhalt des Raumes keines weiteren Raumes be-

darf, der die Bedingung des Ortsgegebenseins seiner Inhalte wäre, dann braucht der primäre Seinsinhalt den realen Raum ebensowenig als Bedingung seines Gegebenseins; würde man dies zulassen, dann müsste man notwendig auch einen weiteren Raum als Bedingung des Gegebenseins der einzelnen Inhalte des ersten Raumes voraussetzen u. s. f. in infinitum. Würde man darauf bemerken, dass dies doch in Bezug auf den realen Raum deshalb nicht gilt, weil dieser als absolutes Continuum zu denken ist, in dem es keine geschiedenen Theile mehr giebt, so ist darauf zu antworten, dass in diesem Falle doch nicht mehr von einem Gegebensein des primären Seinsinhalts *in* diesem realen Continuum die Rede sein könnte. Solange der reine Raum als leeres Etwas gedacht wird, solange hindert seine absolute Continuität gar nicht die realen Seinsinhalte *in* ihm selbst sich zu befinden, weil er selbst eben absolut ohne jeden realen Inhalt ist, sobald aber der reine Raum selbst mit realem Inhalte erfüllt ist, hindert dieser Inhalt den primären Seinsinhalt durchaus *im* Raume selbst sich zu befinden, denn nun befindet sich *im* Raume nur der reale Seinsinhalt dieses Raumes selbst. Es ist wohl selbstverständlich dass dabei die Voraussetzung, dass die Realitätsart des realen Raumes, eine von der Realitätsart des realen Seinsinhalts toto genere verschiedene ist, gemacht werden muss, was wiederum nicht mehr und nicht weniger bedeutet, als dass der reale Raum mit der absoluten qualitätslosen Substanz identificiert werden müsste, und das ist die neue Schwierigkeit, mit der die Voraussetzung des leeren Raumes behaftet ist. Im letzten Kapitel des vorigen Abschnittes haben wir gesehen, dass die qualitätslose Substanz nicht ein extensives Continuum sein könne, woraus folgt, dass, da der leere Raum notwendigerweise mit dieser Substanz zusammenfallen müsste, derselbe unmöglich ist. Aber selbst wenn man *per impossibile* seine Möglichkeit zuliesse (was nur in dem Falle geschehen könnte, wenn man die absolute Substanz für den bloss passiven Träger der qualitativ-quantitativen Wirklichkeit erklärte), dieses reale extensive Continuum und die qualitativen Seinsinhalte fielen doch räumlich vollkommen ausser einander, weil die zweiten sich *in* dem ersten nicht befinden könnten; der angebliche Raum wäre also doch kein Raum.

So ist diese erste Ansicht über das Wesen des Raumes vollkommen falsch, und wir brauchen nicht mehr Worte darauf zu verlieren.

Dasselbe gilt nun auch in Bezug auf die dritte Ansicht. Sie wäre nur in dem Falle richtig, wenn Kant, der Urheber dieser Ansicht, Recht hätte, dass das reale Subject befähigt ist, solch' eine reine Anschauungsform in sich zu producieren. Dies ist aber

gar nicht möglich: denn dasjenige, was im Subjecte gegeben ist und gegeben werden kann, kann keine scheinbare, muss absolute Realität besitzen, und so ist auch die reine Anschauungsform des Raumes als solche gar nicht möglich. Sollte aber dieselbe nicht blosse Vorstellung sein, d. h. etwas sein was nicht so ist wie es sich darstellt, dann müsste sie das Prädicat der Ausdehnung in sich enthalten, d. h. selbst ausgedehnt sein. Ist sie aber selber ausgedehnt, dann gehört sie in den realen Bewusstseinsinhalt als solchen hinein, und ist nicht mehr als Anschauungsform des Subjects zu betrachten. In diesem Fall wird sie in Bezug auf die Seinsbestandtheile der Bewusstseinsinhalte ganz dasselbe was der reine leere objective Raum in Bezug auf die realen Dinge selbst ist: und doch war der stärkste Grund, der Kant bewog, die Subjectivität der Raumanschauung vorauszusetzen, die Unmöglichkeit des Bestehens des leeren Raumes neben den realen Dingen, weil man eben ganz in Verlegenheit geräth, welche Art von Realität ihm beizulegen ist. Nur leider ist die von Kant vorausgesetzte Realitätsart des reinen Raumes als der subjectiven vorstellungsmässigen Auffassungsform ebensowenig möglich, wie es mit der Realitätsart jenes reinen objectiven Raumes der Fall ist, da der ganze Unterschied zwischen beiden in Wahrheit nur darin besteht, dass jene der subjective und diese der objective Schein ist, beide aber sind Schein, und Schein ist unmöglich sowohl in dem Subjecte als ausserhalb dem Subjecte.

Es bleibt also nur noch die dritte Ansicht übrig, und sie muss die richtige sein. *Der Raum kann nur die reine Ordnungsform des Nebeneinandergegebenseins der realen Inhalte sein.* Wo eine Vielheit von Dingen gegeben ist, da ist, wie wir gesehen, ein doppeltes Verhältniss des Gegegebenseins dieser Vielheit möglich: entweder sind die vielen Dinge nebeneinander, zugleich und simultan gegeben, oder sie folgen aufeinander, sind nacheinander gegeben. Nebeneinander und Nacheinander sind keine besonderen Realitätsarten neben den realen mit Inhalt erfüllten Dingen, sondern sie sind blosse rein formale d. h. absolut inhaltslose Verhältnisse, sie bedeuten nichts anderes als die nackte Thatsache der Verbindung der vielen Dinge durch die zeitlosen oder durch die zeitlichen Negationsacte und nichts anderes. Wir haben gesehen, dass die Verschiedenheit und Getrenntheit der Dinge nicht zu begreifen war ohne die Voraussetzung einer besonderen Realitätsart, die diese Verschiedenheit und Getrenntheit bewirkt: das ist der reale Negationsact. Nebeneinander und Nacheinander bedürfen keiner solchen Realitäten, um im Seienden bestehen zu können: sie sind und bleiben blosse Verhältnisse im Seienden, d. h. sie sind in

Wahrheit nichts besonderes in demselben, sondern sind nur ein Ausdruck für die Thatsache des Zusammenhangs der realen Dinge durch ihre logischen Setzungsprincipien. Über das letzte Wesen dieser Verhältnisse werden wir ausführlich im dritten Abschnitte handeln. Dieser dritten Ansicht gemäss sollten wir überhaupt nicht mehr vom Raume sprechen, da derselbe ja kein besonderes Wesen mehr neben den realen Seinsinhalten ist, sondern von der blossen Räumlichkeit dieser letzteren. Da aber die Räumlichkeit als solche sich nicht von dem realen räumlichen Inhalte trennen lässt, so ist dieser reale Inhalt, insofern er unter jener Form, oder besser gesagt, von der Seite der Räumlichkeit betrachtet wird, selbst als der reale Raum zu betrachten, so dass alle Eigenschaften des supponierten reinen leeren Raumes auf diesen realen Raum übergehen.

Die erste Frage, die wir nun in Bezug auf die Beschaffenheit des Raumes zu erheben haben, bezieht sich auf seine Unendlichkeit oder Endlichkeit nach oben und unten. Bei der Zeit haben wir gesehen, dass dieselbe nach unten absolut endlich und nach oben in der einen Richtung ebenfalls absolut endlich, in der anderen aber potentiell unendlich, d. h. unbestimmt endlich ist, und es fragt sich nun, wie es mit dem Raume in dieser Beziehung steht. Da aber in Bezug auf den Raum die Frage seiner Unendlichkeit oder Endlichkeit nach oben viel leichter auflösbar ist als diejenige seiner Unendlichkeit resp. Endlichkeit nach unten, werden wir die erste Frage zuerst in Angriff nehmen.

Dass die Zeit in der Richtung der Zukunft nie actuell unendlich werden kann, ist eine so einleuchtende Thatsache, das dieselbe noch von niemandem bezweifelt worden ist; die Reihe der Zukunftsaugenblicke können wir uns noch so gross denken, sie bleibt immer endlich und kann nie unendlich werden, weil ja das das Aufhören der Zukunft also auch des Seienden selbst bedeuten würde, was doch unmöglich ist. Wir haben nun dasselbe auch in Bezug auf die Vergangenheit, und zwar auf Grund desselben Princips nachgewiesen, auf Grund dessen ja auch jene unsere instinktive Überzeugung von der absoluten Unvollendbarkeit der Zukunft beruht, nämlich auf Grund des metaphysischen Axioms von der absoluten Beständigkeit des Seienden, oder, was dasselbe ist, auf Grund der ursprünglichen Zeitlosigkeit des Seienden. Aus dem Wesen der Zeit als der blossen Succession folgt also sowohl seine Endlichkeit nach oben wie diejenige nach unten, beide Endlichkeiten sind mit der Succession als solcher gegeben. Es fragt sich nun wie es mit dem Raume in dieser Richtung gestellt ist: wir haben schon gesagt, dass wir zunächst nur

seine Endlichkeit nach oben in Betracht ziehen werden, weil diejenige nach unten viel schwieriger und verwickelter ist.

Die Zeitreihe ist also sowohl vorwärts als rückwärts endlich, und da sie rückwärts nur bis zu einem bestimmten Punkte zurückzuverfolgen ist, und einen absoluten Anfang hat, so ist von diesem Anfang aus gerechnet dieselbe nur in der Richtung der Zukunft verlängerungsfähig, d. h. nur in der Richtung der Zukunft unbestimmt endlich. Sind nun Räumlichkeit und Zeitlichkeit die beiden einzig möglichen Ordnungsformen des Seienden, so müssen sie direkte Gegensätze sein, also in einem einfachen Gegensatzverhältniss stehen, und dann ist es ja leicht, wenn die Beschaffenheit des einen Gliedes bekannt ist, unmittelbar auf die Beschaffenheit des anderen Gliedes zu schliessen. Eine Vielheit von Dingen lässt sich in der That entweder als nebeneinander oder als nacheinander gegeben denken, *tertium non datur* so dass Räumlichkeit und Zeitlichkeit wirklich einander direkt entgegengesetzt sind. Es fragt sich nun nur noch, ob das Gegensatzverhältniss beider ein positiv- oder ein negativ-contradictorisches sei: wenn ein positiv-contradictorisches, so müssen beide Glieder etwas Gemeinsames haben, wenn ein negativ-contradictorisches, so können sie nichts Gemeinsames untereinander haben, das eine ist die absolute Negation des anderen. Wir haben nun gesehen, dass es nur ein einziges Beispiel des negativ-contradictorischen Verhältnisses giebt: nämlich der Fall des Seienden und des Nichtseienden, während es im Gebiete des Seienden selbst nur positiv-contradictorische Gegensätze giebt und geben kann. So müssen also auch Räumlichkeit und Zeitlichkeit in einem positiv contradictorischen Gegensatze zueinander stehen.

Nun ist das Verhältniss zweier positiv-contradictorischen Gegensätze solcher Art, dass das Wesentliche, d. h. das Specifische, das Unterscheidende des einen Gliedes das direkte Gegentheil des Wesentlichen, des Unterscheidenden des anderen Gliedes sein muss. Worin besteht nun das Wesentliche der Successionsordnung, des Nacheinanderseins? Worin unterscheidet sich das Nacheinander- von dem Nebeneinandersein, was ist das Specifische des Nacheinanderseins? Offenbar liegt das Wesentliche und das Specifische des Nacheinanderseins darin, dass die Anzahl seiner Theile eine unbestimmt endliche, eine endlose ist, dass die Zeitreihe nie ein Ende haben kann. Wir haben gesehen, dass diese Endlosigkeit der Zeitreihe etwas ist, was unmittelbar aus dem Wesen der Zeit selbst folgt, oder, wenn wir uns genauer ausdrücken wollen, etwas was unmittelbar aus ihrem Gegensatz zu der absolut unendlichen zeitlosen Ewigkeit erschlossen wird. Die zeitlose Ewigkeit, welche das absolute Unverändertbleiben

des Seienden selbst bedeutet, ist als solche absolut endlos und im Gegensatz zu dieser absoluten Unendlichkeit stellt sich die Zeitreihe immer als endliche obgleich unbestimmt endliche Reihe dar. Wie wir nun so aus der absoluten Unendlichkeit der Zeitlosigkeit auf die unbestimmte Endlichkeit der Zeitlichkeit geschlossen haben, ebenso werden wir nun aus der Beschaffenheit der Zeitreihe auf die Beschaffenheit der Raumreihe schliessen können. Wenn nämlich das Wesen der Zeitreihe darin besteht *immer* und *ohne Ende* fortsetzbar zu sein, so kann das Wesen der Raumreihe nur in der Negation dieser endlosen Fortsetzbarkeit der Zeitreihe d. h. nur in der *absolut bestimmten Endlichkeit* liegen. Der Raum und die Zeit müssen beide endlich sein, darin liegt und kann einzig und allein das Gemeinsame beider liegen, nur ist die Zeit unbestimmt während der Raum im Gegensatz dazu bestimmt endlich ist und sein muss. Dass Zeit und Raum in dem Grundprädicate „endlich“ übereinstimmen müssen, folgt ja einfach daraus, dass sie als Glieder eines und desselben Gegensatzpaares etwas Gemeinsames haben müssen, und dieses Gemeinsame allgemeinen Charakters sein muss: nun ist in dem Prädicate der unbestimmten Endlichkeit, welches der Zeitlichkeit angehört, die Endlichkeit die allgemeine Bestimmung, die Unbestimmtheit die besondere Bestimmung dieser allgemeinen Bestimmung, also muss jene allgemeine Bestimmung auch dem Raume angehören, während demselben dagegen die ganz entgegengesetzte besondere Bestimmung der Bestimmtheit angehören muss. Aus dem Wesen der Zeit folgt also streng und unmittelbar, dass der Raum nach oben bestimmt endlich sein muss, und jeder der das logische Princip des direkten Gegensatzes anerkennt und in seine logische Natur eingedrungen ist, muss diese Schlussfolgerung anerkennen.

Nur ein Einwand ist gegen diese unsere Ausführung möglich: man könnte nämlich bemerken, dass wir jenes Prädicat der Zeitlichkeit, nämlich ihre unbestimmte Endlichkeit, nicht richtig beschrieben haben, dass die unbestimmte Endlichkeit überhaupt nicht mehr als Endlichkeit, sondern als potentielle Unendlichkeit zu bezeichnen ist, in welchem Falle dann dem Raume das Prädicat der actuellen Unendlichkeit, also das direkte Gegentheil des ihm von uns zugesprochenen Prädicats zukäme. Nun, die Streitfrage hängt also nur davon ab, ob die potentielle Unendlichkeit, was ja die unbestimmte Endlichkeit unzweifelhaft ist, wirklich als Unendlichkeit zu bezeichnen sei, oder nicht. Nun, unsere Antwort darauf lautet, dass dieselbe nicht unter den Begriff des Unendlichen zu subsumieren ist. Während das Endliche thatsächlich sowohl unbestimmt als bestimmt

endlich sein kann, kann das Unendliche nur als actuell unendlich gedacht werden: das actuell Unendliche ist das vollendete, fertige Unendliche, während das sogenannte potentielle Unendliche eben immer endlich ist und nie *unendlich wird*, d. h. als solches nie *unendlich ist*, sondern nur der Unendlichkeit nachstrebt. Potentiell unendlich nennen wir die Zeitreihe nur deshalb, weil sie nie actuell unendlich werden kann, durch den Ausdruck der potentiellen Unendlichkeit wollen wir nur ausdrücken, dass diese Reihe, weil sie eben immer endlich ist, *nie* das Unendliche selbst erreicht, nie das Unendliche selbst *wird*, weit entfernt also dass das potentiell Unendliche selbst unendlich ist, bedeutet es die Unerreichbarkeit des Unendlichen, und zwar eben dadurch dass es selbst *endlich* ist. Wenn wir bei der Zeitreihe feststellen, dass sie immer weiter und weiter fortsetzbar ist, so stellen wir uns dabei die zeitlose Ewigkeit unter dem Bilde der geraden Linie als eine schon dastehende vollendete Unendlichkeit vor, deren eine Ende im Unendlichen jene successive Zeitreihe nie erreicht: nur insofern wir dabei diese Unerreichbarkeit des unendlichen Endes durch die Zeitreihe, die selbst endlich ist, in Betracht ziehen, nennen wir die Reihe potentiell unendlich, nicht bemerkend, dass wir uns dabei eigentlich ausserhalb der Reihe gestellt haben, und ihm eine Eigenschaft zugesprochen, die ihm nicht angehört. Denn *sensu stricto* gesprochen, kann nur dasjenige potentiell unendlich genannt werden, das noch nicht unendlich, also endlich ist, aber unendlich werden kann. Die unbestimmte Endlichkeit der Zeitreihe dagegen befähigt zwar dieselbe, jenem Ende im Unendlichen immer näher zu sein, aber ihre Endlichkeit hindert sie durchaus jenes Ende selbst je zu erreichen, so dass sie immer endlich bleibt und nie unendlich wird, die sogenannte potentielle Unendlichkeit ist also keine Unendlichkeit im strengen Sinne dieses Wortes, sondern die Endlichkeit selbst, obgleich eine ganz unbestimmte Endlichkeit. Der Gegensatz des actuell Unendlichen ist nicht das potentiell Unendliche im Sinne des unbestimmt Endlichen, weil dieses ja kein Unendliches ist, das actuell Unendliche steht überhaupt in keinem positiv-contradictorischen Gegensatze zu irgend einer anderen Gattung des Unendlichen, es verhält sich dem Endlichen gegenüber als die absolute Negation, d. h. steht mit diesem in einem negativ-contradictorischen Gegensatze. Das Endliche schliesst das Unendliche so aus, das sie überhaupt nichts gemeinsames mehr haben, das Unendliche ist die absolute Negation des Endlichen, und es ist eine Frage für sich ob diese Negation überhaupt im Seienden irgendwo bestehen kann. Wenn das potentiell Unendliche der Zeitreihe kein Unendliches ist,

sondern das unbestimmt Endliche, dann stehen und können nur das unbestimmt und das bestimmt Endliche im direkten Gegensatz stehen und unsere Schlussfolgerung von der bestimmten Endlichkeit des Raumes nach oben besteht zu Recht.

Gegen dieses Resultat, welches vom logischen Standpunkte unanfechtbar ist, wird man eine andere anscheinend ebensolche Notwendigkeit in's Feld ziehen, und dies ist die Thatsache, dass wir uns den Raum ebensowenig endlich d. h. bestimmt, vollendet endlich denken können, wie wir uns thatsächlich die Zeit nicht als bestimmt endlich denken können. Ist es nicht, wird man sagen, ebensosehr sicher, dass, wie wir die Zeit in's Unbestimmte hinaus verlängern können, wir uns ebenso den Raum immer grösser denken können, und dass in unseren Gedanken der Raum ebensowenig ein Ende hat, wie die Zeit kein solches hat. Gewiss ist dem so, antworte ich, während aber dieses Verlängern in's Unbestimmte bei der Zeit unmittelbar als logische Notwendigkeit einzusehen ist — indem man die Zeit mit der absoluten Beständigkeit des Seienden in Vergleich bringt — ist bei dem Raume dies gar nicht so unmittelbar, wie man es meint, der Fall. Es ist gar nicht nötig dass, weil dies Verlängern bei der Zeit eine logische Notwendigkeit ist, dasselbe auch bei dem Raume eine logische Notwendigkeit sei, vielmehr ist es ganz wohl möglich, dass jene Thatsache bei dem Raume eine zusammengesetzte ist, und demnach keine logische Notwendigkeit darstellt. Und thatsächlich ist dem so. Sobald man sich das Specifische der Raumreihe im Gegensatz zu demjenigen der Zeitreihe zum Bewusstsein bringt, sieht man gleich ein, dass jene Vergrösserung des Raumes in's Unbestimmte gar nicht den Raum selbst als solchen betrifft, sondern unmittelbar sich einzig und allein auf die Zeit selbst bezieht. Denn in Wahrheit geschieht jene Vergrösserung des Raumes in unseren Gedanken nur in und durch die Zeit; zwar können wir uns die Zeit als solche nicht vorstellen ohne den Raum — besonders die gerade Linie — dabei zu Hilfe zu nehmen, aber wir sehen ja unmittelbar ein, dass wir die Zeit selbst dabei in's Unbestimmte verlängern können, und gerade deshalb, weil wir uns die Zeit nicht anders denn unter dem Bilde einer geraden Linie vorstellen können, bilden wir uns vor jeder tieferen Reflexion ein, dass wir den Raum selbst ebensogut in's Unbestimmte verlängern können, wie es mit der Zeit der Fall ist, während wir dabei in Wahrheit nur die Zeitreihe selbst verlängern. Die Thatsache selbst, dass der Raum in's Unbestimmte verlängert wird, wollen wir damit nicht wegläugnen, was wir läugnen ist nur, dass diese Thatsache keine

letzte einfache Denknotwendigkeit darstellt, und das ist die Hauptsache.

Es muss aber gleich bemerkt werden, dass, wenn die Verlängerung der subjectiven Raumvorstellung in's Unbestimmte eine *logische Notwendigkeit* wäre, dass dann der objective Raum notwendigerweise actuell unendlich sein müsste. Wenn es wirklich logisch notwendig ist, dass sich die gerade Linie in's Unendliche verlängern kann, dann muss sie an sich notwendig, da ja alle ihre Theile simultan gegeben sind, als die ganze unendliche Linie gegeben sein, da es keinen Sinn hat von potentieller Unendlichkeit da zu reden, wo alle Theile zugleich und nicht nacheinander gegeben sind. Unsere Vorstellung des Raumes ist nicht der reale Raum selbst (man darf diese Dualität des inneren Bildes und des äusseren Gegenstandes nicht dahin umdeuten, dass das erstere blosse scheinbare Vorstellung des letzteren sei, vgl. 1. K. I. Abschnitt), während unsere Vorstellung der Zeit mit der objectiven Zeit zusammenfällt, weil ja die Zeit in allen realen Zeitverläufen als eine und dieselbe gedacht wird, während der objective und der subjective Raum nicht ein und derselbe Raum sind (wäre selbst der subjective Raum ein Theil des objectiven, auch dann könnte er nie der ganze objective Raum sein, sie blieben also auch dann voneinander verschieden), und weil unsere Vorstellung des Raumes mit dem realen Raume nicht identisch ist, kann jene Incongruenz zwischen dem objectiven und dem subjectiven Raume ganz gut bestehen. Wenn der objective Raum actuell unendlich wäre, so könnten wir also auf diese seine actuelle Unendlichkeit mit absoluter Sicherheit auch dann schliessen, wenn unsere subjective Raumvorstellung nur potentiell unendlich wäre. Die Zeitreihe als solche kann ja nicht actuell unendlich werden deshalb, weil sie ja dann die ganze Ewigkeit erfüllte und also das Seiende aufhörte zu sein, deshalb muss sie immer potentiell unendlich sein und bleiben; die objective Raumreihe müsste dagegen actuell unendlich sein, wenn in ihr wirklich jede Gerade in's Unendliche verlängbar wäre, weil ja diese ganze Reihe actu gegeben ist und gerade durch dieses ihr ganze Gegebensein erst besteht.

Nun ist aber jene Verlängerung der subjectiven Raumreihe in's Unbestimmte gar keine logische Notwendigkeit, wie man es gewöhnlich meint. Denn wenn diese Verlängernng in's Unbestimmte die logische Notwendigkeit bei der Zeitreihe darstellt, so kann sie, wie wir ausgeführt haben, keine logische Notwendigkeit bei der Raumreihe sein, hier muss sie als eine durchaus zusammengesetzte Thatsache anerkannt werden. Die Raumreihe, für sich und ohne Zeit

betrachtet, wird erfahrungsgemäss immer als eine endliche Grösse vorgestellt, vergrössert vorstellen können wir sie nur dadurch, dass wir ihr neue Bestandtheile *in der Zeit* hinzufügen: diese Thatsache ist selbstverständlich, aber das Selbstverständliche hat manchmal eine bei weitem grössere Bedeutung, als man es gewöhnlich meint. Denn wenn es selbstverständlich ist, dass der Raum nur in und durch die Zeit vergrössert werden kann, so bedeutet das nicht mehr und nicht weniger als dass der Raum für sich absolut nicht vergrössert werden kann, für sich genommen also absolut bestimmt endlich ist. Denn in Wahrheit, wenn ich die gerade Linie in der Zeit dadurch vergrössere, dass ich ihr einen neuen Raumpunkt hinzufüge, so ist die nunmehr vorgestellte Gerade als Ganzes genommen nicht mehr die Gerade des vorigen Augenblickes. Zwar ist es unzweifelhaft dass derjenige Theil derselben, dem ich den neuen Theil hinzugefügt habe, ein und derselbe geblieben ist, aber die neuentstandene Gerade als Ganzes ist nicht mehr jene erste Gerade, weil sie jetzt eben vergrössert ist.*) Wenn ich in der Zeit der schon bestehenden Zeitstrecke einen neuen Zeitaugenblick hinzufüge so habe ich nicht eine *neue* Zeitstrecke vor mir, sondern ich habe die *verlängerte* Zeistrecke vor mir, weil ich ja die Verlängerung in der Zeit selbst vollzogen habe, die Zeit selbst ist es die sich selbst (durch und in sich selbst) verlängert hat. Dagegen wenn ich die räumliche Gerade verlängere, so habe ich eigentlich nicht die Gerade selbst verlängert, weil ich eben diese Verlängerung in der Zeit und nicht im Raume vollzogen habe. Ich bekenne offen und weiss ganz gut, dass diese Ausführungen etwas fremdartig anmuthen werden — aber was kann ich dafür, der Gegenstand der metaphysischen Untersuchung ist an vielen Stellen eben von solch' einer einzigartigen Natur. Die Verlängerung der räumlichen Geraden ist eben nicht möglich, weil sie erst durch das Medium der Zeit geschieht, und ich, wenn ich angeblich die

*) Um die Wahrheit dieser auf den ersten Blick so seltsamen Behauptung einzusehen, will ich ein Beispiel anführen, in welchem die Richtigkeit der Sache auf den ersten Blick einleuchtet. Stelle ich mir in einem Augenblick einen von dem Raume des früheren Augenblicks grösseren Raum vor, aber so dass ich jenen Raum des früheren Augenblickes völlig aufhebe, so wird niemand für den Raum des zweiten Augenblicks behaupten, dass er die Verlängerung dieses Raumes des ersten Augenblickes ist, und zwar einfach deshalb nicht weil der zweite Raum numerisch ein von dem ersten ganz verschiedener ist. Wenn dem nun so in diesem Falle ist, so muss es auch in dem von uns angeführten Falle sein. Der in dem zweiten Augenblicke hinzugekommene Raumtheil stellt doch einen ganz neuen Raum dar, und wenn er dem schon bestehenden Raume hinzugefügt wird, so hat er wohl diesen vergrössert, aber der nun entstandene Raum ist doch die Summe des bestehenden und eines ganz neuen Raumes, also als Ganzes ein neuer von dem früheren numerisch verschiedener Raum.

Gerade in's Unbestimmte verlängere, nicht eigentlich die Raumreihe (d. h. die Gerade) sondern einzig und allein die Zeitreihe selbst in's Unbestimmte verlängere, und dadurch der täuschende Schein jener Verlängerung der Geraden selbst in's Unbestimmte entsteht. Die Gerade des einen Augenblicks hat mit der verlängerten Geraden des anderen Augenblicks, insofern sie als Ganze betrachtet werden, absolut keine Gemeinschaft, die eine stellt räumlich genommen im Vergleich mit der anderen einen ganz neuen Raum dar, der eine Raum fällt räumlich genommne vollkommen ausserhalb des anderen Raumes, weil er eben in eine andere Zeit hineingehört.

Sobald wir streng logisch die Raumreihe von der Zeitreihe unterscheiden, genügt die Endlichkeit der subjectiven Raumvorstellung vollständig um die absolute Endlichkeit des objectiv-realen Raumes zu verbürgen. Verfährt man aber rein empirisch, will man keine logischen Notwendigkeiten in den Erfahrungsthatsachen anerkennen, d. h. will man keine absolut einfachen Erfahrungsthatsachen anerkennen, sondern betrachtet man alle Erfahrungsthatsachen für zusammengesetzt, dann kann man aus der subjectiven Raumvorstellung weder schliessen dass der objective Raum endlich, noch dass derselbe unendlich ist. Denn obgleich unsere Raumvorstellung endlich ist, kann doch der objective Raum sowohl endlich als unendlich sein, und zwar sowohl in dem Falle, wenn unser subjectiver Raum selbst ein Theil des objectiven als auch in dem Falle wenn derselbe von dem objectiven Raume verschieden ist, beide vollkommen auseinander liegen. Auf unserem Standpunkte der absoluten Realität der unmittelbaren Erfahrung ist nämlich der subjective Raum ganz ebenso real d. h. räumlich wie es mit dem vorausgesetzten objectiven der Fall ist, und so kann er entweder als Theil dieses objectiven Raumes selbst angesehen werden — wir werden in dem zweiten Unterabschnitt dieses Abschnitts sehen, dass, wenn Sein und Bewusstsein absolut zusammenfallen, die Wirklichkeit als eine Summe von Bewusstseinsindividuen aufzufasssen ist, und in dem Falle der subjectiv-reale Raum jedes Bewusstseins ganz wohl als Theil des objectiv-realen Raumes, der ja in diesem Falle das Compositum aller dieser einzelnen Bewusstseinsräume wäre, aufgefasst werden kann — oder aber kann derselbe als eine von der objectiven ganz disparate Räumlichkeit aufgefasst werden. Wie dem nun auch sei, in jedem Falle kann der objective Raum unendlich sein, während der subjective endlich ist. Im ersten Falle ist dies ganz wohl möglich, denn der unendliche Raum besteht aus endlichen Theilen und also kann jeder subjective Raum als sein Theil endlich sein — aus der End-

lichkeit des letzteren liesse sich also auf die Endlichkeit oder Unendlichkeit des ersteren gar nicht schliessen. Im zweiten Falle dagegen könnte man ganz gut voraussetzen, dass, wenn der objective Raum ein unendlicher ist, auch der subjective ein unendlicher ist, da ja dieser letztere die subjective Vorstellung des ersteren ist. Wir müssten aber offenbar das innere Gesetz kennen, welches (wenigstens für einige Zeit — empiristisch gesprochen) die Entstehung der subjectiven Wahrnehmungswelt in diesem Falle bedingt, um zu entscheiden, ob bei der Voraussetzung der Unendlichkeit des objectiven Raumes das innere Raumbild endlich oder unendlich sein müsste, es müsste also das qualitative Weltproblem aufgelöst werden, um das quantitative in Bezug auf den Raum aufzulösen. Wir werden später in der That sehen, dass das innere Gesetz der Entstehung der Wahrnehmungswelt in diesem Falle so beschaffen sein müsste, dass im Falle der Unendlichkeit des objectiven Raumes auch der subjective unendlich sein müsste, wir können uns aber hier dieser Argumentation durchaus nicht bedienen, weil ja damit die logische Ordnung unserer Untersuchungen gestört sein würde. Es bleibt also auf dem rein empiristischen Standpunkte völlig unentschieden, ob bei der Endlichkeit der subjectiven Raumvorstellung der objective Raum endlich oder unendlich ist geradeso wie es auf dem empiristischen Standpunkte völlig unentschieden bleibt, ob der Zeitverlauf endlich oder unendlich ist, weil ja auf diesem Standtpunkte der Zeitverlauf sammt dem Seienden in jedem Augenblicke absolut aufhören könnte, und mit dem Seienden auch die Ewigkeit und die Zeit. Empirisch können wir nie constatieren, ob die Zeitreihe in der Vergangenheit endlich oder unendlich ist, und wenn endlich, ob zuvor die zeitlose Ewigkeit bestanden, oder überhaupt nichts bestanden hat: zurückgehen können wir ja in die Vergangenheit nicht, und so bleibt die Unendlichkeit resp. Endlichkeit der Zeitreihe rückwärts ein absolutes Geheimniss, solange wir einfache logische Notwendigkeiten in der unmittelbaren Erfahrung nicht anerkennen.*)

*) Die Fruchtlosigkeit der reinen Empirie in Bezug auf die Frage von der Endlichkeit oder Unendlichkeit des objectiven Raumes offenbart sich noch auf eine eklatante Weise. Setzen wir nämlich voraus, wir könnten uns ohne Hinderniss durch den objectiven Raum überall hinbewegen, und fragen wir, ob wir nicht auf diese Weise den objectiven Raum durchmessen könnten: offenbar so weit wir auf unserem Wege durch das Universum auch kämen, der Vertreter der Endlichkeit des Weltraumes könnte uns immer sagen, dass wir noch reisen müssen, um das Weltende zu erreichen, und der Vertreter der Unendlichkeit des Weltraumes könnte diesem gegenüber ganz mit Recht behaupten, dass wir überhaupt nie ein Ende finden werden, weil der Raum eben endlos ist. Aber selbst vorausgesetzt, dass der Raum ein

Das Resultat dieser unserer Untersuchung über die Unendlichkeit des Raumes können wir nunmehr so zusammenfassen: auf dem logischen Standpunkte können wir aus der Endlichkeit der subjectiven Raumvorstellung mit absoluter Sicherheit auf die Endlichkeit des objectiven Raumes schliessen, weil ja das Wesen der Raumreihe darin besteht, endlich und unfortsetzbar zu sein; auf dem rein empiristischen Standpunkte könnten wir aus der Endlichkeit der subjectiven Raumvorstellung weder auf die Endlichkeit noch auf die Unendlichkeit des objectiven Raumes schliessen, selbst wenn wir anerkennen würden dass jene subjective Vorstellung in's Unbestimmte fortsetzbar wäre. Wäre nämlich, wie schon ausgeführt, die Fortsetzbarkeit der subjectiven Raumvorstellung eine logische Notwendigkeit, dann müsste der objective Raum actuell unendlich sein, bestehen aber keine logische Notwendigkeiten in der unmittelbaren Erfahrung, dann ist auch diese Fortsetzbarkeit keine logische Notwendigkeit mehr. Und nun müssen wir noch hinzufügen dass diese Fortsetzbarkeit in's Unendliche der subjectiven Raumvorstellung ausser aus den früher angegebenen Gründen auch deshalb nicht als solche anerkannt werden kann, weil ja erfahrungsgemäss diese Raumvor-

Ende hat und dass wir dieses Ende wirklich einmal erreichen — was durchaus notwendig ist wenn der Raum endlich ist — so könnten wir dies doch nicht constatieren, weil in demselben Augenblicke in dem wir dies constatieren wollten wir überhaupt aufhörten zu sein. Wie wir nämlich das Aufhören des Zeitverlaufs in unserem unmittelbaren Bewusstsein nicht constatieren könnten, weil in demselben Augenblicke in dem dieser Zeitverlauf (Zeitverlauf im allgemeinen Sinne) aufhörte auch wir zu sein aufhörten — es ist ja bekannt, dass wir den Augenblick des Einschlafens nicht constatieren können — ebenso können wir das Ende des Weltraumes nicht constatieren, denn in dem Augenblicke, in dem wir dies vornehmen wollten, würden wir zu sein aufhören, weil ja der reale Stoff selbst aus dem wir bestehen an dem Ende der Welt aufhört. Ebenso könnten wir durch Telescope nie constatieren, ob der Weltraum endlich oder unendlich sei: denn mögen unsere Telescope noch so vollkommen sein, und mögen wir die Leere des unser Sternsystem (der Milchstrasse) umgebenden Raumes noch so sehr constatieren, der Vertreter der Unendlichkeit des Weltraumes könnte uns immer noch einwerfen, dass vollkommenere Telescope weitere Sternsysteme constatieren würden, und der Vertreter der Endlichkeit könnte sich sogar ganz wohl dieser Meinung des Unendlichkeitsvertreters anschliessen, mit der einfachen Bemerkung, dass das Universum eben noch viel grösser sein könnte, als es uns bekannt ist. Wie man also sieht, ist die Endlichkeit resp. Unendlichkeit der Raum- und der Zeitreihe auf rein empirischem Wege nie zu constatieren. Die grobe Empirie kann anscheinend als Grundlage unserer Erkenntniss der einzelnen Wirklichkeit dienen, sobald wir aber auf höchste Probleme kommen, versagt sie vollständig, und zwar einfach deshalb weil die höchsten Probleme eben die letzten Weltthatsachen betreffen, und man notgedrungen in der Erfahrung letzte unveränderliche Thatsachen anerkennen muss, sobald man sich ernstlich auf diese letzten Probleme heranwagen will (vgl. darüber ausführlich die Einleitung).

stellung nicht in's Unbestimmte fortsetzbar ist. Dies wäre nur dann der Fall, wenn unsere subjective Raumvorstellung in der Phantasie sich toto genere von der durch die Wahrnehmung gegebenen subjectiven Vorstellung unterschiede — es ist ja bekannt dass diese letztere nicht willkürlich fortgesetzt werden kann, dass sie durch längere Zeit hindurch und völlig unabhängigig von unserem Willen constant bleibt — denn in dem Falle wäre unsere Phantasie völlig unserer Willkür preisgegeben und in dem Falle könnte thatsächlich jene Fortsetzung in's Unbestimmte stattfinden. Auf unserem Standpunkte der absoluten Realität der unmittelbaren Erfahrung aber kann die Phantasie kein besonderes Seelenvermögen sein, sondern die Bilder derselben sind die realen Empfindungen selbst nur von einer geringeren Intensität. (vgl. darüber Principien der Erkenntnisslehre, Kap. V.) Wenn dem nun so ist, dann ist jene Fortsetzbarkeit in's Unbestimmte der subjectiven Raumanschauung auch als Thatsache eine Täuschung: wir können in der unbestimmten Zeitreihe nicht unsere subjective Raumanschauung ebenso in's Unbestimmte fortsetzen, sondern immer wenn wir dies vornehmen können wir es nur bis zu einer gewissen Grenze thun, wo unsere Phantasie erlahmt, und der Fortsetzung der Zeitreihe keine Verlängerung der Raumreihe mehr entspricht, sondern einfach die Wiederholung der Hinzufügung eines und desselben Raumtheils zu der schon gegebenen Raumvorstellung. Wenn unsere Raumvorstellung in der Wahrnehmung immer endlich ist, so muss auch die Phantasievorstellung des Raumes endlich sein, und der Unterschied zwischen beiden liegt nur darin, dass diese letztere unserer Willkür mehr und jene weniger oder fast gar nicht unterworfen ist, jedenfalls aber hat die Grösse jener ersteren ebenso eine obere Grenze, wie es ja mit dieser letzteren augenscheinlich immer der Fall ist. So also ist jene Fortsetzbarkeit der subjectiven Raumvorstellung auch als psychologische Thatsache gar nicht so beschaffen wie man sie gewöhnlich darstellt: wenn diese Verlängerung notwendigerweise in der Zeit ein Ende hat, dann hört schon dadurch jede Berechtigung auf, auf Grund derselben auf die Unendlichkeit des objectiven Raumes zu schliessen.

Wenn nun so der Raum nach oben unzweifelhaft endlich ist, so fragt es sich, ob derselbe auch nach unten endlich ist. Für die Zeit ist es absolut gewiss, dass dieselbe nach oben auch dann endlich ist, wenn sie nach unten unendlich sein sollte: wir haben ja besonders nachweisen müssen, dass sie nach unten endlich ist. Wie wir nun aus der unbestimmten Endlichkeit der Zeit nach oben auf die bestimmte Endlichkeit des Raumes nach oben geschlossen

haben, müssen wir nun ebenfalls versuchen, aus der Endlichkeit der Zeit nach unten auf die Endlichkeit des Raumes nach unten zu schliessen. Nun könnte man zunächst meinen, dass wie aus der unbestimmten Endlichkeit der Zeit nach oben die bestimmte Endlichkeit des Raumes nach oben folgt, dass ebenso aus der bestimmten Endlichkeit der Zeit nach unten die unbestimmte Endlichkeit des Raumes nach unten folgt. Da aber von der unbestimmten Endlichkeit bei dem Raume nicht die Rede sein könnte, sondern nur von der actuellen Unendlichkeit (denn sonst müsste man voraussetzen dass der Raum nach unten diejenige Eigenschaft hat die nur die Zeit nach oben hat und haben kann, was absurd ist), so dass derselbe nach unten actuell unendlich wäre. Wäre dem nun so, dann hätten wir als Gegensatz zu der bestimmten Endlichkeit das actuell Unendliche gesetzt, die doch keine Gegensätze sind. Wenn nun, der Raum nach unten im Gegensatze zu der Endlichkeit der Zeit nach unten weder actuell noch potentiell unendlich sein kann, dann kann er nach unten eben nur endlich sein und unterscheidet sich in dieser Hinsicht gar nicht von der Zeit. Wie ist dies aber möglich? In Wahrheit sehr einfach. Als wir die unbestimmte Endlichkeit der Zeit nach oben mit der bestimmten Endlichkeit des Raumes nach oben verglichen (resp. aus der ersteren auf die letztere schlossen) haben wir dabei ausser Acht gelassen, ob jene Endlichkeit der Zeit nach unten endlich oder unendlich ist (nach unten müsste die Zeit, wie wir gesehen haben, wenn sie nicht endlich wäre, actuell unendlich sein), und doch, wenn das Specifische und Unterscheidende der Zeit und des Raumes in ihrer Endlichkeit nach oben gesucht und gefunden wird, ist es wohl selbstverständlich, dass sich beide nach unten gar nicht voneinander unterscheiden können, dass nach unten beide in gleichem Sinne endlich resp. unendlich sein müssen. Entweder also sind Raum und Zeit beide nach unten endlich oder beide actuell unendlich, tertium non datur; da nun die Zeit nach unten unzweifelhaft endlich ist, so muss auch der Raum nach unten endlich sein. Sind sie beide nach unten endlich, dann besteht ihr specifischer Unterschied nur in ihrer Endlichkeit nach oben, d. h. darin, dass bei der Zeit die Anzahl ihrer letzten endlichen Theile unbestimmt während die Anzahl der letzten Raumtheile bestimmt endlich ist.

Wir haben bisher auf die Endlichkeit des Raumes nach oben und unten indirekt d. h. aus dem Vergleich der Raumreihe mit der Zeitreihe geschlossen, während wir bei der Zeit ihre Endlichkeit sowohl nach oben wie nach unten direkt aus ihr selbst

deducierten*). Nun müssen wir versuchen auch bei dem Raume den direkten Weg einzuschlagen, wir müssen versuchen, aus dem Wesen des Raumes selbst auf seine Endlichkeit nach oben und nach unten zu schliessen.

Dass die Zeit aus letzten einfachen untheilbaren Theilen besteht schlossen wir aus dem Nacheinandersein ihrer Theile, indem wir dadurch zunächst die absolute Untheilbarkeit des erfüllten Gegenwartsaugenblicks und dann auch die absolute Untheilbarkeit des unerfüllten Zeitaugenblicks, des Veränderungsactes, direkt und indirekt feststellten. Die Untheilbarkeit des erfüllten Zeitaugenblicks ist sowohl logisch notwendig als auch in der Erfahrung selbst unmittelbar gegeben d. h. wir erkennen die Thatsache der Untheilbarkeit des eben gegenwärtigen Zeitaugenblicks als eine einfache letzte Erfahrungsthatsache d. h. als logische Notwendigkeit an. Ebenso erkennen wir die Untheilbarkeit des unerfüllten Zwischenaugenblicks der Veränderung als eine letzte logische Notwendigkeit an, und so wird das Bestehen der Zeit aus einer endlichen Anzahl von letzten untheilbaren Theilen zu einer logischen Notwendigkeit. Wir werden nunmehr ebenso versuchen, für den Raum zunächst die empirische Notwendigkeit seiner Zusammengesetztheit aus einfachen untheilbaren Punkten festzustellen. So leicht nun der diesbezügliche Versuch bei der Zeit auch ist, so undurchführbar ist er bei dem Raume. Wir konnten die empirische Notwendigkeit der Endlichkeit unserer Raumvorstellung trotz aller ihrer scheinbaren Fortsetzung in's Unendliche leicht constatieren, wir konnten die empirische Notwendigkeit der Endlichkeit nach unten der Zeit ebenso feststellen, wir können aber nicht die empirische Notwendigkeit der letzten einfachen Raumtheile feststellen. Wir können zwar die scheinbare Theilbarkeit eines Raumtheils in's Unbestimmte, die in unserer Phantasievorstellung besteht, sehr leicht aus dem inneren Wesen des Raumes selbst als eine rein illusorische erkennen, da ja der Raum als solcher unveränderlich ist, und jene Theilung in's Unendliche etwas in der Zeit vorgehendes ist, wir können aber dabei nicht die untere Grenze feststellen, die unsere theilende Thätigkeit zum Stillstand bringt. Während nach oben unsere Raumvorstellung, möge man sie fortsetzen wie viel man will,

*) Zwar streng genommen haben wir auf die Endlichkeit der Zeit nach unten nur so schliessen können, dass wir dieselbe als direkten Gegensatz des Raumes auffassten (indem wir das Nebeneinandersein aus dem Nacheinandersein völlig ausschlossen), wir haben aber dabei auf die Endlichkeit resp. Endlosigkeit des Raumes gar nicht reflectiert, sondern nur auf sein Nebeneinandersein, so dass schliesslich auf die Endlichkeit der Zeit nach unten (und auch nach oben) direkt aus ihr selbst geschlossen wurde.

schliesslich zu einem *Maximum* gelangt, welches nicht mehr überschritten werden kann, kommen wir wohl auch bei der Theilung resp. Verminderung eines Raumtheils jedesmal zu einer unteren Grenze, aber wir erkennen zugleich, dass diese untere Grenze nicht etwas absolut untheilbares und einfaches ist, sondern dass dieselbe noch weiter getheilt werden könnte, wenn nur die speciellen psychologischen Bedingungen unserer appercipierenden theilenden Thätigkeit dies nicht verhinderten. Dieses untere *Minimum* kann zu einer Zeit grösser und zu der anderen kleiner sein, wir gelangen aber bei unserer Raumanschauung nie zu einfachen völlig und absolut untheilbaren Theilen, und dies ist sehr wichtig festzustellen, weil es Endlichkeitsphilosophen gab (Berkeley und Humè) die dies *minimum sensibile* für eine unmittelbare Erfahrungsthatsache erklärten. Mag man einen noch so kleinen Theil unserer ausgedehnten Raumwahrnehmung betrachten, er wird immer als eine extensive Grösse wahrgenommen, zwar gelangen wir bald auf die Grenze unserer theilenden Thätigkeit desselben, aber wir können diese Grenze nie so weit überschreiten, dass wir den vorausgesetzten letzten einf chen Raumtheil von den ihn umgebenden Theilen isolieren, und *deshalb ist der einfache reale Raumpunkt nie als solcher wahrnehmbar.* Ich kann mit absoluter Gewissheit behaupten, dass es *zehn tausend* solcher einfachen absoluten untheilbaren Raumpunkte in einer *wahrgenommenen* Strecke von einem Millimeter *nicht* giebt, ich kann ebenso mit absoluter Sicherheit behaupten, dass es deren mehr als *zehn* giebt, aber ich kann nie die genaue Anzahl derselben angeben, weil ich diese Punkte in meiner Wahrnehmung nicht zu isolieren vermag, weil ich den einzelnen Raumpunkt als solchen nicht wahrnehme.

Während ich nun in Bezug auf die Endlichkeit des Raumes nach oben aus der absoluten Unveränderlichkeit seiner Natur und der jeweilig immer endlich grossen Vorstellung desselben mit absoluter Sicherheit schliessen darf, dass er nach oben endlich ist, darf ich dies in Bezug auf seine Endlickeit nach unten nicht thun. Obgleich meiner theilenden Thätigkeit nach unten auch eine Grenze gesetzt ist, so gelange ich doch in meiner Wahrnehmung nicht ebenso zu einem jeweilig letzten weiter nicht zu verkleinernden endlichen Raume, wie ich in meiner Wahrnehmung in jedem Augenblicke zu einem endlichen nicht weiter zu vergrössernden Raume gelange (der feine Unterschied, der in beiden Fällen liegt, muss deutlich bemerkt werden, wenn man die Schlussfolgerung verstehen will: in einem und demselben Augenblicke gelangt meine Wahrnehmung nach oben zu einem endlichen abgeschlossenen Raume, während sie nach unten

wohl auch zu einem letzten wahrnehmbaren endlichen Minimum gelangt, aber zugleich fühlt, dass dieses Minimum als solches nicht theillos ist) so dass ich aus der Unveränderlichkeit der Raumreihe wohl auf die Endlichkeit des Raumes nach oben aber nicht auf diejenige nach unten schliessen kann, weil ja möglicherweise jene Theilung des Raumes an sich überhaupt keine Grenze hat und es keinen letzten absolut untheilbaren Raumtheil giebt. Aber so möglich dies Letztere zunächst auch ist, ich darf wiederum gar nicht schliessen, dass dem so auch in der That ist, denn möglicherweise bestehen doch letzte untheilbare Raumtheile, nur vermag ich sie in meiner Wahrnehmung nie zu isolieren. Und es ist in der That ganz natürlich warum uns unsere unmittelbare Erfahrung in Bezug auf die Endlichkeit oder Unendlichkeit des Raumes nach unten vollkommen im Stich lässt: die letzten Raumtheile, wenn sie bestehen, müssen so unmittelbar nebeneinander gegeben sein, dass keine Lücke zwischen denselben besteht, und demnach kann der eine Theil nur zusammen mit den anderen und keiner isoliert von den anderen wahrgenommen werden; die Gesammtheit aller dieser Theile aber, der jeweilige endliche Raum, ist als Ganzes gegeben, bildet also eine selbstständige Wahrnehmung für sich, und wird als solcher wahrgenommen. Dass es in unserer Raumwahrnehmung keinen letzten einfachen Raumtheil giebt, beweist nichts gegen das Bestehen desselben, dies wäre nur dann der Fall, wenn die Verlängerung des Raumes in's Unbestimmte eine logische Notwendigkeit wäre, was sie wegen seiner Unveränderlichkeit ebensowenig sein kann wie die Vergrösserung desselben in's Unbestimmte keine solche ist.

Das Bestehen der letzten einfachen Raumtheile lässt sich also als direkte empirische Notwendigkeit nicht feststellen, und wir müssen einen indirekten logischen Umweg machen, um diese These zu einer absolut notwendigen zu erheben. Wir müssen nämlich die entgegengesetzte Voraussetzung der unendlichen Theilbarkeit des Raumes widerlegen, indem wir in dem Begriffe des actuell Unendlichen selbst Widersprüche nachweisen: und zwar müssen es solche Widersprüche sein, dass sie diesen Begriff definitiv zu einem völlig unmöglichen machen. Durch diesen Nachweis der widerspruchvollen Natur des Unendlichen werden zugleich alle unsere bisherigen Argumentationen für die Endlichkeit nach oben sowohl des Raumes als der Zeit (und auch diejenigen für die Endlichkeit der Zeit nach unten) wesentlich verstärkt werden. Denn sobald man das actuell Unendliche nur an einer Stelle des Raumes und der Zeit zulassen würde, wäre kein logischer Grund da, dasselbe nicht überall zuzu

lassen; und umgekehrt, wenn wir unabhängig von der Kritik des Unendlichkeitsbegriffs bisher die Endlichkeit sowohl des Raumes als der Zeit festgestellt haben, so zeigt das nur, dass das actuell Unendliche auch in Bezug auf die Theilung des Raumes nicht bestehen kann und dass überall nur das Endliche, sei es als bestimmt sei es als das unbestimmt Endliche, bestehen kann.

Nun, gegen den Begriff des actuell Unendlichen sind drei Gründe da, drei Grundwidersprüche, die ihn unmöglich machen: 1) Der Widerspruch der unendlichen Zahl; 2) der Widerspruch der absoluten Endlichkeit jedes Unendlichen; 3) der Widerspruch des Sprunges des Endlichen in das Unendliche. Ich lenke die Aufmerksamkeit des Lesers darauf, dass von diesen drei Gegengründen nur der erste bisher in den Discussionen des Unendlichen eine grosse Rolle gespielt, die beiden anderen aber, besonders der dritte, obwohl sie hie und da (und zwar mehr implicite als explicite) in jenen Discussionen auch vorkommen, doch hier zum ersten Male in ihrer wahren Bedeutung erkannt und benutzt worden sind. Ich bemerke zugleich dass ich dabei auch mein neues geometrisches Princip klar und deutlich begründen und vertheidigen werde.

Bevor wir nun zuerst den Widerspruch der unendlichen Zahl nachweisen, müssen wir zuvor die Idee der Zahl selbst betrachten. Die Zahl ist nichts anderes als die Summe von einfachen absolut untheilbaren Zahleinheiten: die Untheilbarkeit der arithmetischen Zahleinheit wird auch von denjenigen anerkannt, die sowohl im Gebiete des Raumes als in demjenigen der Zeit nur Unendliches und Theilbares anerkennen. Wahre und ächte Zahl ist nur die ganze aus einer bestimmten Anzahl von Einheiten bestehende Zahl: die gebrochene, die irrationale und die imaginäre Zahl haben in der reinen Arithmetik offenbar gar keinen Sinn, weil sie eine Theilbarkeit der reinen Einheit voraussetzen, die absolut unmöglich ist. Dass die arithmetische Zahleinheit notwendigerweise einfach und untheilbar sein muss, ist sehr leicht zu beweisen (Beweis Malezieu's citiert bei Hume, Treatise on hum. nat. I. Book p. II. sect. II.): setzen wir voraus, wir könnten die einfache Einheit z. B. in zwei Theile theilen, so bekämen wir also die gebrochene Zahl $^1/_2$. In diesem (ächten) Bruch ist der Nenner selbst offenbar eine Zahl und bedeutet die Summe von zwei Einheiten, die als solche eben untheilbar sind; denn setzt man auch sie in zwei Theile getheilt, so wird sich dasselbe wiederholen u. s. f. in infinitum, die reine Zahleinheit muss also wirklich absolut untheilbar sein. Wenn nun so die arithmetische Zahleinheit wirklich absolut einfach ist, so fragt es sich,

da sich die Idee derselben unserem Geiste mit so einer evidenten Klarheit darbietet, was sie wohl bedeutet: auf unserem Standpunkte des rationalisierten Empirismus muss sich jede Idee auf eine einfache Erfahrungsthatsache gründen, jeder elementare Begriff muss eine solche einfache Erfahrungsthatsache ausdrücken, wir erkennen die reinen von der Erfahrung völlig unabhängigen Ideen nicht an, für uns hat eine „rationale" Idee nur dann Sinn, wenn sie eine empirische notwendige Thatsache bedeutet. So muss also auch die einfache Zahleinheit irgendwo in der Erfahrung selbst ihren Ursprung haben, sonst wäre uns ja unerklärbar, wie sie sich uns mit so einer evidenten Klarheit aufdrängen kann.

Wenn wir uns nun nach den beiden Gebieten umsehen, wo dieselbe einzig und allein als Realität gegeben werden kann, so können wir sie offenbar in der Raumreihe gar nicht antreffen. Wie wir gesehen haben, ist in unserer Raumwahrnehmung resp. Vorstellung ein untheilbares minimum sensibile gar nicht gegeben, auch der kleinste Raumtheil stellt eine noch weiter theilbare Grösse dar. Die einzelnen discreten Raumtheile (körperliche Gegenstände) sind wohl als feste durch eine gewisse Zeit hindurch in ihren Theilen zusammenhängende vielheitliche Einheiten sehr geeignet, jener abstrakten Zahleinheit eine konkrete ganz anschauliche Grundlage der Anwendung zu geben, sie stellen aber nicht das reale völlig adequate Correlatum jener abstrakten Idee. Liegt die abstrakte Zahleinheit in der Raumreihe nicht, so muss sie in der Zeitreihe anzutreffen sein — sonst wäre sie keine logische (resp. empirische) Notwendigkeit und müsste für eine Selbsttäuschung unseres psychologischen Denkens erklärt werden — und thatsächlich finden wir sie da in dem einfachen absolut untheilbaren Gegenwartsaugenblicke. Der Gegenwartsaugenblick muss wohl mit einem realen Inhalte erfüllt werden, aber bei dem unmittelbaren Übergange desselben in die Vergangenheit fühlen wir, dass er absolut einfach und untheilbar ist, eben einen ausdehnungslosen einfachen Zeitpunkt darstellt, und hier liegt der Ursprung der abstrakten Zahleinheit. Ganz konkret und anschaulich wäre die einfache Zahleinheit nur dann, wenn wir den einfachen realen Raumpunkt als solchen wahrnehmen könnten; da wir dies aber nicht können, so hat die einfache Zahleinheit nicht die Konkretheit der Raumanschauung (resp. diejenige einer zusammengesetzten Einheit in dieser), aber sie hat die Konkretheit des einfachen Zeitaugenblicks, der ja selbst allerdings als einfache Einheit nicht so konkret ist wie der reale Rauminhalt, weil er eben nur vermittelst der unanschaulichen aber ganz und gar realen Vorstellung des Ver-

änderungsactes erst im Bewusstsein entsteht und zum Bewusstsein gebracht wird. Der konkrete Inhalt eines einfachen Gegenwartsaugenblickes, der eben gegebene räumliche Bewusstseinsinhalt, stellt eine durchaus zusammengesetzte Einheit dar und für unsere Wahrnehmung ist in demselben nirgends eine einfache konkrete Einheit anzutreffen; insofern sich dieser Inhalt auch in der Zeit befindet, d. h. insofern der Gegenwartsaugenblick seines Gegebenseins durch die Veränderung (die gewöhnlich nur einen Theil jenes Inhalts betrifft) in die Vergangenheit verschwindet, stellt derselbe in der Zeit eine durchaus einfache Einheit dar, die als solche absolut untheilbar ist. Die Thatsache der abstrakten Zahleinheit ist auf diese Weise erklärt: sie stellt den einen einfachen untheilbaren Gegenwartsaugenblick dar, oder besser gesagt, der einfache absolut untheilbare Gegenwartsaugenblick ist mit der von uns gedachten Zahleinheit absolut identisch.

Befindet sich nun so das Element der Zahl, die einfache untheilbare Zahleinheit durchaus nur in der Zeitreihe, so ist dies mit der Zahl selbst als der Summe dieser Einheiten durchaus nicht der Fall, man kann vielmehr behaupten, dass diese Idee, aber allerdings nur als bewusste Idee, ganz und gar dem Raume selbst angehört und ohne ihn absolut nicht im Bewusstsein entstehen könnte. Die Zeitreihe in ihrem Verlauf bietet uns, wie ich dies in der Erkenntnisslehre ausgeführt habe (vgl. Kap. III.) in der unmittelbaren Erfahrung immer nur den einen einfachen untheilbaren Gegenwartsaugenblick dar und nur noch den einfachen Übergang der Gegenwart in die Vergangenheit in dem einfachen Veränderungsacte. Da uns also in der reinen Zeit immer nur eine einzige einfache Zahleinheit gegeben ist, so kann der Begriff der Zahl als der Summe vieler solcher Einheiten aus der reinen Zeit nie und nimmer entstehen, und wir könnten zum Bewusstsein der vielen aufeinanderfolgenden Zeitaugenblicke in der reinen Zeit überhaupt nicht gelangen. Unbedingt müssen wir die Raumreihe zu Hilfe nehmen, wenn wir der vielen Zeitaugenblicke inne werden wollen, weil nur im Raume die Zahlsynthese vollzogen werden kann, weil nur da viele Zahleinheiten überhaupt gegeben sind. Im Raume sind zwar nur zusammengesetzte Einheiten gegeben, aber was dem Raume in Bezug auf diesen elementaren Bestandtheil der Zahl fehlt, das wird ihm vollkommen von der Zeit geliefert, die Zeit ermöglicht uns, jede räumliche zusammengesetzte Einheit als eine einfache Einheit, als Element des Zählens zu betrachten und ganz davon abzusehen, dass da eigentlich keine einfache Einheit gegeben ist. Diese Abstraktion von der Zusammengesetztheit einer

räumlichen Einheit könnte aber unser Denken durchaus nicht vollziehen, sie hätte keinen rationalen Werth, wenn der Act des Zählens, des Zahlbildens selbst nicht ein durchaus zeitlicher Act wäre. Und thatsächlich ist dem so. In dem reinen Raume, d. h. wenn von der Zeit gänzlich abstrahiert wird, können wir bekanntlich die Anzahl nur von höchstens drei Punkten angeben, d. h. unmittelbar und ohne Hilfe der Zeit können wir die Zahlsynthese nur bis drei vollziehen. Wenn wir nun eine grössere Anzahl von solchen räumlichen Einheiten vor uns haben, können wir diese Anzahl nur so angeben, dass wir das Zählen in der Zeit selbst vornehmen (und zwar kann dieses Zählen in der Zeit, entweder so geschehen, dass man jede räumliche Einheit in der Zeit besonders als eine Zahleinheit auffasst, oder dass man dieselben in Zahlgruppen von zwei oder drei zusammenfasst, so dass dann diese Zahlgruppen die einfachen räumlichen Einheiten darstellen). Da die gegebene räumliche Einheit keine untheilbare Einheit ist, so muss sie offenbar als solche aufgefasst werden, damit die Zahl entsteht, weil ja die Zahleinheit absolut einfach und untheilbar ist, es muss also jede räumliche Einheit in einem besonderen Zeitaugenblick als solche aufgefasst und fixiert werden, damit die Zahl entstehen kann. Stellt sich so das Element der Zahl durchaus als etwas zeitliches heraus, so ist die Zahlsynthese dagegen d. h. die eigentliche Zahlidee nur im Raum vollziehbar. Die gezählten Zahleinheiten müssen beständig bleiben, damit die eine der anderen hinzugefügt wird und so die eine Zahl als Summe der Zahleinheiten entstehen kann; dabei aber ist es gar nicht notwendig, dass bei jeder Hinzufügung einer neuen Einheit nunmehr ein besonderer Zeitaugenblick zukommen muss, in dem das Ganze noch einmal zusammengefasst wird, sondern bei jeder Hinzufügung der neuen Zahleinheit wird die Zahl der ganzen schon gezählten Zahlgruppe zugleich und in demselben Augenblicke als Ganzes aufgefasst. Wenn man behaupten würde, dass bei jeder Zahlsynthese ausser der Hinzufügung der neuen Einheit noch jene allgemeine Zusammenfassung aller gezählten Einheiten besonders geschehen müsse, so müsste man offenbar annehmen, dass man in einem und demselben Augenblicke *explicite* eine grössere Summe von Einheiten unmittelbar als Zahl erkennen kann (denn das bedeutet dann offenbar dieses totale Zusammenfassen), was jedoch gar nicht möglich ist. Es muss vielmehr angenommen werden, dass unser Ich unmittelbar das Resultat der schon gezählten Einheiten im Bewusstsein behält und diesem Resultat die neue Einheit zeitlich hinzufügt und so die neue Gesammtsynthese der Zahl vor sich hat: gerade die Thatsache, dass

wir wissen, dass wir die Anzahl einer grösseren Summe von Zahleinheiten *explicite* in einem und demselben Augenblicke *nicht* angeben können und doch in uns das Bewusstsein besteht dass wir genau die Anzahl einer solchen Summe kennen, ist der Grund der uns nöthigt, die Vielheit der aufeinanderfolgenden Zeitaugenblicke, die ja als solche gar nicht unmittelbar gegeben sind, vorauszusetzen — wie ich dies in der Erkenntnisslehre (Kap. III.) ausgeführt habe — ohne den Raum kann ich also die Zahlsynthese nicht ausführen, ohne die Zeit kann ich den Zahlbegriff auf räumliche Zahleinheiten nicht anwenden. Die Zahlidee stellt sich also als etwas was nur im Raume *und* in der Zeit *zugleich* zu existieren vermag: im Raume ist das Moment des Nebeneinanderseins gegeben, welches die unumgängliche Bedingung der Zusammenfassung der vielen Zahleinheiten in ein Ganzes bildet, in der Zeit liegt einerseits die unumgängliche Bedingung der elementaren Zahleinheit und andererseits die Bedingung des Angebens der Anzahl der räumlichen Einheiten, wenn dieselbe die Anzahl 3 überschreitet. Kurz gesagt also, gehört das Element der Zahl und der Act des Zählens (wenn mehr als drei zu zählende Einheiten da sind) durchaus der Zeit an, während die Zahlsynthese selbst durchaus dem Raume angehört

Es ist also gewiss dass die elementare Zahleinheit als solche nur in der Zeit besteht und bestehen kann, und dass die Zahleinheiten der Zeit allein und für sich völlig unfähig sind, die Zahlsynthesis selbst zu bilden, und zwar deshalb nicht weil, wenn die eine ist, die andere eben nicht ist, und nur da von einer Synthesis die Rede sein kann wo die (beiden) zu synthesierenden Glieder zugleich gegeben sind. Freilich wäre es völlig fehlerhaft, wenn wir daraus schliessen würden, dass die Zahl als solche überhaupt in der Zeitreihe nicht existiert. Das Nacheinandersein der einfachen Zahleinheiten der Zeit verhindert uns nur ihre Zahlsynthesis von selbst in unseren Gedanken vollziehen zu lassen, so dass wir durchaus zu der Raumreihe unsere Zuflucht nehmen müssen, um sie zu synthesieren, aber dass sie sich synthesieren, dass sie sich zusammenzählen lassen (freilich ist dies streng genommen nur bei den Zahleinheiten der lückenlos-discreten Zeitreihe möglich) ist unzweifelhaft, da sie Glieder einer und derselben Reihe sind. Wenn nun so das räumliche Nebeneinandersein die unumgängliche Voraussetzung der Zahl ist, so fragt es sich, ob vielleicht auch die elementare Zahleinheit selbst als solche nicht schliesslich ebenso nur ein räumliches Moment ist, ob die zeitliche Zahleinheit nicht schliesslich eine räumliche Zahleinheit als ihr Substratum voraussetzt. Denn wenn es klar ist, dass der reale Seinsinhalt der

Zeit, dass der reale Inhalt, der die einzelnen untheilbaren Zeitaugenblicke erfüllt, kein anderer ist als derjenige des Raumes selbst, wenn demnach der erfüllte Gegenwartsaugenblick der Zeit mit realem Inhalte des Raumes erfüllt ist, dann fragt es sich, was wohl noch die Untheilbarkeit dieses einfachen Gegenwartsaugenblickes bedeuten mag, wenn der ihn erfüllende Raum ins Unendliche theilbar ist und als solcher nirgends eine einfache Einheit in sich birgt? Wir kommen hiermit zu einer sehr ernsten und schwierigen Frage, wir kommen auf das letzte Verhältniss des Raumes zu der Zeit. Leider können wir diese Frage hier nicht beantworten, letzte Verhältnisse der Seinsbestimmungen haben wir uns für den dritten Abschnitt der Ontologie reserviert, hier müssen wir nur so viel bemerken, dass, so unzweifelhaft es auch ist, dass der absolut einfache untheilbare erfüllte Gegenwartsaugenblick (resp. die kleinste zeitlose Strecke) existiert, so ist doch, wenn der Inhalt, der ihn erfüllt, keine letzte einfache Einheit enthält, jene zeitliche Einheit eine rein formal-abstrackte. Eine tiefere Untersuchung würde uns zeigen, dass die Einfachkeit der zeitlichen Einheit durchaus die Einfachkeit der sie erfüllenden räumlichen Einheiten voraussetzt, und indem wir uns hier nur mit dem Hinweis auf das Resultat dieser erst in dem dritten Abschnitte der Ontologie vorzunehmenden Untersuchung begnügen, wollen wir nunmehr auf einem anderen Wege beweisen, dass die räumliche Einheit ganz so wie die zeitliche absolut einfach und untheilbar ist. Nun sind wir hiermit auf unser eigenes Thema angelangt, auf den Widerspruch der unendlichen Zahl. Ob der Raum aus einer endlichen oder aus einer unendlichen Anzahl von einfachen absolut untheilbaren Theilen besteht, oder ob er ins absolut unbestimmte Unendliche theilbar ist, das ist die Frage, die wir zunächst auf Grund der Zahlidee selbst auflösen wollen.

Diese Idee wollen wir nun zunächst rein abstrackt betrachten, als ob wir sie in ihre letzten psychologischen Bestandtheile nicht schon zerlegt hätten, d. h. wir wollen die Consequenzen dieser Idee darlegen indem wir sie ganz abstrakt als eine einfache rationale Idee betrachten. So betrachtet stellt die Zahlidee das Gemeinsame aller möglichen Zahlreihen dar, sie stellt also das Gemeinsame und das Logisch-Notwendige sowohl der Raum- als der Zeitreihe dar, insofern diese beiden als aus einfachen Einheiten bestehend und discret gefasst werden. Das Wesen der Zahl besteht nun darin, dass jede einzelne Zahl eine Synthese von einfachen Zahleinheiten darstellt und dass sich zu jeder solchen Synthese eine grössere und umfassendere denken lässt, indem zu jeder einzelnen Zahl eine neue

Zahleinheit hinzugefügt werden kann. Da nun offenbar bei jeder neuen Zahlsynthese die schon zusammengefassten Einheiten als solche, obgleich sie nicht mehr selbstständig sondern zu einem Ganzen vereinigt existieren, erhalten bleiben, so muss die Zahlreihe, da sich kein Ende jener Hinzufügung von neuen Einheiten denken lässt, actuell unendlich sein. Die Zeitreihe ist, das wird niemand läugnen, wenigstens in der Richtung der Zukunft unbestimmt endlich, wir brauchen uns diese endliche Reihe im Unendlichen nur deshalb nicht als vollendet zu denken, weil die Theile der Zeit nacheinander sind, weil wenn der eine Theil ist der andere nicht mehr ist, und deshalb jene völlig unbestimmte Endlichkeit gar nicht vollendet zu werden braucht. Dagegen können wir uns die Zahlreihe gar nicht als unbestimmt endlich denken, weil in jeder Zahl die gezählten Einheiten da sind, wenn es also durchaus notwendig ist, dass zu jeder gegebenen Zahl eine Einheit hinzugefügt werden kann (wie es durchaus notwendig ist, dass zu jeder gegebenen Zeitstrecke ein neuer Zeittheil hinzugefügt werden kann) dann ist es durchaus notwendig, dass alle diese Hinzufügungen von Einheiten auch wirklich vollzogen werden (was bei der Zeit aus dem angegebenen Grunde nicht der Fall ist) dann ist es also absolut notwendig, dass die Zahlenreihe als im Unendlichen vollendet gedacht werde, dass also die unendliche Zahl von einfachen Zahleinheiten existiert, oder, wie man sich auszudrücken pflegt, dass die Zahlenreihe der natürlichen Zahlen (als ob andere logisch möglich und denkbar wären) 1, 2, 3, 4. . . . . im Unendlichen vollendet d. h. bestimmt unendlich ist. Wie man also sieht, ist die Zahlenreihe dieser ihrer notwendigen Vollendbarkeit nach der Raumreihe ähnlich, der einzige Unterschied zwischen beiden liegt darin, dass die Raumreihe im Endlichen und die Zahlreihe im Unendlichen vollendet ist.

Wenn nun so die Zahlreihe die vollendete Unendlichkeit notwendigerweise in sich schliesst, so scheint sie auf die Raum- und die Zeitreihe angewandt diese selbst ganz ebenso vollendet unendlich zu machen wie sie es selbst ist. Während wir auf die Unendlichkeit der Zeit nach oben in der Richtung der Vergangenheit*) auf Grund der Eigenschaften der Zeitreihe selbst gar nicht schliessen

*) Auf die Richtung der Zukunft lässt sich offenbar die Zahlreihe nicht anwenden, denn das hiesse dass die ewig zukünftige Zukunft einmal mit zeitlichen Momenten erfüllt werden könne, was offenbar unmöglich ist. Aber auch wenn man per impossibile voraussetzen würde dass dies geschehen könne, nur mit der Bemerkung, dass dadurch gar nicht die ewige Zukunft actu vollendet zu sein braucht, weil sie dann eben als die absolut unbestimmte Unendlichkeit zu denken wäre (vgl. die Anmerkung zur Seite 149), so müsste doch diese absolut unbestimmte Unendlichkeit der Zukunft

konnten, uns sich vielmehr auf Grund dieser Eigenschaften ganz das Gegentheil ergab, und ebenso während wir auf die Unendlichkeit des Raumes nach oben ebenfalls nicht aus den Eigenschaften desselben schliessen konnten, scheint uns in beiden Hinsichten nunmehr die Zahlreihe das Gesuchte zu leisten. Und thatsächlich, der Beweis für die Unendlichkeit des Raumes (und theilweise auch der Zeit — hier übrigens springt gleich ein grosser Widerspruch dieser Anwendung in die Augen, vgl. die Anmerkung gleich oben) aus der Zahlenreihe ist, kann man sagen, der einzige Beweis von Seiten der Unendlichkeitsvertreter, der ernst zu nehmen ist. Die Zahl der einfachen Raum- und die Zahl der einfachen Zeitpunkte muss eine unendliche sein ganz einfach deshalb, weil sich eine endliche Anzahl von solchen nicht denken lasse, weil sich eine letzte endliche Zahl nicht denken lasse, weil die Zahl notwendigerweise unendlich sein müsse. Wir sagten, dass dieser Beweis sich auf die Anzahl von einfachen Raum- und Zeitpunkten bezieht. So muss in der That der Beweis lauten, wenn er consequent logisch aufgestellt werden soll, da die Zahlreihe die einfache untheilbare Zahleinheit notwendigerweise voraussetzt und ihr im Raume der einfache Raum- und in der Zeit der einfache Zeitpunkt entspricht (wenn Raum und Zeit als blosse Verhältnisse im Seienden aufgefasst werden, dann bedeutet der einfache Raumpunkt den einfachen realen Raumpunkt, der Zeitpunkt den einfachen realen erfüllten Gegenwartsaugenblick; wenn Raum und Zeit als leere Wesenheiten im Seienden aufgefasst werden, dann ist sowohl der einfache Raum- als der einfache Zeitpunkt unerfüllt — über diese Voraussetzung des lückenlos-discreten leeren Raumes und der lückenlos-discreten leeren Zeit wird weiter unten die Rede sein); so lautet er aber gewöhnlich nicht, man versteht unter der Zahleinheit nicht eine einfache Einheit des Raumes und der Zeit, sondern man meint, dass sich auch mit lauter zusammengesetzten Einheiten des Raumes und der Zeit dieser Beweis verträgt. Diese zweite Form der Beweisführung wird uns unten noch besonders beschäftigen, jetzt interessiert uns jener Beweis in dem was Hauptsache bei ihm ist, d. h. in der Behauptung, dass die Anzahl der Zahleinheiten (ganz abgesehen davon ob dieselbe als einfach oder als zusammengesetzt zu

ganz ebenso auf Grund der vollendbaren Unendlichkeit der Zahlreihe (diese müsste ja ganz ebenso in diesem Falle als absolut unbestimmte Unendlichkeit gedacht werden, da ja aus ihr eben jene unbestimmte Unendlichkeit der Zukunft folgen soll) einmal absolut vollendet werden, w e n n die Vergangenheit auf Grund dieser Zahlreihe vollendet worden ist. Und das ist der grosse Widerspruch, der sogleich entsteht, sobald man auf die Unendlichkeit der Zeitreihe nach oben auf Grund der Unendlichkeit der Zahlenreihe schliessen will.

denken sind) notwendigerweise unendlich sein müsse. Dieser Beweis enthält nun einen wesentlichen Widerspruch, den Widerspruch der unendlichen Zahl. So gewiss es anscheinend ist, dass die Zahlreihe endlos ist und dass man kein letztes Glied derselben setzen kann, so gewiss ist es andererseits, dass jedes Glied in derselben ein endliches ist, weil jedes durch die unmittelbare Synthesis der Einheit mit der früheren Zahl entsteht, und zwar so entsteht, dass wir in dieser Reihe, wenn wir sie nach rückwärts verfolgen, unzweifelhaft auf ein letztes Glied, die einfache Einheit kommen. Jedes Glied der Zahlreihe muss so, wenn man seine Entstehungsweise in Betracht zieht (und die muss man in Betracht ziehen, weil ja jede Zahl nichts anderes ist als die Synthese von vielen Einheiten), für endlich erklärt werden, und doch scheint es andererseits absolut sicher zu sein, dass kein letztes endliches Glied in derselben existieren kann, dass das letzte Glied in derselben notwendigerweise unendlich sein müsse. Und das ist der Widerspruch der unendlichen Zahl. Die notwendige Fortsetzbarkeit der Zahlenreihe in's Unbestimmte (die die Zahlreihe mit der Zeitreihe gemeinsam hat) erlaubt kein letztes endliches Glied in derselben, fordert notwendigerweise ein unendliches Glied, mit dem diese unbestimmte Reihe von endlichen Gliedern vollendet wird, und doch muss dann diese Zahl selbst eine endliche sein. Dies kann man noch einfacher ausdrücken. In der natürlichen Zahlreihe kann die Zahl der Glieder keine endliche sein, diese Zahl muss eine unendliche sein, da aber die Zahl der aufeinanderfolgenden Glieder in dieser Reihe durch die e als letzte angenommene Zahl ausgedrückt ist, so müsste auch die unendliche Zahl der endlichen Glieder durch die letzte endliche Zahl ausgedrückt werden, was nicht weniger und nicht mehr bedeutet als dass die vorausgesetzte unendliche Zahl selbst endlich ist. Um den Widerspruch der unendlichen Zahl einzusehen und ihn nicht aus dem Gesicht entschlüpfen zu lassen, muss man sich immer gegenwärtig halten, dass die unendliche Zahl das letzte Glied der Reihe der endlichen Zahlen selbst sein müsse, dass sie die Vollendung der endlosen Zahlreihe endlicher Zahlen bedeutet, und sobald man sich dies gegenwärtig hält, springt jener Widerspruch so klar und deutlich in die Augen, dass man keinen Zweifel mehr an seiner traurigen Gegenwart hegen kann.

Der Widerspruch der unendlichen Zahl stellt also wahrlich die innere Antinomie der Zahlenreihe dar. Denn einerseits fordert die Zahlenreihe mit Notwendigkeit ihre eigene Vollendung und andererseits kann diese Vollendung bei keinem endlichen Gliede zu Stande kommen und doch müsste sie schliesslich bei einem solchen zu

Stande kommen -- und diese innere Antinomie im Wesen der Zahlreihe drückt eben der Widerspruch der unendlichen Zahl aus. Kurz gesagt, jedes Glied der Zahlenreihe ist endlich und sie selbst unendlich und das ist — widersprechend und unmöglich.

Woher diese innere Antinomie in dem Begriffe der Zahlenreihe? Wenn die Zahlenreihe eine letzte einfache logische Notwendigkeit darstellte, so könnte dieselbe nicht einen solchen inneren Widerspruch in sich enthalten, sie müsste widerspruchslos sein. Offenbar kann demnach diese abstrakte Idee der unbegrenzten Zahlenreihe keine letzte logische Notwendigkeit darstellen, sie muss offenbar aus einer Vermischung einfacher logischer Notwendigkeiten, die nicht miteinander in Eins zusammengebracht werden können, hervorgehen. Und thatsächlich ist dem so. Unsere obige psychologische Analyse des Zahlbegriffs belehrt uns darüber in unzweideutigster Art und Weise. Wir haben gesehen, dass wir zum Begriffe der Zahl nur durch eine Combination der Raum- mit der Zeitreihe gelangen, dass ohne die Zeit der Process des Zählens, die Hinzufügung der Zahleinheiten, ohne den Raum das Resultat des Zählens, die Zahlsynthese oder die Zahl nicht möglich wäre, und sobald wir uns diesen psychologischen Ursprung des Zahlbegriffs vor Augen haben, wird uns der Widerspruch der unendlichen Zahl, der aus dem abstrakten Zahlbegriff folgt, von selbst verständlich. In der Endlosigkeit der Zahlenreihe spiegelt sich die eine Voraussetzung des Zahlbegriffs, die Zeitreihe, die ja als solche endlos ist, wieder: wenn wir meinen, dass ein Ende der Zahlreihe eine contradictio in adjecto zu sein scheint, bedenken wir nicht, dass dies in Wahrheit nichts anderes bedeutet, als dass das Zählen in der Zeit geschieht und dass, wie in der Zeit kein letztes Glied zu denken ist, d. h. kein absolutes Ende der Zeit, dass ebenso in der Zahlreihe kein letztes endliches Glied zu denken ist. In der notwendigen Vollendbarkeit der Zahlreihe spiegelt sich die andere Voraussetzung des Zahlbegriffs, die simultane Raumreihe, wieder, die als solche unfortsetzbar ist, deren Glieder alle notwendigerweise zugleich gegeben sind: wenn wir meinen, dass die endlichen Glieder der Zahlreihe notwendigerweise alle gegeben werden müssen, dass die endlose Reihe der endlichen Zahlen in einem letzten unendlichen Gliede notwendigerweise ihre Vollendung finden müsse, so bemerken wir nicht, dass dies in Wahrheit nichts anderes bedeutet, als dass die Zahlsynthese notwendigerweise im Raume geschehen müsse, dass die gezählten Einheiten ganz ebenso alle als in der sie zusammenfassenden Zahl zugleich gegeben gedacht werden müssen, wie die gezählten Raumeinheiten zugleich gegeben sind. Be-

merken wir aber dies beides, dann wird uns die innere Antinomie der Zahlreihe etwas selbstverständliches. Die Zahlreihe, so wie sie von uns gedacht wird, umfasst in sich zwei entgegengesetzte Elemente, die wohl etwas Gemeinsames haben, die aber als Gegensätze doch nicht ihr Gegensätzliches gleichsam preisgeben und sich gänzlich mit dem in ihnen Gemeinsamen identificieren können. Die Zeit- und die Raumreihe haben das Gemeinsame in sich, dass die Anzahl ihrer einfachen Theile immer eine endliche ist, während aber diese Endlichkeit bei der Raumreihe eine bestimmte ist, ist sie bei der Zeitreihe völlig unbestimmt.' Die Zahlreihe soll nun beide entgegengesetzten Bestimmungen in sich enthalten und einerseits völlig endlos und andererseits völlig bestimmt sein, und deshalb ist es kein Wunder, dass, sobald man ernstlich versucht diese Forderung der abstrakten Zahlidee zu erfüllen, man auf jenen inneren Widerspruch der unendlichen Zahl kommen muss.

Die Zahlreihe als solche gehört wohl sowohl der Raum- als der Zeitreihe an, es können sowohl ·die simultan gegebenen (einfachen) Theile des Raumes wie die successiv gegebenen einfachen Theile der Zeit gezählt werden, aber dieselbe darf nicht als eine allgemeine von diesen ihren Specificationen verschiedene reine Idee aufgefasst werden, denn sobald man sie so fasst muss jener Widerspruch in ihr erscheinen. Denn in Wahrheit kann man sie nur scheinbar so fassen, man kann sie so nur solange fassen, solange man sich noch nicht bis zu dem unzweifelhaften erkenntnisstheoretischen Satze aufgeschwungen hat, dass alle unsere auch die abstraktesten Begriffe ihren Ursprung in der unmittelbaren Erfahrung des bewussten Subjectes haben (vgl. darüber Principien der Erkenntnisslehre, Kap. V. und die Einleitung). Sobald man dies gethan weiss man, dass jene unsere quasi allgemeine abstrakte rationale Idee der Zahlenreihe gar nicht besteht, dass man dieselbe mit einer recht zusammengesetzten Thatsache des Gedankens der Zahl verwechselt. Specielle psychologische Umstände erfordern mit Notwendigkeit, dass der Gedanke der Zahl nur durch das gleichzeitige Zusammenwirken der Raum- und der Zeitreihe zu Stande kommen kann, der naive Rationalismus kümmert sich nicht um diesen psychologischen Thatbestand, er glaubt, jeder Begriff, wenn er nur eine scheinbare und einleuchtende Notwendigkeit in sich birgt und mag diese von einer noch so zusammengesetzten Natur sein, stelle in Wahrheit eine letzte logische Notwendigkeit dar, er erklärt ihn für einen apriorischen Besitzstand des reinen Vernunftvermögens und operiert weiter mit ihm ohne sich um die Widersprüche, die aus ihm entspringen, zu kümmern. Wie wir schon mehrfach erklärt

haben, glauben wir weder an subjective abstrakte Ideen noch an ihre objectiven Correlata, die allgemeinen von den realen Dingen auf irgend eine Art und Weise (sei es in dem platonischen Sinne einer trancendenten Welt realer Ideenwesenheiten, sei es im Lotze'schen Sinne eines rein geltenden Ideenreichs) getrennten Ideen. So ist auch die allgemeine Zahlidee abgetrennt von ihren beiden möglichen Specificationen ein Ding der Unmöglichkeit, die allgemeine Zahlidee existiert nicht ausser ihren beiden Specificationen, sie stellt das Gemeinsame von beiden dar, aber dieses Gemeinsame ist mit dem Gegensätzlichen untrennbar verbunden. Die Zahlreihe ist notwendigerweise endlich, aber sie existiert als solche nicht ausserhalb der Raum- und der Zeitreihe, sie muss vielmehr als Raum- und als Zeitreihe existieren, so dass sie zugleich entweder endlich oder endlos ist, d. h. entweder bestimmt oder unbestimmt endlich. Damit ist kein Nominalismus in die Mathematik eingeführt: der Nominalismus verkennt, dass das Besondere nur als das Besondere eines Allgemeinen existieren kann, ganz ebenso wie der Realismus verkennt, dass das Allgemeine nicht ohne das Besondere existieren kann. Das Allgemeine des Besonderen besteht in nichts anderem als in dem Beziehungsbande, welches das Besondere verbindet. Darüber werden wir ausführlich im dritten Abschnitte der Ontologie handeln, hier genügt es an einem concreten Beispiele festzustellen, wie wir uns das Verhältniss von beiden zu denken haben. Die Raum- und die Zeitreihe sind beide Zahlreihen, weil sie die beiden einzig möglichen durch einfache Verschiedenheitsbeziehung gesetzten Formen der allgemeinen Zahlreihe sind, die als solche nichts anderes bedeutet, als dass jene beiden speciellen Gestaltungen derselben nur zusammen miteinander entstehen und bestehen.

Nachdem wir nun so den Ursprung des Widerspruchs der unendlichen Zahl aufgedeckt haben, ist der Beweis für die Unendlichkeit des Raumes nach oben aus der notwendigen vollendeten Unendlichkeit der Zahlenreihe vollkommen vernichtet. Wir wollen nun noch die weiteren Consequenzen, die auf Grund dieses Beweises in Bezug auf die Unendlichkeit des Raumes gezogen worden sind, in Betracht ziehen, in denen sich der Widerspruch der unendlichen Zahl nur noch offenkundiger zeigen wird.

So consequent es auch ist, aus der notwendigen Vollendbarkeit der Zahlenreihe auf ein letztes abschliessendes Glied in derselben zu schliessen, ebenso consequent scheint es zu sein, dass dieser im Unendlichen vollendeten Zahlenreihe noch weitere Einheiten hinzugefügt werden können. Freilich streng genommen ist dies gar nicht consequent,

denn ich setze ein letztes Glied der Zahlenreihe im Unendlichen nur deshalb voraus, weil mir die endlose Hinzufügung von Einheiten zu jeder gegebenen Zahl ein absolutes Ende zu erfordern scheint, setze ich also dieses absolute Ende voraus, dann ist auch alle weitere Hinzufügung von Einheiten damit aufgehoben. Andererseits wieder muss die unendliche Zahl, die das absolute im Unendlichen liegende Ende der endlosen Zahlenreihe ist, selbst eine aus einfachen Einheiten bestehende Zahlsynthese darstellen, es liegt dann also gar kein Grund vor, diese weitere Hinzufügung von Einheiten zu verbieten. Demnach ist sowohl die Behauptung, dass die unendliche Zahlenreihe ein absolutes Ende hat, wie die andere dass sie kein solches hat, gleich gerechtfertigt, denn dem zweifachen Ursprung dieser Idee entspricht es, wenn einerseits ein absolutes letztes Glied derselben und andererseits ihre absolute Endlosigkeit gefordert wird. Und so ist es denn, wir können sagen im höheren Sinne, ganz consequent, wenn einerseits ein absolutes Ende der unendlichen Zahlenreihe und andererseits die absolute Endlosigkeit derselben gefordert wird, d. h. wenn eine absolut unendliche Reihe von unendlichen Zahlen gefordert wird, wenn eine unendliche Reihe von unendlichen Zahlen verschiedener Ordnungen gefordert wird. Jede Zahl einer höheren Ordnung fängt mit einer unendlichen Zahl, die ganz ebenso die Gesammtheit aller Zahlen der niederen Ordnung bedeutet, wie die erste unendliche Zahl die Gesammtheit aller endlichen Zahlen bedeutet. Bezeichnen wir diese letztere mit ∞, dann stellen alle die Zahlen von der Form $\infty + 1, \infty + 2 \ldots . 2\infty, 2\infty + 1, 2\infty + 2 \ldots . 3\infty \ldots 4\infty \ldots . \infty^2$, alle Zahlen also von ∞ bis ∞^2 die unendlichen Zahlen erster Ordnung oder die Zahlen der zweiten Zahlenklasse (die erste Zahlenklasse umfasst alle die endlichen Zahlen); die Zahlen von der Form $\infty^2, 2\infty + 1, \infty^2 + 2 \ldots\ldots\ldots$ bis ∞^3 werden die unendlichen Zahlen zweiter Ordnung, oder die Zahlen der dritten Zahlenklasse bilden etc. in infinitum; so dass die Zahlen von der Form $\infty^{\infty} + 1, \infty^{\infty} + 2, \infty^{\infty} + 3 \ldots\ldots$ die Zahlen der unendlichsten Ordnung bilden würden und die Zahlen $\infty + 1$ er Zahlenklasse darstellen würden. Es ist nun offenbar dass man durch dieselbe Procedur weiter zu den Zahlen von der Form $\infty^{\infty^{\infty}}, \infty^{\infty^{\infty^{\infty}}}$ etc. in alle Unendlichkeiten hinaus gelangen würde. Das Bestehen der unendlichen Zahlen, mit denen eine neue Ordnung derselben anfängt und die vorausgehende vollendet wird, entspricht jener ersten Forderung der endlosen Zahlenreihe, nämlich der Forderung eines letzten abschliessenden Gliedes, und die unendliche An-

zahl dieser Zahlen resp. der Ordnungen der unendlichen Zahlen entspricht der zweiten Forderung der endlosen Zahlenreihe, ihrer absoluten Endlosigkeit, was leicht einzusehen ist und nicht besonders begründet zu werden braucht.

Nun, wie schon angedeutet, diese Fortsetzung der endlosen Zahlenreihe über das letzte (resp. erste) unendliche Glied derselben, diese Statuirung der unendlichen Anzahl der unendlichen Zahlen ist nur ein Beweis dafür, dass die Zahlreihe als solche, abstrakt gefasst, notwendigerweise mit Widersprüchen behaftet werden müsse. Man wollte die endlose Zahlenreihe im Unendlichen abschliessen, indem ihre Endlosigkeit mit dem absoluten Gegebensein ihrer letzten Glieder, der einfachen Zahleinheiten, im Widerspruch zu sein schien; und nun nachdem man dies so gut wie es gehen wollte gethan hat, zeigt sich die ganze Mühe umsonst, die Zahlenreihe will sich nicht mit dem gebotenen Stillstand begnügen, sie will sich weiter fortsetzen, und man gelangt so zu einer wirklich endlosen Zahlenreihe. Was hat man also gewonnen? Nur das Gegentheil von dem, was man gewollt. Man wollte den absoluten Abschluss der endlosen Zahlenreihe mit ihren endlichen Gliedern, und man hat statt dessen eine Zahlreihe mit unendlichen Gliedern bekommen, die zu keinem Abschluss zu bringen ist, die absolut und in jedem Sinne endlos ist. Statt der endlosen Zahlenreihe der endlichen Zahlen hat man die schlechthin endlose Reihe der unendlichen Zahlen; jene erste konnte man anscheinend in einer unendlichen Zahl zum absoluten Stillstand bringen, diese zweite vermag man aber durchaus nicht, sie ist schlechthin und absolut endlos. Was bedeutet das aber eigentlich? Nicht weniger und nicht mehr, als dass jener erste Abschluss der endlosen Zahlenreihe mit endlichen Gliedern ganz und gar unnöthig war, wäre er notwendig gewesen, dann könnte man über ihn nicht hinausgehen; dass man aber, wenn man über ihn hinausgeht, nie mehr zum Abschluss gelangen kann, zeigt nur wie unlogisch seine Voraussetzung war; dass man aber, wenn man denselben einmal macht, auch dieses Hinausgehen über ihn mitmachen muss, zeigt eben das Unsinnige des ganzen Verfahrens. Und in der ganzen Sache offenbart sich nur noch einmal der Widerspruch der unendlichen Zahl. Ich kann und ich muss über die vorausgesetzte unendliche Zahl, mit der die endliche Zahlenreihe schliesst, hinausgehen einfach deshalb weil diese unendliche Zahl in Wahrheit an sich nur eine endliche Zahl ist, und zu jeder endlichen Zahl ganz wohl eine neue Einheit hinzugefügt werden kann. Wäre die unendliche Zahl wirklich eine unendliche d. h. eine nicht endliche Zahl (was sie

nur dann sein könnte wenn sie nicht aus endlichen Zahlen entstände, vgl. weiter unten), dann könnte sie nicht weiter vermehrt und fortgesetzt werden; die unendliche Zahl der endlosen Zahlenreihe muss aber vermehrt werden können, folglich ist sie keine solche Zahl. Und die absolute Endlosigkeit der sogenannten unendlichen Zahlen in der Reihe der natürlichen Zahlen, die die Fortsetzung dieser letzteren darstellen, bezeigt dies in einer unzweideutigen Art und Weise.

Der Beweis für die Unendlichkeit des Raumes (und auch der Zeit) aus der absoluten Vollendbarkeit der endlosen Zalreihe ist, wie schon erwähnt, nur ein Beweis für die Unendlichkeit desselben nach oben und kann, streng genommen, gar nicht als Beweis für seine Unendlichkeit nach unten gelten, ist sogar, wenn man sich nur die Sache richtig anschauen will, ein direkter Beweis gegen diese Unendlichkeit nach unten. Mit anderen Worten, aus der absoluten Vollendbarkeit der Zahlreihe folgt die absolute Unendlichkeit des Raumes nach oben, d. h. es folgt dass der Raum unendlich gross sein müsse; dagegen aus der absoluten Untheilbarkeit des letzten Zahlelements, der einfachen Zahleinheit, muss auch die absolute Untheilbarkeit der letzten Raumbestandtheile folgen, d. h. es muss daraus folgen, dass der Raum nach unten nicht aus unendlich kleinen sondern aus schlechthin einfachen und weiter absoluten untheilbaren Theilen besteht. In diesem Falle muss also der Raum discret sein, da er aus letzten einfachen untheilbaren Theilen besteht, und diese notwendigerweise als solche realiter voneinander getrennt werden müssen, ganz ebenso wie die eine abstrakte einfache Zahleinheit nicht die andere einfache Zahleinheit ist; nur wäre die Anzahl dieser letzten Theile des discreten Raumes selbst absolut unendlich; zwar müsste jeder endliche Theil in demselben aus einer endlichen Anzahl von letzten Theilen bestehen, aber das Endliche wäre selbst ein Theil des unendlich Grossen, das als solches absolut keine Grenzen hat.

Die eben gemachte Voraussetzung über die Endlichkeit resp. Unendlichkeit des Raumes, dass der Raum nämlich nach oben absolut unendlich d. h. unbestimmt unendlich (denn das folgt aus der schlechthin unbestimmten Reihe der unendlichen Zahlen) und nach unten absolut endlich d. h. bestimmt endlich ist (denn das folgt aus der absoluten Untheilbarkeit des letzten Elements der Zahlenreihe) ist nur von dem einen Grundwiderspruche des Unendlichen frei, dem Widerspruch der Endlichkeit jedes Unendlichen. Dagegen leidet sie an dem Widerspruche der unendlichen Zahl und dem Widerspruche des plötz-

lichen Sprunges des Endlichen in das Unendliche so sehr, dass sie völlig werthlos ist. Jenen ersten Widerspruch haben wir gesehen; bevor wir aber den zweiten nachweisen, müssen wir zuvor den Widerspruch der Endlichkeit jedes Unendlichen zur Sprache bringen, einen Widerspruch der nur bei der Voraussetzung der Unendlichkeit des Raumes auch nach unten entsteht. Wir müssen also zunächst die Gründe für diese letztere darlegen.

Diese Unendlichkeit des Raumes nach unten folgt nun auch aus Gründen die dem zweiten Grundwiderspruche der Zahlenreihe, dem Widerspruche des plötzlichen Sprunges des Endlichen in das Unendliche entspringen, sie lässt sich aber durch direkte geometrische Gründe deducieren, und wir wollen hier zunächst nur diese betrachten, während wir die ersten erst im Zusammenhang mit dem dritten Grundwiderspruche des Unendlichen darlegen werden.

Der direkte Grund der für die absolute Unendlichkeit des Raumes nach unten d. h. gegen seine Zusammensetzung aus einfachen untheilbaren Punkten spricht, richtet sich gegen die Möglichkeit des einfachen Raumpunktes als selbstständigen letzten Raumtheils. Dieser direkte Grund tritt gewöhnlich in drei gesonderten Formen auf. Erstens soll der einfache Punkt als Theil des Raumes deshalb unmöglich sein, weil die Grösse desselben gleich Null ist, aus lauter Nullen aber sich keine extensive Grösse zusammensetzen lässt; zweitens soll der einfache Punkt als Raumtheil unmöglich sein, weil sich zwei solche Punkte unmittelbar berühren müssten und es nicht könnten, weil notwendigerweise zwischen denselben ein einfacher Punkt bestehen müsste der sie trennt (sonst wären sie ja nicht *zwei* Punkte), was wiederum nicht mehr und nicht weniger bedeutet, als dass der einfache Punkt als einfacher Raumtheil nicht möglich ist; und drittens soll der einfache Punkt als Theil des Raumes unmöglich sein, weil sich die einfachen Punkte miteinander berühren müssten, was ein Zerfallen derselben in einfachere Punkte notwendigerweise nach sich zöge, was wieder nichts anderes denn die Unmöglichkeit des einfachen Punktes als einfachen Raumtheils bedeutet.

Wie man also sieht, bezieht sich der erste Grund auf den Beweis der Unmöglichkeit des einfachen Punktes als einfachen Raumtheiles seinem inneren Gehalte nach; während die beiden anderen Gründe denselben Nachweis aus dem Zusammen vieler Punkte führen. Wir wollen nun alle die drei Gründe, von denen sich schliesslich die beiden anderen als auf der Grundvoraussetzung des ersten beruhend herausstellen werden, abgesondert betrachten, um ihre völlige Grundlosigkeit in volles Licht zu stellen.

Dass nun der einfache Punkt als solcher nicht möglich ist, weil seine Grösse notwendigerweise Null wäre, und aus lauter Nullen keine Grösse zusammensetzbar ist, ist eine Behauptung, deren Grundlosigkeit leicht nachgewiesen werden kann. Wir haben in dem vorigen Kapitel denselben Grund in Bezug auf den einfachen Zeitpunkt erörtert und nachgewiesen, wie fehlerhaft derselbe ist. Dort haben wir gesehen, dass die Grösse des einfachen Zeitpunktes nicht Null sondern Eins ist, und dass die absolut einfache untheilbare Einheit eine begriffliche Möglichkeit darstellt. In diesem Kapitel haben wir dann weiter gesehen, dass die absolut einfache Zahleinheit nicht nur eine begriffliche Möglichkeit sondern sogar eine begriffliche Notwendigkeit darstellt, und haben den einfachen Zeitpunkt als das konkrete erfahrungsgemässe Substratum dieser absolut einfachen Einheit festgestellt, während uns diese absolut einfache Einheit im Gebiete des Raumes als eine begriffliche Möglichkeit blieb. Es ist also ein blosses Missverständniss des discreten Quantitätsbegriffs, wenn die Unmöglichkeit der einfachen räumlichen Einheit, des einfachen Raumpunktes behauptet wird, und mit dieser kurzen aber stringenten Widerlegung des besagten Irrthums wollen wir die Besprechung dieses ersten Grundes abschliessen. Denn die Besprechung des Verhältnisses der einfachen Negationsacte zu den realen Raumpunkten wird zwar theilweise schon bei dem nächsten Grunde, endgiltig aber erst viel später vorgenommen werden.

Der zweite Grund hat wohl dasselbe Ziel wie das erste: nämlich den Nachweis der Unmöglichkeit eines einfachen Raumpunktes; aber er will zu diesem Ziele auf einem anderen von dem ersten scheinbar völlig unabhängigen Wege führen. Wenn reale einfache Punkte beständen, so müssten sie sich notwendigerweise berühren, und doch können sie sich nicht berühren, zwischen je zwei Punkten muss notwendigerweise wieder ein Punkt liegen, der sie voneinander trennt, der sie also verhindert dass sie sich unmittelbar berühren. Aber nicht nur dass dieser notwendig vorauszusetzende dazwischenliegende Punkt die zwei ersten Punkte verhindert, dass sie sich unmittelbar berühren, sondern er selbst ist ebenso durch dazwischenliegende Punkt verhindert sich mit ihnen zu berühren u. s. f. in infinitum, so dass die vorausgesetzten einfachen Punkte sich nirgends berühren, was nicht mehr und nicht weniger bedeutet, als dass sie als solche überhaupt nicht möglich sind, dass der einfache Raumpunkt als letzter Raumtheil eine contradictio in adjecto darstellt. Nun allerdings solange die Voraussetzung gemacht wird, dass alle die Raumpunkte gleichartiger Natur sind, solange ist die Kraft dieses

Arguments unbezwinglich. Aber sobald man sich nur näher dasjenige ansehen will, was dasselbe eigentlich bestreitet, wird sofort diese Kraft gebrochen. Dieses Argument bestreitet den einfachen realen Raumpunkt, thut dies aber nur unter der Voraussetzung, dass sich dieser einfache Raumpunkt in gar nichts von dem völlig leeren absolut grössenlosen Punkte unterscheidet, der zwischen zwei solchen einfachen inhaltlichen Punkten liegt und liegen muss, d. h. es setzt eigentlich die Grundvoraussetzung des ersten Arguments als völlig giltig voraus. Denn dass zwischen zwei gegebenen einfachen Raumpunkten ein Punkt liegen muss der sie trennt, diese Behauptung ist richtig und einleuchtend, denn wären die zwei realen Punkte nicht durch diesen einfachen Punkt getrennt, so wären sie nicht zwei Punkte sondern ein Punkt; dass aber dieser dazwischenliegende Punkt dieselbe Natur hat wie die beiden von ihm getrennten realen Punkte, diese Behauptung ist falsch und ist nur dann richtig, wenn die Behauptung des ersten Arguments richtig ist, dass jeder Punkt notwendigerweise ein grössenloser Null-punkt sein müsse. Wir werden im Späteren den realen mit Inhalt erfüllten Raumpunkt Mittelpunkt, und den irrealen unerfüllten Raumpunkt Zwischenpunkt nennen; der Zwischenpunkt entspricht dem realen Negationsacte, er ist durch diesen Act gesetzt, aber der Negationsact selbst als solcher befindet sich, wie wir später nachweisen werden, in ihm nicht, so dass der irreale Zwischenpunkt eine absolut einfache leere nichtseiende Lücke in dem realen Raume darstellt, die zwischen je zwei realen Mittelpunkten liegt. Sobald der Unterschied dieser beiden Punktarten gemacht wird, verschwindet die Schwierigkeit, den Raum als aus einfachen Punkten zusammengesetzt sich zu denken vollständig und in erster Reihe dieser zweite Grund gegen eine solche Zusammensetzung.

Aber ebenso verschwindet dann auch der dritte Grund. Dieser Grund scheint ganz ebenso völlig unabhänhig von dem ersten Grunde zu sein, wie es der zweite zu sein scheint. Ja noch mehr, er scheint auch von dem zweiten völlig unabhängig zu sein. Denn dieses Argument will eben ein ganz neues sein, das auch dann entscheidend und giltig sein soll, wenn die beiden anderen es nicht sind. Setzen wir voraus, die Zusammensetzung des Raumes aus einfachen Punkten sei möglich, und das unmittelbare Sich-berühren dieser Punkte ebenso so müssen die sich berührenden Punkte, so argumentiert dieses Argument, wenn sie sich wirklich berühren, in einfachere Theile d. h. in einfachere Punkte zerfallen u. s. f. in infinitum, die Zusammensetzung des Raumes aus einfachen untheilbaren Punkten wäre also unmöglich. Nun freilich hängt es ganz und gar von dem Be-

griffe der Berührung ab, ob man dieses Argument gelten lassen will oder nicht. Denn wenn jede Berührung so sein müsse, wie sie es bei zusammengesetzten Einheiten ist, dann *kann* das Argument gelten, denn wenn sich zwei zusammengesetzte Einheiten berühren so berühren sie sich allerdings nur mit einzelnen Theilen (die Körper mit resp. an den Flächen, die Flächen mit den Linien, die Linien mit den Punkten); was aber für die zusammengesetzten Einheiten gilt, das braucht nicht für die einfachen zu gelten. Folgendes ist aber entscheidend. Wir sagen dass sich zwei zusammengesetzte Einheiten dann berühren, wenn zwischen ihren Berührungsgrenzen nichts mehr dazwischenliegt; wenn wir nun zu einfachen Einheiten übergehen, dann scheint uns der Unterschied zwischen der Berührungsgrenze und dem sich-Berührenden nicht mehr zu bestehen, wenn der zwei Punkte trennende Punkt besteht, denn dieser scheint nicht sich in irgend etwas von den sich berührenden Punkten zu unterscheiden; wenn wir einen solchen aber nicht zulassen, dann scheint es, dass die sich berührenden einfachen Punkte ganz ebenso in Theile zerfallen müssen, wie die zusammengesetzten Einheiten unserer Wahrnehmung, die sich berühren, in Theile getheilt sind. Daraus nun dass die zusammengesetzten Einheiten, wenn sie sich berühren, in Theile getheilt sind, folgt, wie wir oben sagten, zwar nicht dass auch die einfachen Einheiten, wenn sie sich berühren, in Theile getheilt werden müssen; aber erst wenn wir in Betracht ziehen, dass zwischen je zwei realen Punkten, die sich berühren, ein irrealer Zwischenpunkt liegt, der sie voneinander trennt, verschwindet auch die letzte Schwierigkeit der Unmöglichkeit des Sich-berührens einfacher Raumpunkte. Denn es berühren sich nicht mehr die einfachen Punkte so, dass zwischen denselben absolut nichts vorhanden ist, es ist der einfache irreale Raumpunkt da, der sie trennt und verhindert ineinander hineinzufallen (Einige, beiläufig bemerkt, haben als Argument für die Unmöglichkeit der Berührung einfacher Punkte gerade dies angeführt, dass sie dann notwendigerweise miteinander zusammenfallen müssten — wie man sieht ein blosses Misverständniss). Wenn wir also den Begriff der Berührung so fassen, dass derselbe auch den Fall umfasst, wo zwischen den sich Berührenden weder absolut gar nichts mehr (wie im Falle der Berührung der zusammengesetzten Einheiten), noch wo zwischen denselben nichts dieselbe Natur wie sie selbst Habendes ist (wie im Falle der Berührung absolut inhaltsloser Punkte, zwischen denen ebensolche Punkte liegen), dann kann man sehr gut begreifen, wie sich die einfachen realen Raumpunkte miteinander berühren können, ohne in Theile zu zerfallen oder ohne miteinander zusammenzufallen. Nur

also wenn kein Unterschied zwischen realen und irrealen Raumpunkten bestände, nur wenn jeder Raumpunkt ein inhaltsloser wäre, könnte man diesem dritten Argumente seine argumentatorische Kraft zuerkennen; da dem aber nicht so ist, so hat er keine solche. Wie man also sieht, setzt dieses Argument vollkommen die Geltung des ersten Arguments und bedingungsweise auch diejenige des zweiten voraus. Unsere Behauptung also, dass die beiden anderen Argumente auf der Grundvoraussetzung des ersten beruhen, bewahrheitet sich vollständig.

Wenn diese drei Gründe, die so schliesslich nur den einen Grund darstellen, gelten würden, dann wäre der Raum nach unten unendlich. Aber nicht nur dass er nach unten unendlich wäre, sondern er wäre kraft derselben Gründe auch nach oben unendlich. Freilich sensu stricto genommen, sprechen diese Gründe weder für eine Unendlichkeit des Raumes nach oben noch für diejenige nach unten, sie sprechen (und zwar speciell der erste) gegen das Bestehen des Raumes aus discreten Theilen überhaupt, sie sprechen für die absolute Continuität des Raumes. Sie sprechen aber allerdings für diese absolute Continuität nur dadurch (und zwar speciell die beiden anderen) dass sie für die absolute Unendlichkeit des Raumes nach oben und unten sprechen. Wir lassen diese Erörterung der Continuirlichkeit und der Discretheit des Raumes zunächst bei Seite und werden sie erst betrachten nachdem wir alle die Widersprüche des Unendlichen betrachtet haben, wir wollen hier nur nachweisen, dass die Unendlichkeit des Raumes nach oben aus diesen Gründen ganz ebenso folgt wie seine Unendlichkeit nach unten. Wenn der Raum in's Unendliche theilbar ist weil in ihm nirgends ein einfacher Punkt anzutreffen ist, so muss er ebenso in's Unendliche vermehrbar sein, da kein Grund vorliegt, der diese seine Ausdehnung in's Unendliche verhindern könnte. Noch viel einleuchtender folgt diese Unendlichkeit nach oben aus den beiden anderen Gründen. Wenn die Anzahl der einfachen Raumpunkte schlechthin unendlich ist deshalb weil zwischen je zwei Punkten ein neuer Punkt liegen muss, und wenn jeder Punkt, um sich mit zwei Punkten zu berühren, in zwei Punkte zerfallen muss, dann dehnt sich der Raum, der aus diesem Zerfallen seiner einfachen Bestandtheile entsteht, sowohl nach oben wie nach unten in's absolut unbestimmte Unendliche, denn wie einerseits nach oben die Zahl der durch Zerfallen entstandenen Punkte eine unbestimmt unendliche ist, so ist andererseits nach unten kein einfacher Punkt vorhanden, der Raum also nach unten ebenso absolut in's Unendliche getheilt und theilbar wie er nach oben ohne Grenzen ist und umgekehrt.

Wenn nun so der Raum sowohl nach unten wie nach oben unendlich ist, und also nach unten ebensowenig ein unendlich Kleines letzter Ordnung existiert, wie es nach oben ein unendlich Grosses letzter Ordnung nicht giebt, sondern nach unten wie nach oben die Reihe der Unendlichkeiten verschiedener Ordnungen eine schlechthin unendliche ist, dann entsteht dabei ein Widerspruch, den man wohl auf den ersten Blick nicht bemerkt, der sich aber einer aufmerksamen Betrachtung sofort ergiebt. Und das ist der Widerspruch der Endlichkeit jedes Unendlichen, der zweite Widerspruch, an dem der Begriff des Unendlichen zu Grunde gehen muss. Wenn nämlich jene Reihe der Unendlichkeiten sowohl nach oben wie nach unten absolut unendlich ist, dann ist offenbar das uns gegebene Endliche unendlich klein in Bezug auf das unendlich Grosse erster Ordnung und unendlich gross in Bezug auf das unendlich Kleine erster Ordnung. Wir können nunmehr nicht voraussetzen, dass in dieser endlosen Reihe von Unendlichkeiten gerade das in unserer unmittelbaren Erfahrung gegebene Stück eine Mitte bildet, — vorausgesetzt nämlich, dass die Mitte als solche nur Endliches ist und in sich enthält, übrigens eine Voraussetzung die wir weiter unten als illusorisch nachweisen werden — in einem so absolut unbestimmten Unendlichen dieser absolut unendlichen Reihen, wo kein letztes Glied weder nach unten noch nach oben gegeben ist, können wir uns keine Mitte vorstellen. Denn wie wir in der Zeit nach oben eine unbestimmte Endlichkeit vor uns haben die sich von der bestimmten Endlichkeit des Raumes (resp. einer endlichen aus endlichen Theilen bestehenden Raumstrecke) so unterscheidet, dass in derselben keine Mitte vorhanden ist, während sie in dieser zweiten da ist, so müsste ebenso diese Reihe der Unendlichkeiten als unbestimmte Unendlichkeit im Gegensatz zur bestimmten Unendlichkeit jeder Reihe einer bestimmten Ordnung so unterschieden werden, dass in derselben im Gegensatz zu dieser keine Mitte vorhanden ist. Wenn dem nun so ist, dann muss jedes Unendliche einer gewissen Ordnung, da dasselbe ebenso wie das uns gegebene Endliche in Bezug auf das unendlich Grosse nächster Ordnung unendlich klein und in Bezug auf das unendlich Kleine nächster Ordnung unendlich gross ist, selbst endlich sein; folglich muss jedes Unendliche an und für sich endlich sein, und das ist der Widerspruch. Jede räumliche Grösse müsste als solche endlich sein, und ihre Unendlichkeit bestünde nur darin, dass sie aus einer unendlichen Anzahl von endlichen Grössen zusammengesetzt wäre, was widersprechend ist. Denn einerseits bestünde jede endliche Grösse aus einer endlichen Anzahl von end-

lichen Grössen und andererseits müsste es endliche Grössen geben, die nur in unendlicher Anzahl einander hinzugefügt eine endliche Grösse ergeben. Gerade diese Consequenz des Unendlichkeitsbegriffs, dass jede unendliche Grösse sich schliesslich als endliche herausstellt, zeigt, dass das Unendliche nicht bestehen kann, und dass dasselbe, selbst wenn man es als bestehend voraussetzt, in sein Gegentheil umschlägt. Das Wesen der endlichen Grösse besteht darin, dass sie aus einer endlichen Anzahl von endlichen Grössen besteht, dass sie zugleich auch aus einer unendlichen Anzahl von solchen besteht, ist eine offenkundige contradictio in adjecto. Es hilft nichts etwa vorauszusetzen, dass sie dies beides nicht in einer und derselben Beziehung ist, dass jenes Endliche, welches aus einer endlichen Anzahl besteht, sich von dem Endlichen, welches aus einer unendlichen Anzahl besteht, doch unterscheidet, dass es endliche Grössen verschiedener Ordnungen giebt, denn gerade diese Voraussetzung der endlichen Grössen verschiedener Ordnungen kann nicht bestehen, da ja das Endliche im Unterschiede von dem Unendlichen nur von einer und derselben Ordnung sein kann, d. h. Endliches nur aus einer endlichen Anzahl vom Endlichen bestehen kann, denn ein Endliches besteht eben aus einer endlichen Anzahl von endlichen Theilen und kann nicht anders begriffen und aufgefasst werden.

Die Folgerung, dass jedes Unendliche für sich genommen endlich sein muss, sobald die Reihe der Unendlichkeiten verschiedener Ordnungen für eine absolut endlose erklärt wird, ist eine so klare und deutliche, dass man sie nicht wird in Abrede stellen können. Um nun diesen so fundamentalen Widerspruch der Endlichkeit jedes Unendlichen, der zu der absurden Voraussetzung der Endlichkeiten verschiedener Ordnungen führt, zu vermeiden, könnte man zunächst meinen dass, sobald jene Voraussetzung von der unbestimmten Unendlichkeit der Ordnungen unendlicher Grössen fallen gelassen wird, die Schwierigkeit von selbst verschwindet. Dass man die unendliche Reihe dieser Ordnungen nicht fallen lassen kann, ist wohl aus dem schon Ausgeführten klar, man kann also nur versuchen, die unbestimmte Unendlichkeit dieser Ordnungen selbst fallen zu lassen. Ist es nun möglich, diese Unendlichkeit als eine bestimmte zu denken, so wie man sich die Unendlichkeit der Anzahl der Theile der unendlichen Grösse jeder bestimmten Ordnung als eine bestimmte denkt? Offenbar nicht, denn sobald man sie so dächte, müsste man die letzten untheilbaren Raumpunkte als die absolute Grenze der Raumausdehnung nach unten gelten lassen, was jedoch der Annahme des unendlich Kleinen und des unendlich Grossen widerspricht. Also

kann jene Reihe nur als eine absolut unbestimmte gedacht werden. Es wäre nur ein Ausweg da, ein verzweifelter allerdings, aber was würde der Unendlichkeitsvertreter nicht alles versuchen, um nur seine Lieblingsidee, die ihm eine so erhabene Idee von der Grösse des Seienden und seines eventuellen Schöpfers giebt, zu retten: an sich, so könnte der Unendlichkeitsvertreter behaupten, ist jene unendliche Reihe von Unendlichkeiten wohl bestimmt, aber für uns d. h. für unser Denken und Begreifen ist sie absolut unbestimmt, was nicht mehr und nicht weniger bedeutet, als dass sie unbestimmt und bestimmt zugleich gedacht werden soll, unbestimmt nämlich, wenn es der Unendlichkeitsphilosoph nöthig hat, des „Widerspruchs" der letzten einfachen Raumpunkte loszuwerden, bestimmt wenn er nöthig hat, des Widerspruchs der Endlichkeit jedes Unendlichen loszuwerden. Denn sobald jene Reihe als bestimmt vorausgesetzt wird, kann man nämlich behaupten, dass dann das gegebene Endliche die absolute Mitte jenes bestimmt Unendlichen darstellt, und dass sich demnach diese Mitte wohl in irgend etwas von den anderen Regionen des Unendlichen unterscheiden müsse, sonst stellte sie ja nicht die Mitte dar, die ja als solche in jeder bestimmten, sei es endlichen oder unendlichen Grösse, einen gewissen Sprung darstellt (wenn sich ein Punkt von dem einen Ende einer bestimmten Geraden zu dem anderen Ende derselben bewegt, so ist er in der Mitte gleich entfernt von beiden und nimmt nun in Bezug auf das zweite Ende alle jene Verhältnise ein, die er bis dahin zu dem ersten Ende, oder umgekehrt, hatte). Und dieses Eigenthümliche der Mitte in dem bestimmt-Unendlichen bestünde eben darin, dass dieselbe einzig und allein endliche Grössen in sich enthielte, während in allen übrigen Regionen des Unendlichen keine solchen mehr anzutreffen wären.

Ich will nun zeigen, dass diese vermeintlichen Vortheile der Mitte in dem bestimmt-Unendlichen gar nicht existieren, dass demnach die Voraussetzung selbst völlig nutzlos ist. Obgleich nämlich in diesem Falle das Endliche, das so als Mitte eine bevorzugte Stellung hätte, anscheinend einzig und allein an sich endlich wäre, müsste dasselbe doch in Bezug auf das unendlich Kleine erster Ordnung unendlich gross und in Bezug auf das unendlich Grosse erster Ordnung unendlich klein, und ebenso müsste dann jede unendliche Grösse an sich endlich sein, da sie ja in demselben Verhältnisse zu den Unendlichkeiten nächster Ordnungen steht, wie das Endliche zu den entsprechenden Unendlichkeiten, und nur für das unendlich Kleine letzter Ordnung und das unendlich Grosse letzter Ordnung könnte nicht mehr diese Argumentation gelten. Das Bevorzugte der Mitte in

dem bestimmt-Unendlichen liegt also nicht direkt in ihr selbst sondern darin, dass in diesem Falle die Endglieder des Unendlichen nicht mehr auf dieselbe Art und Weise endlich sein können wie die Mitte, aber keineswegs gilt dies für die dazwischenliegenden Theile, diese müssen auf dieselbe Art und Weise wie sie endlich resp. unendlich sein. Wenn aber so das unendlich Kleine erster Ordnung nicht mehr auf dieselbe Art und Weise als endlich charakterisiert werden kann wie die anderen unendlich kleinen Grössen verschiedener Ordnungen, so müssen wir dann offenbar die Endlichkeit desselben auf andere Weise darthun. Und thatsächlich ist diese andere Art und Weise wirklich gegeben. Denn das unendlich Kleine letzter Ordnung wäre eben nichts anderes als die einfache Raumeinheit d. h. der einfache Raumpunkt selbst und dieser ist ja endlich, weil er mit der zusammengesetzten endlichen Grösse das Gemeinsame hat, nicht aus unendlichen Theilen zu bestehen (er besteht nämlich aus keinen folglich auch nicht aus unendlichen resp. aus unendlich vielen Theilen). Gilt dies nun für das unendlich Kleine letzter Ordnung, so gilt dasselbe auch für das unendlich Grosse letzter Ordnung. Denn auch dieses hätte mit dem Endlichen das Gemeinsame, bestimmt und für sich genommen unvermehrbar zu sein, und das ist das Prädicat auch jedes Endlichen. Mag man sich also drehen und wenden wie man will, mag man die Reihe der Unendlichkeiten als bestimmt oder als unbestimmt voraussetzen, in jedem Falle ist der Widerspruch der Endlichkeit jeder unendlichen Grösse da, und er macht jede (consequente) Anwendung des Unendlichkeitsbegriffs illusorisch.*)

Nur in einem Falle hört dieser Widerspruch der Endlichkeit jedes Unendlichen zu gelten auf, wenn nämlich das Endliche nicht in die Mitte (wie man es fälschlich meinte) sondern an den Anfang resp. an das Ende des Unendlichen gesetzt wird, d. h. wenn entweder nur die Unendlichkeit des Raumes nach oben oder nur diejenige nach unten vorausgesetzt wird, wenn also entweder nur das unendlich Grosse oder nur das unendlich Kleine zugelassen wird. Bildet das Endliche den Anfang des Unendlichen, d. h. besteht das unendliche Kleine nicht, dann besteht das Endliche aus einer endlichen Anzahl

*) Indirekt erkennt Bolzano (der einzige bei dem ich eine Andeutung desselben finde) diesen Widerspruch an, indem er in seinen Paradoxien des Unendlichen, 2-te Aufl. Berlin 1889. § 27, § 43 und § 45—49 behauptet, dass unendlich grosse und unendlich kleine Entfernungen nicht existieren, dass jede räumliche Grösse (resp. Entfernung) endlich ist und nur die Menge der Punkte in ihr unendlich ist. Auf die vielen mathematischen und physikalischen Beweisführungen Bolzano's dafür können wir hier nicht eingehen.

von endlichen resp. absolut einfachen Theilen während das Unendliche d. h. das unendlich Grosse aus einer unendlichen Anzahl von solchen besteht, so dass dann ein einfacher Unterschied zwischen beiden besteht. Zwar ist das Endliche unendlich klein in Bezug auf dass unendlich Grosse erster Ordnung wie dieses unendlich klein in Bezug auf das unendlich Grosse zweiter Ordnung ist etc. in infinitum; da aber das Endliche nicht mehr als unendlich Grosses aufgefasst werden kann, kann das Unendliche nicht mehr mit dem Endlichen identificiert werden und der Widerspruch der Endlichkeit jedes Unendlichen besteht nicht. Ebenso besteht ein eindeutiger Unterschied zwischen dem Endlichen und dem Unendlichen, wenn das Endliche das Ende des Unendlichen bildet, d. h. wenn nur das unendlich Kleine und nicht das unendlich Grosse besteht. Dann ist das Endliche wohl in Bezug auf das unendlich Kleine erster Ordnung unendlich gross, wie dieses in Bezug auf das Unendlich Kleine zweiter Ordnung unendlich gross ist u. s. f. in infinitum; da aber das Endliche nicht mehr als das unendlich Kleine aufgefasst werden kann, weil kein unendlich Grosses (erster Ordnung) existiert, so kann das Endliche mit dem Unendlichen nicht mehr identificiert werden und dasselbe kann nur aus einer endlichen Anzahl von endlichen Theilen bestehen, während das Unendliche aus einer unendlichen Anzahl von unendlich kleinen Theilen besteht (weil in diesem Falle das Endliche nicht mehr Bestandtheil des Unendlichen ist), der Unterschied zwischen beiden also ein viel eindeutigerer ist, als derjenige im ersten Falle.*)

Nun kommen wir zuletzt zu dem dritten und wichtigsten Widerspruche des Unendlichen, einem Widerspruche der entscheidend gegen den Unendlichkeitsbegriff ist, und ihn völlig unmöglich und nutzlos macht. Während der Widerspruch der unendlichen Zahl darin besteht, dass die unendliche Zahl als die Gesammtheit aller endlichen Zahlen,

*) Die Doctrin, welche nur unendlich Grosses zulässt und das unendlich Kleine wegläugnet, ist erst in letzter Zeit von hervorragenden Mathematikern aufgestellt und vertheidigt worden (besonders von Cantor und Peano, aber allerdings in einer von dem Obigen abweichenden Weise indem ihre Doctrin auf der transfiniten Zahlenlehre Cantor's beruht, die wir später in Betracht ziehen werden). Die Doctrin, welche nur das unendlich Kleine zulässt und das unendlich Grosse wegläugnet, ist zwar in der Geschichte des menschlichen Denkens viel älter, sie ist aber meines Wissens nie mathematisch strenge aufgestellt und vertheidigt worden. Beide Doctrinen sind aber einseitig und inconsequent. Denn sobald der Raum nach oben unendlich ist, muss er auch nach unten unendlich sein, und jeder mathematische und philosophische Versuch, der nur Eines von beiden gelten lassen will, kann dies nur auf Grund einer völlig fehlerhaften Fassung des Anderen thun. Uebrigens sind beide Doctrinen, selbst wenn sie als solche formell möglich wären, logisch unmöglich auf Grund der Widersprüche der unendlichen Zahl und des plötzlichen Sprunges des Endlichen in das Unendliche.

d. h. als eine alle endlichen Zahlsynthesen in sich umfassende Synthese, selbst endlich sein muss, besteht der Widerspruch des plötzlichen Sprunges des Endlichen in das Unendliche darin, dass, vorausgesetzt dass die unendliche Zahl eine von den endlichen Zahlen ganz verschiedene ist, sie doch, sobald man sich eine Einheit von ihr abgezogen denkt, endlich werden muss, die unendliche Zahl also diesen plötzlichen Sprung des Endlichen in das Unendliche enthält, der doch widersprechend und unmöglich ist. Die unendliche Zahl müsste, um aus der endlichen zu entstehen, durch die einfache Hinzufügung einer Einheit zu dieser entstehen, durch die Hinzufügung einer Einheit entsteht aber aus der endlichen Zahl nur eine endliche Zahl, sobald man also doch die unendliche Zahl als möglich zulassen will muss man auch den plötzlichen Sprung des Endlichen in das Unendliche zulassen, und doch ist dieser Spung unmöglich, weil etwas widerspruchsvolles. Der Widerspruch der unendlichen Zahl und derjenige des plötzlichen Sprunges des Endlichen in das Unendliche stehen somit in engster Gemeinschaft, denn will man den Widerspruch der unendlichen Zahl nicht gelten lassen, dann erscheint der Widerspruch des plötzlichen Sprunges des Endlichen in das Unendliche. Denn der Widerspruch der unendlichen Zahl sagt aus, dass die unendliche Zahl als eine direkte Fortsetzung der endlichen Zahlsynthese notwendigerweise selbst endlich sein müsse: sobald man die unendliche Zahl nicht als die direkte Fortsetzung der endlichen, sobald man dieselbe also wirklich als eine unendliche d h. nicht-endliche fassen will, muss man auf den Widerspruch des plötzlichen Sprunges des Endlichen in das Unendliche stossen.

Dass diese beiden Widersprüche nicht ein und dasselbe ausdrücken obgleich sie so unmittelbar miteinander zusammenhängen, zeigen am besten gewisse Consequenzen des Widerspruchs des plötzlichen Sprunges des Endlichen in das Unendliche, die aus dem Widerspruche der unendlichen Zahl nicht folgen. Wir haben gesehen, dass die Zahlenreihe nach oben absolut unendlich ist nur deshalb weil sie in Wahrheit endlich ist, was schliesslich nichts anders bedeutet als dass es der Widerspruch der unendlichen Zall selbst ist, der diese absolute Endlosigkeit der Zahlenreihe setzt. Die Endlosigkeit der Zahlenreihe nach unten (dieser Ausdruck, obgleich er am Ende, wie sich zeigen wird, einen Widerspruch in sich enthält, muss hier provisorisch gebraucht werden, ohne dass er Missverständnisse hervorzurufen braucht) folgt dagegen erst aus dem Widerspruche des plötzlichen Sprunges des Endlichen in das Unendliche; aber nicht nur dass diese Endlosigkeit der Zahlenreihe nach unten aus diesem

Wiederspruche folgt, sondern aus demselben folgt auch jene Endlosigkeit der Zahlenreihe nach oben. Während aber die Endlosigkeit der Zahlenreihe nach oben aus dem Widerspruche der unendlichen Zahl direkt folgt, folgt dagegen die Endlosigkeit der Zahlenreihe nach oben und unten aus dem Widerspruche des plötzlichen Sprunges des Endlichen in das Unendliche indirekt, d. h. aus dem Bestreben dieses Widerspruches loszuwerden. Das nun Folgende wird dies klar und deutlich zeigen.

Wenn die Zahl der einfachen Zahleinheiten in der Zahlreihe unendlich ist, so kann die Frage erhoben werden, ob diese unendliche Zahl eine einzige und einzig mögliche ist, oder ob es noch andere grössere oder kleinere unendliche Zahlen giebt. Nun ist es offenbar, dass die vorausgesetzte unendliche Zahl nicht die einzige sein kann, denn wäre sie die einzige, dann müsste diejenige Zahl, die aus ihr entstände, wenn man von ihr nur eine einzige Einheit wegnähme, eine endliche sein, und das ist unmöglich, weil die unendliche Zahl den Widerspruch des plötzlichen Sprunges des Endlichen in das Unendliche enthielte. Um diesen Widerspruch zu vermeiden, müssen wir offenbar voraussetzen, dass die unendliche Zahl nicht die einzige ist, sondern dass sich in der unendlichen Zahlreihe viele und zwar unendlich viele unendliche Zahlen befinden. Es fragt sich nun weiter ob die Anzahl dieser unendlich vielen Zahlen in der vorausgesetzten unendlichen Zahlreihe selbst eine einzige ist, oder ob es noch grössere und kleinere unendliche Zahlen der ersten unendlichen Zahlen giebt. Offenbar kann sie nicht eine einzige sein, denn dann müsste sie nach der vorigen Argumentation endlich sein, d. h. man könnte durch eine Anzahl von Substraktionen der Einheit von der grössten und letzten unendlichen Zahl zu den endlichen gelangen, was widersprechend wäre, da man dann keine unendlichen Zahlen mehr vor sich hätte. Folglich giebt es also eine unendlich grosse Zahl der Zahlen die die Anzahl der ersten unendlich vielen Zahlen in der unendlichen Zahlreihe (die man sich am besten als eine Gerade — vgl. weiter unten — vorstellen möge) darstellen. Was heisst das aber? Das heisst nicht mehr und nicht weniger, als dass die ursprünglich als einfach vorausgesetzten Zahleinheiten der unendlichen Zahlreihe in eine unendliche Vielheit von noch einfacheren Einheiten zerfallen müssen, für diese einfachen Einheiten (resp. für die unendlichen Zahlreihen, von denen jede durch das Zerfallen der ursprünglich einfach gedachten Einheit entstanden zu denken wäre) müsste nun dasselbe gelten u. s. f. in infinitum, d. h. man könnte nie zu einfachen absolut untheilbaren Zahleinheiten gelangen, denn sobald man dieselben voraussetzte,

würden zugleich auch jene widersprechenden plötzlichen Sprünge in den unendlichen Zahlen wiederum auftreten, die man nur vermeiden kann, wenn man immer wieder diese einfachen Einheiten in noch einfachere zerfallen lässt u. s. f. in infinitum. Wie man also sieht, zeigt die genaue logische Analyse des Begriffs der unendlichen Zahl, dass, wenn man die Zahlreihe von allen Widersprüchen frei halten will, man in einer unendlichen Zahlreihe keine einfachen Zahleinheiten voraussetzen kann, voraus einerseits folgt, dass entweder der Raum nicht aus untheilbaren Theilen bestehen kann, also nach unten absolut unendlich sein muss, oder dass die räumliche Zahlreihe, wenn sie aus einfachen Zahleinheiten bestehen soll, nur endlich sein kann.

Aber nicht nur dass das Bestreben, den Widerspruch des plötzlichen Sprunges des Endlichen in das Unendliche zu vermeiden, die Zahlreihe resp. die räumliche Zahlreihe nach unten in's unbestimmte Unendliche vervielfacht und so die Grundvoraussetzung der Zahlreihe, die einfache Zahleinheit resp. den einfachen Raumpunkt, zerstört, sondern dasselbe Bestreben zur Vermeidung des besagten Widerspruches bringt auch die Unendlichkeit der Zahlreihe nach oben hervor. Ist die Zahl der endlichen Theile im Raume unendlich (und sie muss unendlich sein auf Grund der Vollendbarkeit der Zahlreihe endlicher Zahlen) dann kann man bei dieser ersten Unendlichkeit nach oben nicht stehen bleiben, denn sobald man bei ihr stehen bliebe, würde gleich jener Widerspruch des plötzlichen Sprunges des Endlichen in das Unendliche auftreten, den man nur vermeiden kann, wenn man eine schlechthin unendliche Menge von unendlichen Zahlen auch nach oben voraussetzt, also nach oben dem Raume auf Grund der Zahlreihe ebensowenig Grenzen setzt wie man ihm keine Grenzen nach unten gesetzt hat, d. h. wenn man dem Raume in seiner Ausdehnung nach oben, seiner Vergrösserung, ebenso keine Grenzen setzt, wie man seiner Verminderung nach unten auf Grund der Zahlreihe keine Grenzen gesetzt hat.

Wir haben im Obigen die einfachen Zahleinheiten durch alle Unendlichkeiten verschiedener Ordnungen hindurch nach oben und unten sich unbestimmt vermehren lassen nur deshalb, weil wir die unendliche Zahl nicht als eine einzige annehmen konnten, und zwar deshalb nicht, weil diese einzige unendliche Zahl den Widerspruch des plötzlichen Sprunges des Endlichen in das Unendliche enthielt. Denn wenn eine endliche Zahl mit Eins summiert die unendliche ergiebt, so ist das wirklich ein plötzlicher Sprung des Endlichen in das Unendliche, da hören offenbar die endlichen Zahlen auf, sie enden mit einer grössten endlichen Zahl, aus der durch die Hinzu-

fügung einer einzigen Einheit die unendliche entsteht. Damit also dieser plötzliche Sprung des Endlichen in's Unendliche vermieden werde, musste die Annahme der einzigen unendlichen Zahl verworfen, musste eine unendliche Zahl dieser Zahlen zugelassen, ja diese Zahl selbst noch in alle Unendlichkeiten vermehrt werden. Wir meinten nun, damit jenes Widerspsuchs des plötzlichen Sprunges des Endlichen in das Unendliche losgeworden zu sein, aber wir irren uns darin gewaltig, wir haben den Widerspruch nur verschoben und nicht aufgehoben, ja wir haben ihn, besser besehen, bei dieser Verschiebung zugleich unendlich vermehrt, und nur die Verschiebung hat uns verleitet, denselben aus den Augen zu verlieren. Mögen wir jene unendlichen Zahlen durch alle Unendlichkeiten hindurch vermehren, der plötzliche Sprung des Endlichen in das Unendliche ist damit gar nicht verschwunden, denn es bleiben immer in jeder einzelnen unendlichen Zahlreihe einer und derselben Ordnung solche Sprünge bestehen. Dies wollen wir nun im Folgenden auch beweisen, und am besten wird es sein, wenn wir es mit Hilfe einer Geraden thun.

Die unendlich grosse Gerade AB können wir durch die endliche Gerade AB (vgl. die Figur 1, Taf. I) so darstellen, dass wir in dieser den mittleren unendlichen Theil jener ersten punktiert und die beiden endlichen Endtheile derselben stetig ausgezogen darstellen. Die endliche Gerade AB stellt dann mit ihren Endpunkten A und B die beiden Endpunkte A und B der unendlichen Geraden AB, die die unendlich grosse Zahlreihe erster Ordnung darstellt, während die endlichen Theilstücke A.1, 1.2, 2.3, 3.4. etc. . , . die einfachen Zahleinheiten jener unendlichen Zahlreihe darstellen, da wir die einfachen Raumpunkte als solche nicht in unserer Wahrnehmung zu isolieren vermögen, um so eine ganz adequate Darstellung wenigstens des endlichen Theiles jener unendlichen Linie zu gewinnen. Wenn der Raum aber in's Unendliche theilbar ist, dann kann jedes endliche (resp. unendlich kleine und unendlich grosse) Raumstück als einfache Zahleinheit im arithmetischen Sinne gelten, weil dann die arithmetische untheilbare Zahleinheit als solche ein rein formaler Gedankenact ist, und dann wäre auch diese Darstellung des endlichen Theiles unserer unendlichen Linie ganz adequat, inadequat und symbolisch ist dann also nur jene Darstellung des unendlichen Theiles der unendlichen Geraden. Wir haben eben gesagt, dass unsere unendliche Gerade die unendliche Zahlreihe erster Ordnung darstellt. Bezeichnen wir nun die letzte Zahl in dieser Zahlenreihe mit ∞, dann werden offenbar die Zahlen ∞-1, ∞-2, ∞-3, etc. die unendlichen Zahlen derselben Ordnung darstellen die kleiner als ∞ sind. (Früher haben wir mit ∞

die kleinste unendliche Zahl bezeichnet, die unmittelbar aus den endlichen Zahlen entsteht und so den Widerspruch der unendlichen Zahl in sich enthält; jetzt wollen wir die Notwendigkeit der kleinsten unendlichen Zahl beweisen, indem wir die unendliche Zahl überhaupt voraussetzen, wir wollen dieselbe als die notwendige Folge des plötzlichen Sprunges des Endlichen in das Unnendliche, der in jedem Unendlichen notwendigerweise anzutreffen ist, beweisen, und gebrauchen so das Zeichen ∞ für die unendliche Zahl überhaupt.) Würden wir voraussetzen dass die Zahl ∞, die durch den Endpunkt B der unendlichen Geraden AB dargestellt wird, eine einzige ist, dann wäre die Zahl ∞-1 offenbar nicht mehr unendlich sondern endlich, und wir hätten dann den plötzlichen Sprung des Endlichen in das Unendliche vor uns, was doch unmöglich ist. Nun behaupte ich dass auch, wenn wir eine unendliche Anzahl der unendlichen Zahlen annehmen, wenn also nicht nur die Zahl ∞ sondern auch die Zahlen ∞-1, ∞-2, ∞-3, etc. unendlich sind, dieser Sprung nicht aufgehoben, sondern nur auf der unendlichen Geraden AB dem Anfang A zu verschoben wird.

Dies kann sehr leicht eingesehen werden, wenn die endlichen Zahlen 1, 2, 3, 4. . . , die bei dem Anfangspunkte A der unendlichen Geraden AB beginnen mit den unendlichen Zahlen ∞, ∞-1, ∞-2, ∞-3 . . . die bei dem Endpunkte B derselben Geraden beginnen verglichen werden. Die erste Reihe der endlichen Zahlen 1, 2, 3, 4 . . . stellt offenbar eine endlose Reihe von endlichen Zahlen von denen jede nachfolgende um eine Einheit grösser als die vorhergehende ist; die zweite Reihe der unendlichen Zahlen ∞, ∞-1, ∞-2, ∞-3, etc. . . . stellt eine endlose Reihe von unendlichen Zahlen dar, von denen jede nachfolgende um eine Einheit kleiner als die vorhergehende ist. Nun ist es offenbar, und man sieht es unmittelbar aus der Geraden AB selbst ein, dass sich diese beiden Reihen in entgegengesetzter Richtung aufeinander zu bewegen (was seinen arithmetischen Ausdruck darin findet, dass die erste Reihe in gleichem Tempo zunimmt in dem die zweite abnimmt), und sie müssen offenbar, da sie auf einer und derselben Geraden liegen, irgendwo aufeinander stossen. Wenn wir diesen Begegnungspunkt mit C bezeichnen, so wird C notwendigerweise von B in unendlicher aber er wird offenbar von dem Punkte A in endlicher Entfernung liegen. Denn wenn wir voraussetzen, dass der Begegnungspunkt C nicht nur von dem Punkte B sondern auch von dem Punkte A in unendlicher Entfernung liegt, dann fragt es sich ob der unmittelbar vor ihm liegende dann der Zahl ∞-1 entsprechende Punkt auch unendlich weit vom Punkte A entfernt liegt; ist er unendlich weit von diesem entfernt, und der vor ihm liegende

auch, dann haben wir in Wahrheit die Rolle des Punktes B auf den Punkt C übertragen, also nichts gewonnen; ist er aber von dem Anfangspunkte A endlich weit entfernt, dann stellt der Punkt C eben den gesuchten Sprung des Endlichen in das Unendliche dar. Ist der Punkt C unendlich weit von dem Punkte A dann stellt AC, wie gesagt, dasselbe was zuvor AB darstellte, nämlich das unendlich Grosse erster Ordnung, so dass dann AB das unendlich Grosse zweiter Ordnung darstellen würde. Will man dann weiter in dem Punkte D auf der Geraden AC nicht den gesuchten Begegnungspunkt der endlichen und der unendlichen Zahlenreihe zulassen, dann muss AD das unendlich Grosse erster, AC zweiter und AB dasjenige dritter Ordnung darstellen. Wie man also sieht, sobald man den Begegnungspunkt in der simultanen unendlichen Zahlenreihe nicht anerkennen will, verwandelt sich diese Reihe in diejenige zweiter Ordnung d. h. sie hört auf die unendliche Reihe erster Ordnung zu sein, was nichts anderes bedeutet als dass, wenn sie dies bleiben soll, sie notwendigerweise jenen Begegnungspunkt, jenen plötzlichen Sprung des Endlichen in das Unendliche enthalten muss.*)

*) In der Zeitreihe ist die Reihe der endlichen Zahlen wirklich endlos, da sich da nirgends eine letzte endliche Zahl ergeben kann, in der Raumreihe dagegen, wie die obigen entscheidenden Ausführungen zeigen, ist die Reihe der endlichen Zahlen nicht endlos, man muss schliesslich zu einer grössten endlichen Zahl gelangen, die um Eins vermehrt unendlich wird. Jede Zahleinheit im Raume lässt sich in einem einfachen Zeitaugenblicke als solche auffassen und als Element der zählenden Thätigkeit, die in der Zeit geschieht, auftreten. Solange sich nun dieses Zählen auf die endlichen Zahlen (an einer Geraden) bezieht, besteht kein Widerstreit zwischen der endlichen Zahl in dem Raume und derjenigen in der Zeit: wenn man aber dabei auf den Begegnungspunkt der endlichen und der unendlichen Zahlen (in der Geraden) kommt, so würde gleich ein Widerstreit da sein, die Zahl der gezählten Einheiten in der Zeit, d. h. die Zahl der Zeitaugenblicke wäre endlich, während die Zahl der Raumeinheiten nun plötzlich unendlich würde. Nun wenn dieser Widerstreit nicht bestehen soll, muss man voraussetzen, dass in demselben Augenblicke in dem jener Sprung in der simultanen unendlichen Zahlenreihe geschieht, auch ein entsprechender Sprung in der endlosen Zahlenreihe der Zeit entsteht, und dieser Sprung bestände offenbar darin, dass von dem Augenblicke an sich die unendliche ewig zukünftige Zukunft zu verwirklichen begänne. Und thatsächlich, wenn die simultane unendliche Zahlreihe wirklich bestünde, müsste bei dem Zählen derselben an diesem Punkte auch jener Sprung in der unendlichen Zukunft entstehen, wodurch der Widerspruch jenes Sprunges des Endlichen in das Unendliche nur noch eklatanter würde, da er nunmehr auch in der Zeit selbst stattfinden müsste wo er doch so sehr unmöglich ist. Wir fühlen ja unmittelbar und wissen es mit absoluter Gewissheit, dass, so weit wir in die Zukunft auch gehen mögen, wir immer nur eine endliche Strecke von ihr durchlaufen können, und dass jene Verwirklichung der absolut zukünftigen Zukunft nie auftreten kann, was nur beweist, dass die unendliche Zahlreihe eben nicht möglich ist, weil sie diesen Sprung in der Zeit voraussetzt.

Ist nun der Begegnungspunkt der endlichen Zahlreihe 1, 2, 3, 4 .... und der unendlichen Zahlreihe ∞, ∞-1, ∞-2, ∞-3 etc. in der unendlichen (d. h. aus unendlich vielen Theilen bestehenden) Geraden AB notwendig, dann stellt dieser Begegnungspunkt, wie gesagt, den plötzlichen Sprung des Endlichen in das Unendliche dar. In diesem Punkte hört die endliche Zahlreihe auf, sie endet mit einer grössten endlichen Zahl, die nur um eine Einheit vermehrt unendlich wird, und diese unendliche Zahl stellt nun die kleinste der unendlichen Zahlen dar, deren es (bis zu dem anderen Ende der Geraden B) eine unendliche Menge giebt. Dass nun aus einer endlichen Zahl, und sei sie noch so gross, durch die Hinzufügung einer einzigen Einheit eine unendliche Zahl entsteht, ist etwas völlig und absolut undenkbares, ist eine schreiende contradictio in adjecto, und diese contradictio in adjecto müsste bestehen, wenn die unendliche Zahl wirklich bestünde. Wir haben die unendlich grosse Zahl der unendlichen Zahlen einfacher Zahleinheiten voraussetzen müssen, weil nur dadurch dieser Widerspruch, der sofort bei der einen einzigen unendlichen Zahl erscheint, anscheinend verschwindet: wir haben dann die einfachen Zahleinheiten immer weiter auflösen müssen, um nur dieses Widerspruchs loszuwerden. Wir bemerken aber nicht dabei, dass erstens, so weit wir jenes Zerfallen der einfachen Einheiten in noch einfachere auch fortsetzen mögen, diese einfachen Einheiten immer wieder erscheinen (sie werden nur verschoben und nicht aufgehoben) und somit bei der letzten Unendlichkeit, wenn die Unendlichkeit der Zahlreihe nach unten als eine bestimmt unendliche angenommen wird (ist sie eine unbestimmt unendliche dann sind keine einfachen Zahleinheiten da), was aus dem eben angegebenen Grunde consequenter ist, jener Widerspruch in der bekannten Weise stattfindet und stattfinden muss, und zweitens, dass selbst wenn man diese einfachen Einheiten als nirgends bestehend mehr annimmt, sondern jede Einheit für eine zusammengesetzte erklärt, derselbe Widerspruch bei jeder unendlichen Reihe einer und derselben Unendlichkeitsordnung wieder erscheint. Denn schliesslich macht es ja keinen Unterschied, ob die gezählten Einheiten einfach oder zusammengesetzt sind, sobald man sie zählen kann, sobald man sie als Einheiten zusammenfassen kann, muss man immer bei dem Zählen derselben zu jenen unendlichen Zahlreihen verschiedener Ordnungen gelangen, von denen jede in sich den Widerspruch des Sprunges des Endlichen in das Unendliche enthält. Illusorisch war es also ganz und gar als wir, um den Widerspruch des plötzlichen Sprunges des Endlichen in das Unendliche bei der einen einzigen unendlichen Zahl zu vermeiden, zunächst die ein-

fachen Zahleneinheiten in's Unendliche der Unendlichkeiten vermehrten und sie schliesslich vollkommen in zusammengesetzte Einheiten auflösten: denn jener Widerspruch erscheint wiederum in seiner ganzen furchtbaren Gestalt in dem ganzen Gebiete dieser unendlich vielen zusammengesetzten Einheiten wieder, und zwar an unendlich vielen Stellen derselben.*)

Nachdem wir so die drei Grundwidersprüche des Unendlichen einzeln betrachtet haben, wollen wir sie nun in ihrem Zusammenhang betrachten. Der erste Widerspruch, der Widerspruch der unendlichen Zahl, führt, wie wir gesagt haben, zu der unbestimmten Unendlichkeit des Raumes nach oben und zwar dadurch dass er die unbestimmte

* G. Cantor hat einen immerhin bemerkenswerthen Versuch gemacht, das Unendliche von seinen Grundwidersprüchen zu befreien. Um den Widerspruch der unendlichen Zahl und zugleich denjenigen des plötzlichen Sprunges des Endlichen in's Unendliche zu vermeiden, hat er die Voraussetzung gemacht, dass die unendliche, oder, wie er sie nennt, transfinite Zahl nicht aus endlichen Zahlen durch die Hinzufügung der Einheit entsteht, und um den Widerspruch der Endlichkeit jedes Unendlichen zu vermeiden hat er das unendlich Kleine verworfen, indem er auf Grund der Eigenschaften seiner transfiniten Zahlen die Unmöglichkeit desselben folgert.

Seine transfinite Zahlenlehre gründet Cantor auf der allgemeinen Mengenlehre, indem er die Zahlen unter den Begriff wohlgeordneter Mengen subsumiert (vgl. darüber seine Aufsätze: 1) in der „Zeitschrift für Philosophie und phil. Kritik", 1887—8; 2) in den „Mathematischen Annalen", Bd. XXI und besonders die streng systematische Darstellung in derselben Zeitschrift Bd. 46 und 49 in dem Aufsatze „Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre"). Wir beschränken uns in der folgenden Darstellung seiner Lehre nur auf dasjenige was mit dem Unendlichen in unmittelbarer Verbindung steht.

Drei Grundprincipe sind es nach Cantor, denen gemäss die Bildung der unendlichen Zahlenreihe erfolgt. Das erste Princip ist im wesentlichen das Bildungsprincip der endlichen Zahlen und besteht darin, dass der einen Einheit resp. einer aus Einheiten schon gebildeten Zahl eine neue Einheit hinzugefügt wird. Auf Grund dieses Princips entsteht die endlose Reihe endlicher Zahlen, in der es wohl ein erstes, in der es aber kein letztes Glied giebt. Die so gewonnenen endlichen Zahlen bilden die Zahlenklasse (I). So widerspruchsvoll es nun auch wäre, von einer grössten Zahl der Zahlenklasse (I) zu reden, hat es doch, so sagt Cantor, nichts Anstössiges, sich eine ganz neue Zahl, wir wollen si ω nennen, zu denken, die die Gesammtheit aller Zahlen der ersten Zahlenklasse bedeutet ohne selbst ein Glied dieser Reihe zu sein (man kann dieselbe höchstens als die Grenze bezeichnen, welcher die endlichen Zahlen zustreben, ohne sie je zu erreichen). Und dies ist das zweite Erzeugungsprincip, welches dahin zu definieren ist dass, wenn eine bestimmte Reihe ganzer realer Zahlen vorliegt, von denen keine grösste existiert, man eine neue Zahl schaffen muss, die die Gesammtheit aller diesen Zahlen bedeutet. Dieses zweite Erzeugungsprincip in Verbindung mit dem ersten gebracht erzeugt nun die schlechthin unbestimmt unendliche Reihe transfiniter Zahlen hervor. Denn zu der ersten unendlichen Zahl ω können nun auf Grund des ersten Princips Einheiten hinzugefügt werden, die zu den transfiniten Zahlen von der Form $\omega+1$, $\omega+2 \ldots \omega+\nu$ führen; die Reihe dieser Zahlen kann offenbar auf Grund

Unendlichkeit der Zahlreihe setzt. Dem Beweis für die Unendlichkeit des Raumes nach oben aus der Zahlreihe, insofern die Forderung der Vollendbarkeit dieser Reihe im Unendlichen gestellt wird — welche Forderung den Widerspruch der unendlichen Zahl in sich enthält — gesellt sich der Bewiss für die Unendlichkeit des Raumes nach oben und nach unten aus der Zahlreihe, insofern die Forderung gestellt wird, den Widerspruch des plötzlichen Sprunges des Endlichen in das Unendliche zu entfernen, welcher Widerspruch dann entsteht wenn man jenen ersten Widerspruch nicht gelten lassen will. Während nun jene erste Forderung auf der Voraussetzung der einfachen Zahleinheit als des Grundelements der Zahlreihe

des zweiten Princips wieder zu einer neuen Zahl 2 ω führen, wie dieses Princip bei der Reihe endlicher Zahlen 1, 2, 3....v zu des Zahl ω geführt hat. Und nun ist es begreiflich wie weiter auf Grund der beiden Principe Zahlen von der Form 3 ω, 4 ω . . . . ω^2, ω^3 . . . . ω^ω . . . . $\omega^{2\omega}$ . . . ω^{ω^ω} . . . . und so in alle Unendlichkeiten hinaus entstehen. Wie man also sieht haben wir auf Grund der beiden bisherigen Principe nur zwei Zahlenklassen bekommen, diejenige der endlichen, die Zahlenklasse (I), und diejenige der unendlichen Zahlen. Ob sich nun die transfiniten Zahlen nicht auf Grund eines neuen Princips in einzelne Gruppen eintheilen lassen, die jener ersten Zahlenklasse entsprechen?

In der Aufstellung dieses Princips kommt nun Cantor zu der seltsamen Lehre, dass die Cardinal- und die Ordinalzahl in dem Gebiete der transfiniten Zahlen auseinandergehen, während sie in dem Gebiete der endlichen Zahlen miteinander zusammenfallen. Der Hauptsatz von dem diese Lehre ausgeht besteht in der Behauptung, dass der wesentliche Unterschied der unendlichen von den endlichen Mengen darin besteht, dass die unendliche Menge Theilmengen hat, die mit ihr gleich sind, während die endlichen Mengen keine solchen haben. Die unendliche Menge der endlichen Zahlen

(a) 1 2 3 4 5 . . . . . . ist z. B. mit der unendlichen Menge der endlichen Zahlen.

(b) 2 3 4 5 6 . . . . . . gleich, da offenbar jedes Glied der ersten Reihe ein entsprechendes Glied in der zweiten Reihe hat (denn jede endliche Zahl hat eine ihr nachfolgende), während zwei verschiedene endliche Mengen nie eine solche eindeutige Zuordnung ihrer Elemente zulassen. Und hier liegt nun der Ursprung des anderen Hauptsatzes jener Lehre wonach die Cardinalzahl oder die Mächtigkeit ein von der Ordinalzahl schliesslich abhängiger Faktor ist, welche Abhängigkeit bei den unendlichen Mengen zum deutlichen Vorschein kommt. Die unendliche Reihe

(c) 1 2 3 4 5 6 . . . . . . und die unendliche Reihe

(d) 2 3 4 5 6 . . . . . . 1 sind offenbar miteinander nicht gleich da eine eindeutige Zuordnung der Elemente in diesen beiden Reihen nicht vorhanden ist. Man kann aber sehr leicht die Reihe (d) in die Form der Reihe (c) bringen (wenn man das Glied 1 der Reie (b) vor diese Reihe setzt), man kann sie also gleich machen. Wie man also sieht, hängt es bei den unendlichen Mengen ganz von der Ordnung der Elemente in diesen Mengen ab, ob sie miteinander gleich oder ungleich sind. Um nun festzuhalten, wann sie gleich und wann sie ungleich sind, unterscheidet Cantor den Begriff der Gleichheit im engeren Sinne von dem Begriffe den Ähnlichkeit. Ähnlich

beruht, beruht wohl auch diese zweite Forderung in ihrem Anfang auf jener Grundvoraussetzung, aber in ihrem Fortgang führt sie auf die Negation dieser Grundvoraussetzung. Von den drei geometrischen Gründen, die für die Unendlichkeit des Raumes nach oben und nach unten sprechen, spricht der erste Grund ganz ebenso gegen die Möglichkeit der einfachen Zahleinheit im Raume, d. h. des einfachen Raumpunktes, wie dies der zweite Beweis auf Grund der Zahlreihe thut, nur mit dem Unterschied, dass er dies direkt und jener es im Resultat thut. Die beiden anderen geometrischen Gründe sprechen nicht direkt gegen die Möglichkeit des einfachen Raumpunktes, sondern indirekt, indem sie jeden vorausgesetzten einfachen

sind zwei Mengen wenn sie bei gegebener Ordnung der Elemente eine eindeutige Zuordnung derselben zulassen (so sind die unendlichen Mengen (a) und (b) einander ähnlich, während die unendlichen Mengen (c) und (d) einander nicht ähnlich sind), sie sind dann aber zugleich auch gleich oder aequivalent miteinander, so dass zwei unendliche Mengen, sobald sie einander ähnlich gemacht werden können, auch einander aequivalent werden.

Und der letzte Satz bildet nun das dritte Erzeugungsprincip unendlicher Zahlen, welches zugleich das Eintheilungsprincip dieser Zahlen in Zahlenklassen ist. Die Reihe aller Zahlen von der Form $\omega, \omega + 1 \ldots \nu_0\omega^{\mu} + \nu_1\omega^{\mu-1} + \ldots \nu_{\mu-1}\omega + \nu_{\mu-1} + \ldots$ $\omega^{\omega} \ldots\ldots$ (bis zu irgend einer beliebigen unendlichen Zahl dieser Reihe) lässt sich leicht in die Form einer einfachen unendlichen Reihe bringer [der Reihe (c)] und ist also mit dieser Reihe aequivalent d. h. hat die Mächtigkeit der Gesammtheit aller endlichen Zahlen d. h. die Mächtigkeit der Zahlenklasse (I). Wie nun die Mächtigkeit der ersten Zahlenklasse nichts anderes ist als die Gesammtheit aller dieser Zahlen, so wird auch die Gesammheit aller obigen Zahlen von der Form $\omega, \omega + 1 \ldots$ eine höhere und zwar die nächst höhere Mächtigkeit darstellen, und so werden diese Zahlen die Zahlenklasse (II) darstellen. Auf Grund desselben Princips wird nun auch die Gesammtheit aller Zahlen der zweiten Zahlenklasse die Mächtigkeit der Zahlenklasse (III) darstellen u. s. f. in infinitum so dass wir auf Grund dieses Princip (welches Cantor auch als Beschränkungsprincip bezeichnet) wirklich eine Eintheilung der transfiniten Zahlen in einzelne Zahlenklassen gewinnen.

Diese transfinite Zahlenlehre Cantor's vermeidet zwar scheinbar die beiden ersten Grundwidersprüche des Unendlichen, aber sie thut das nur, indem sie einen neuen noch viel grösseren Widerspruch des Unendlichen dabei acceptiert und zu Hilfe nimmt. Der Widerspruch der unendlichen Zahl ist zwar dadurch scheinbar vermieden, dass man die unendliche Zahl gänzlich ausserhalb der Reihe endlicher Zahlen setzt, Cantor bemerkt aber (um zunächst diesen secundären Widerspruch in Betracht zu ziehen) nicht, wie das Unendliche resp. die unendliche Zahl dabei eigentlich aufhört die Menge der endlichen Zahlen mehr zu sein und zu bedeuten. Denn liegt die unendliche Zahl nicht mehr in der Reihe der endlichen Zahlen, dann ist sie nicht mehr die Menge dieser Zahlen, resp. die Menge einfacher Zahleinheiten. Jede endliche Zahl stellt eine bestimmte Menge einfacher Zahleinheiten dar, und wenn diese Menge unendlich sein soll, dann kann das nur bedeuten, dass wir indem wir sie in end-

Raumpunkt in einfachere Punkte zerfallen lassen, ganz ebenso wie dies der zweite Beweis auf Grund der Zahlenreihe thut

Wenn wir nun weiter auf den Zusammenhang der drei letzteren Beweisgründe eingehen (der beiden geometrischen Gründe einerseits und des zweiten Beweises auf Grund der Zahlreihe andererseits), können wir leicht einsehen, dass diese drei Beweise in ihrem Resultat die Grundvoraussetzung zerstören auf der sie beruhen. Denn wenn die beiden geometrischen Gründe einerseits dahin führen, die Zahl der einfachen Raumpunkte als eine sowohl nach oben wie nach unten absolut unbestimmt unendliche hinzustellen, und wenn der zweite Beweis auf Grund der Zahlreihe dahin führt ebenfalls

lichen Mengen zusammenfassen nie zu einem letzten Gliede dieser endlichen Mengen dabei gelangen, dass also die unendliche Menge die Grenze bedeutet, der die endlichen Mengen direkt zustreben ohne sie zu erreichen. Wenn die unendliche Menge wirklich die Menge der einfachen Einheiten resp. der endlichen Mengen bedeutet, dann stellt sie und muss sie die direkte Grenze der endlichen Mengen bedeuten, und die Frage ob die endlichen Zahlen diese Grenze erreichen oder nicht erreichen können, muss durchaus von dieser unzweifelhaften Voraussetzung ausgehen dass die unendliche Zahl die direkte Grenze der endlichen Zahlen bedeutet, dass sie also in der Fortsetzung, dieser Zahlen liegt. Entweder also muss der Widerspruch der unendlichen Zahl anerkannt werden oder — die unendliche Zahl hört auf endliche Zahlen und Mengen in sich zu enthalten, tertium non datur, welches Dilemma Cantor nicht eingesehen hat. Läge die unendliche Zahl wirklich ganz ausserhalb der Reihe endlicher Zahlen dann bestünde auch der Widerspruch des plötzlichen Sprunges des Endlichen in das Unendliche nicht. Denn dieser Widerspruch entsteht und besteht nnr dann wenn die unendliche Zahl die direkte Grenze der endlichen Zahlen bedeutet d. h. in der direkten Fortsetzung dieser Zahlen liegt und man den Widerspruch der unendlichen Zahl dabei vermeiden will, folglich besteht dieser Widerspruch nicht, wenn jene Zahl ganz ausserhalb der Reihe endlicher Zahlen liegt.

Diese Grundvoraussetzung, wonach die unendliche Zahl eine von den endlichen Zahlen toto genere verschiedene ist, soll etwas sein, was aus einer anderen Grundvoraussetzung resp. aus einer wesentlichen Eigenschaft der unendlichen Mengen direkt folgt. Wenn jede unendliche Menge Theilmengen hat, die mit ihr aequivalent sind, wie z. b. die Mengen (a) und (b) solche sind, [die Menge (b) ist Theilmenge der Menge (a)] dann ist offenbar $\omega - 1 = \omega$ d. h. wenn ich von der unendlichen Zahl ω eine Einheit wegnehme bleibt diese Zahl unverändert, es entsteht dann keine endliche Zahl, der Widerspruch des plötzlichen Sprunges des Endlichen in das Unendliche also auch der Widerspruch der unendlichen Zahl besteht nicht. Wir haben gesehen wie Cantor auf Grund dieser Grundeigenschaft der unendlichen Menge die transfiniten Zahlen in Zahlenklassen eintheilt und sehen somit, wie auf derselben seine ganze transfinite Zahlenlehre beruht. Richtig und unzweifelhaft ist es (man kann es am besten aus dem Vergleich dieser zweien unendlichen Reihen ersehen:

(e) 1 2 3 4 5 6 . . . . . .

(f) 1 4 9 16 25 . . . . . . Diese beiden Reihen enthalten sicherlich die gleiche Anzahl von Elementen, da jede endliche Zahl ein Quadrat hat), dass, wenn die unendliche Menge endlicher Zahlen wirklich bestünde, sie notwendigerweise Theilmengen

die Zahl der einfachen Raumpunkte als eine absolut unbestimmt unendliche hinzustellen, so bedeutet das nicht mehr und nicht weniger, als dass sie dasjenige, dessen Zahl sie auf die Weise genau bestimmen wollen, den einfachen Raumpunkt nämlich, absolut unu vollständig zerstören. Kann man dann aber noch von dem Bestehen eines realen aus Theilen bestehenden Raumes reden, wenn so nirgends etwas Einfaches in einem solchem Raume anzutreffen ist, wenn alles in ihm zusammengesetzt ist? Offenbar hört ja damit der reale Raum selbst als solcher zu existieren auf. Denn jedes Zusammengesetzte besteht nach seiner Definition aus Theilen, wenu nun weiter auch diese Theile aus Theilen bestehen u. s. w., wenn also

hätte, die mit ihr aequivalent sind. Statt darin aber einen wesentlichen Widerspruch des Unendlichen zu erblicken, erblickt Cantor darin die Definition des Unendlichen selbst (vgl. Math. Annal. Bd. 46 § 6 und auch Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen, 1893, § 5, Satz 64), was offenbar ein sonderbares logisches Verfahren ist. In dem eben angeführten Beispiele müsste thatsächlich die Menge der endlichen Quadratzahlen gleich der Menge endlicher Zahlen überhaupt sein und doch kann sie dies zugleich auch nicht sein, da in der Reihe aller endlichen Zahlen es ausser Quadratzahlen offenbar noch mehr und zwar viel mehr Zahlen giebt: dass eine Menge einer anderen Menge gleich und ihr zugleich auch nicht gleich ist, ist ein offenbarer und unzweideutiger Widerspruch Entweder müsste man anerkennen, dass der Widerspruch im Reiche des Unendlichen möglich ist, oder man muss das Unendliche, welches solch' eine widerspruchsvolle Beschaffenheit hat, selbst verwerfen. Man sagt aber, dass das Unendliche, wenn es besteht, offenbar andere Eigenschaften haben müsse als das Endliche. Gewiss, aber diese Eigenschaften dürfen dann nichts widersprechendes in sich enthalten, wie es unzweifelhaft mit dieser Eigenschaft des Unendlichen der Fall ist.

Aber selbst wenn man die widerspruchsvolle Definition des Unendlichen im Sinne Cantor's gelten lässt folgt daraus gar nicht dasjenige was er daraus deduciert hat. Die Gleichung $\omega - 1 = \omega$ folgt aus dieser Definition wohl, aber zugleich folgt aus derselben auch die entgegengesetzte Gleichung $\omega - 1 = \omega - 1$. Wenn $\omega - 1 = \omega$ einzig und allein aus jener Definition folgte, dann wäre in Wahrheit kein Fortschritt der transfiniten Zahlen möglich, welcher Fortschritt bei Cantor auch wirklich nur mit Mühe und Noth zu Stande gebracht wird. Er muss zu diesem Zwecke das logische Verhältniss der Cardinal- und der Ordinalzahl umkehren, er muss weiter den fadenscheinigen Unterschied der Ähnlichkeit und der Gleichkeit machen, er muss dann schliesslich diesen Unterschied negieren (denn was anderes bedeutet das Ähnlichmachen der unähnlichen unendlichen Mengen als diese Negation des Unterschieds beider Begriffe), um nur einen möglichst rationalen Fortschritt jener Zahlen zu ermöglichen. Und doch schliesslich gelingt dieser Fortschritt nicht. Denn wenn die kleinste unendliche Cardinalzahl ($\bar{\bar{\omega}}$) und die kleinste unendliche Ordinalzahl (ω) miteinander absolut zusammenfallen (und sie müssen zusammenfallen, trotz aller gegentheiligen Behauptungen Cantor's, da die erste unendliche Cardinalzahl die Menge aller endlichen Cardinal- und die erste unendliche Ordinalzahl die Menge aller endlichen Ordinalzahlen bedeutet und endliche Cardinal- und Ordinalzahl eins und dasselbe sind), dann können Cardinalzahl und Ordinalzahl in dem ganzen endlosen Gebiete der unendlichen

das Zusammengesetzte immer wieder aus dem Zusammengesetzten zusammengesetzt ist u. s. f. in infinitum und man nie zu einfachen Theilen gelangt, dann existiert offenbar gar nichts was das Zusammengesetzte wirklich zusammensetzte, und das sogenannte Zusammengesetzte ist nichts anderes als ein leeres Wort. Der Beweis, den ich hier vorbringe, ist ja alt, aber das vermindert seine Beweiskraft gar nicht für diejenigen die denken wollen und sich nicht von den Worten verleiten lassen. Wie es bei der Zeit, wenn die zwischen zwei aufeinander folgenden Zeitaugenblicken der Gegenwart (die gewöhnlich nur deshalb als untheilbare gefasst werden weil sie grössenlose matematische Nullpunkte darstellen sollen) dazwischen-

Zahlen nicht auseinander treten, sie müssen auch da miteinander zusammenfallen, so dass wenn die Gleichung $\bar{\omega}+1=\bar{\omega}$ besteht dann auch die Gleichung $\omega+1=\omega$ besteht, so dass der Fortschritt der transfiniten Ordinalzahlen nur ein illusorischer ist. Wie illusorisch der Fortschritt der Ordinalzahlen ist, ersieht man am besten daraus, dass die aufeinander folgenden transfiniten Cardinalzahlen nicht mehr durch die Hinzufügung der Einheit auseinander hervorgehen, was offenbar absurd ist, da es gerade die Cardinalzahlen sind, die aus der Zusammenfügung von Einheiten entstehen. Aus jener widerspruchsvollen Beschaffenheit der unendlichen Menge aller endlichen Zahlen folgt in Wahrheit mit derselben Notwendigkeit, dass es unendliche Mengen giebt die grösser als diese Menge sind und dass es solche unendliche Mengen nicht giebt, wie es aus derselben Beschaffenheit jener Menge mit ganz derselben Notwendigkeit folgt, dass es unendliche Mengen giebt die kleiner als sie sind und dass es keine solche Mengen giebt. Diese Folgerungen sind einzig und allein logisch, wenn man andere Folgerungen daraus ziehen will, so ist man wie Cantor genöthigt, logisch unzulässige Voraussetzungen zu machen, um nur die Widersprüche des Unendlichen möglichst zu verdecken

Man könnte uns die Frage vorlegen, warum wir den hier erwähnten Widerspruch des Unendlichen, der von so einer fundamentalen Bedeutung ist, nicht in der Reihe jener drei Grundwidersprüche des Unendlichen erwähnt haben. Das haben wir deshalb nicht gethan, weil einerseits jene drei Grundwidersprüche zur Negation des discreten Unendlichen führen, ohne damit die Notwendigkeit des continuirlichen Unendlichen nach sich zu ziehen, während der hier erwähnte Widerspruch, wie wir weiter unten im Text sehen werden, direkt zu diesem Unendlichen hinüberführt, und weil andererseits von jenen drei Grundwidersprüchen die Widersprüche der unendlichen Zahl und des plötzlichen Sprunges des Endlichen in's Unendliche auf der Voraussetzung, dass die unendliche Menge die unendliche Menge endlicher Mengen ist, beruht, während der hier erwähnte Widerspruch direkt zur Negation dieser Voraussetzung führt, wie wir dies schon ausgeführt haben. Diese Gründe schaffen offenbar einen so tiefliegenden Unterschied zwischen jenen drei Grundwidersprüchen einerseits und diesem vierten Widerspruche andererseits, dass unsere Scheidung derselben vollkommen gerechtfertigt erscheint.

Was schliesslich den Cantor-Peano'schen Beweis gegen die Möglichkeit des unendlich Kleinen betrifft, so beruht er so durchaus auf den Grundprincipien transfiniter Zahlenlehre, dass er zusammen mit dieser hinwegfällt, und wir auf ihn nicht näher einzugehen brauchen.

liegende Veränderung nicht für einfach sondern für zusammengesetzt betrachtet wird, diese Veränderung eigentlich nie zu Stande kommen kann, weil sie aus einer unendlichen Anzahl von Veränderungen besteht, so dass der eine Theil derselben nur dadurch entstehen kann, dass ihm ein anderer vorhergeht u. s. w. in's Unendliche und zwar in die Unendlichkeit der Unendlichkeiten (vgl. die Anmerkung zur Seite 136), ebenso kann der reale Raum nicht bestehen wenn es in demselben nur lauter zusammengesetzte Einheiten giebt, und man nie auf letzte reale Elemente gelangt. Denn wenn jeder Raumtheil aus anderen Theilen zusammengesetz ist und jeder dieser wieder aus anderen u. s. w. in infinitum, so muss man ja offenbar einmal zu wirklichen Theilen gelangen, die jene zusammengesetzten Theile zusammensetzen, d. h. man muss auf letzte weiter nicht theilbare Theile gelangen.

Dass nun andererseits wirklich, wenn der Raum als aus einfachen Punkten bestehend vorausgesetzt wird, diese einfachen Raumpunkte notwendigerweise verschwinden müssen und mit ihnen der ganze Raum, ist etwas unzweifelhaftes, solange man Raumpunkte von einer einzigen Art, d. h. von der Art grössenloser Nullpunkte voraussetzt, und das ist nur dann nicht mehr der Fall, wenn zwei wesentlich verschiedene Punktarten des Raumes unterschieden werden, so wie wir es früher ausgeführt haben. Wenn der Raum ein leeres neben den realen Dingen bestehendes Wesen wäre, dann müssten thatsächlich die ihn zusammensetzenden Raumpunkte grössenlose Nullpunkte sein, und der zweite geometrische Grund für die Unendlichkeit des Raumes nach unten tritt dann in seine volle Kraft, da offenbar zwischen je zwei solchen Punkten immer noch ein Punkt liegt u. s. f. in infinitum, so dass wir dann den leeren Raum in lauter zusammengesetzte Theile zerlegen, und dadurch in seiner Existenz vollkommen und absolut aufheben müssen. Und es ist kein Wunder, dass dem leeren Raume solch' ein Schicksal beschieden ist: aus dem Nichts geboren, muss er wieder in das Nichts zurücksinken sobald er ernstlich versucht sich im Sein zu behaupten: einfache Punkte muss dieser Raum setzen und schliesslich heben ihn diese einfachen Punkte auf, indem sie sich selbst aufheben. Der leere Raum kann also als ein Discretum gar nicht gefasst werden und höchstens könnte er noch als ein Continuum gefasst werden.

Bevor wir nun auf diesen neuen Begriff des Raumes übergehen, wollen wir das logische Verhältniss und die begriffliche Bedeutung zweier Grundbegriffe betrachten, die in unseren bisherigen Ausführungen so eine grosse Rolle gespielt haben,

und dies sind die Begriffe der bestimmten und der unbestimmten Unendlichkeit.

Aus unseren bisherigen Ausführungen folgt nämlich deutlich, dass man den Begriff der unbestimmten von demjenigen der bestimmten Unendlichkeit ebenso klar unterscheiden muss, wie man den Begriff der unbestimmten von derjenigen der bestimmten Endlichkeit klar unterscheidet. Zugleich folgt aus diesen Ausführungen dass diese beiden Begriffspaare in sehr enger Beziehung zueinander stehen, ja dass, besser besehen, das erste Begriffspaar unmittelbar aus dem zweiten folgt. Wir haben ganz klare Begriffe und wissen ganz genau, was die bestimmte und was die unbestmmte Endlichkeit bedeutet: jede endliche Raumstrecke, in der wir klar die einzelnen diskreten zusammengesetzten Raumeinheiten unterscheiden, giebt uns die klare Vorstellung von der ersten, die Zeitreihe selbst aber die von der zweiten. Nun, die bestimmte oder die vollendete Unendlichkeit bedeutet nichts anderes als den Versuch, die unbestimmte Endlichkeit als bestimmte zu denken, und da dies offenbar nicht gelingt solange man in dem Endlichen verbleibt, denkt man sich das Unendliche als den Vollzug dieser Forderung. Aber das so gewonnene Unendliche zeigt sich bei näherem Zusehen als etwas was gar nicht so abgeschlossen ist um jene unbestimmte Endlosigkeit der Zeit und der Zahlreihe zum vollständigen und absoluten Stillstand zu bringen, sondern erweist sich als etwas, was nun selber weiter vermehrt werden kann. Und nun zeigt sich das seltsame Schauspiel: jenes bestimmte Unendliche, das wir uns als den absoluten Abschluss der unsere Phantasie durch ihre Endlosigkeit so sehr ermüdenden unbestimmten Endlichkeit dachten, wird seinerseits nur ein Glied der nun noch grauenhafteren Endlosigkeit der unbestimmten Unendlichkeit, und diese unbestimmte Unendlichkeit ist nun leider überhaupt nicht mehr fähig, zum absoluten Abschluss gebracht zu werden. Sie produciert zwar immer neue Unendlichkeitsreihen, in denen jene unsere Forderung der Bestimmtheit der unbestimmten Endlichkeit erfüllt wird, aber sie selbst wird dabei umso unbestimmter, und je mehr wir in dieser Production von immer neuen Unendlichkeiten fortgehen, desto grösser und desto deutlicher wird die absolute Unbestimmtheit der unendlichen Reihe dieser Unendlichkeiten verschiedener Ordnungen.

Woher das? Für uns ist es, nach dem eben Ausgeführten, nicht mehr schwer, dies anzugeben. In der absolut. endlosen Reihe der Unendlichkeiten verschiedener Ordnungen spiegelt sich die unbestimmte Endlichkeit d. h. die Endlosigkeit der Zeitreihe ebenso

wieder, wie sich in der absolut geschlossenen Unendlichkeit der Glieder jeder dieser Unendlichkeitsreihen verschiedener Ordnungen die bestimmte Endlichkeit der Raumreihe wiederspiegelt. Nie könnten wir uns die endlose Zeit- und Zahlreihe als in der Unendlichkeit abgeschlossen denken, nie könnten wir diese Forderung des Abschlusses beider in der Unendlichkeit erheben, wenn uns nicht irgendwo das Beispiel der Vollendung einer endlichen Reihe vorläge: die vollendete Unendlichkeit der Zeit- und der (abstrakten) Zahlreihe (jener ersten in der Vergangenheit) ist nichts anderes, als die endliche bestimmte Reihe selbst nur so gedacht, dass die Anzahl der dieselbe constituierenden Theile nicht mehr endlich und bestimmt, sondern endlos ist, und zwar wird diese Endlosigkeit eben nicht mehr als die unbestimmte Endlichkeit (wie sie in der Zeitreihe in der Richtung der Zukunft gegeben ist) sondern als die zum Abschluss gebrachte Endlosigkeit gedacht, indem man die Enden dieser endlosen Reihe unmittelbar vor sich zu haben glaubt. Denke ich mir eine gerade Linie unendlich, so denke ich dabei diese unendliche Gerade zunächst nicht so (wie das gewöhnlich behauptet wird), dass dieselbe kein Ende und keinen Anfang überhaupt hat, sondern so, dass ihre Enden im Unendlichen (erster Ordnung) liegen, so dass zwischen diesen beiden eine unendliche Anzahl von endlichen Theilen liegt, und zwar denke ich dies nur deshalb so, weil ich mir ein Unendliches, welches weder Anfang noch Ende hat und doch eine vollendete Reihe darstellen soll, eben nicht denken kann. Aber nur leider kann ich bei dieser so anscheinend widerspruchslosen Vorstellung der vollendeten Unendlichkeit erster Ordnung nicht bleiben, ich muss nun weiter diese erste vollendete Unendlichkeit resp. jene in die unendliche verlängerte Gerade ebenso als eine blosse Einheit in einer noch grösseren vollendeten Unendlichkeit betrachten, wie ich mir die endliche Einheit als Glied jener ersten vollendeten Unendlichkeit gedacht habe; sobald ich aber so die erste vollendete Unendlichkeit als das Glied der zweiten vollendeten Unendlichkeit gefasst habe, sehe ich gleich ein, dass die Anzahl dieser vollendeten Unendlichkeiten, mag man dieselbe noch so sehr in alle Unendlichkeiten fortsetzen, sich nie mehr in eine letzte vollendete Unendlichkeit aller dieser vollendeten Unendlichkeiten zusammenfassen lässt. Erst wenn ich so die vollendet unendliche Gerade so verlängert habe, dass sie nirgends mehr ein Ende hat, gewinne ich den Begriff einer schlechthin unbestimmten und absolut endlosen Unendlichkeit (resp. einer solchen Geraden), den Begriff einer Unendlichkeit, die nun auch wirklich im Unendlichen keinen Anfang und kein Ende mehr hat.

Statt die simultane Raum- und Zahlreihe bestimmt endlich zu denken, wollte ich durchaus beide für endlos halten, und musste nun zum Begriffe der vollendeten Unendlichkeit meine Zuflucht nehmen, um diese Forderung zu befriedigen. Dann sah ich aber ein, dass ich nicht bei derselben bleiben kann, und musste, über dieselbe hinausgehend, wiederum in jene schlechthin unbestimmte Endlichkeit zurückfallen, die ich durch die vollendete Unendlichkeit zum absoluten Abschluss gebracht wähnte, ich habe also durch die Voraussetzung jener bestimmten Unendlichkeit nichts gewonnen, die Schwierigkeit hat sich, statt zu verschwinden, nur vorgrössert, in der Reihe dieser vollendeten Unendlichkeiten kann ich nunmehr keinen absoluten Abschluss mehr finden und verliere mich verzweifelt und hilflos in der absoluten Leere des schlechthin undenkbaren absolut unbestimmten Unendlichen vollständig!

Ob aber diesem Begriffe des schlechthin unbestimmten Unendlichen überhaupt nichts in der Realität entspricht, ob es nur eine völlig bedeutungslose Velleität unseres maasslos durch die Phantasie verirrten Verstandes sei, ob wir uns nicht doch eine Art von Raum denken können, wo dieser Begriff seine Anwendung findet? Es ist wahr, solange wir den Raum als aus discreten voneinander getrennten Theilen bestehend uns denken, solange hat dieser Begriff der absolut unbestimmten Unendlichkeit keine Bedeutung für denselben, denn ein solcher Raum müsste aus lauter zusammengesetzten Theilen bestehen, in demselben könnte man also nie zu wirklichen Theilen gelangen, was, wie wir gesehen haben, nicht mehr und nicht weniger bedeutet als dass jener Raum dann überhaupt nicht bestünde. Diese Sachlage ändert sich mit einem Schlage sobald wir voraussetzen, dass der Raum nicht mehr aus getrennten discreten Theilen besteht, sondern voraussetzen dass er ein absolutes Continuum ist. Dieser Begriff des absoluten Continuums wird so oft erwähnt und doch so vollständig missverstanden, dass wir denselben hier analysieren und klar definieren müssen. Der leere Raum wird gewöhnlich im Gegensatz zu der discreten Natur der in ihm zerstreuten Theile der materiellen Substanz so gedacht, dass, während derselbe absolut theillos sein soll, diese wiederum nur aus Theilen besteht, die immer einen leeren Zwischenraum zwischen sich haben, oder wenn sie sich manchmal auch berühren, dies nur auf Augenblicke zu geschehen pflegt. Ich will hier nicht auf den einen klassischen Grund eingehen (vgl. darüber das nächste Kapitel), der für diese Discretheit der Materie seit eher angeführt wird, ich will nur feststellen wie man auf diese Weise zur Auf-

stellung des Continuitätsbegriffs im Gegensatz zu dem Begriffe der Discretion gelangt.* Während der leere continuirliche Raum als aus absolut ungetrennten Theilen bestehend betrachtet wird, wird die Materie als aus discreten durch leere Zwischenräume getrennten Theilchen bestehend gedacht. Diese discreten Theilchen der materiellen Substanz, auch wenn man dieselben für physisch untheilbar betrachtet, betrachtet man für mathematisch theilbar und zwar in's Unendliche aber allerdings nur für potentiell in's Unendliche theilbar, ohne sich darum zu kümmern, dass man durch diesen Begriff der potentiellen Theilung in Wahrheit den Continuitätsbegriff auf diese einfachen Theilchen angewandt habe. Abgesehen nun von dieser Incensequenz, die uns hier nicht interessiert, wird der Begriff des Discreten nach dem Vorbild dieser discreten Materie so gefasst, dass das Discretum vollständig mit dem Begriffe eines leere Lücken enthaltenden Discretums identificiert wird, und man auf die Möglichkeit eines lückenlosen Discretums, dessen einfache Theile absolut ohne leere ausgedehnte Zwischenräume sind, gar nicht reflectiert. Und doch und gerade deshalb, weil man diesen Begriff des lückenlosen Discretums im Unterschiede von dem Begriffe des lückenhaften Discretums, dessen Vorbild in der im Raume zerstreuten discreten Materie liegt, nicht zu fassen vermag, verwechselt man fortwährend den Begriff des absoluten Continuums mit dem Begriffe dieses lückenlosen Discretums, und wir werden später sehen, wie auf dieser Verwechselung die gesammte moderne Geometrie beruht. Und doch kann das lückenlose Discretum, sobald man nur seine Möglichkeit in Betracht zieht, sehr leicht von dem absoluten Continuum unterschieden werden. Besteht der leere Raum aus einfachen untheilbaren Punkten dann ist offenbar der leere Raum kein Continuum sondern ein Discretum und zwar ein lückenloses Discretum, da es sonst einen weiteren leeren Raum geben müsste, der die einzelnen Punkte jenes ersten Raumes voneinander, ähnlich jenen die Theile der discreten Materie trennenden leeren Zwischenräumen, trennte, was absurd ist. Wenn man also, trotz aller so klaren Beweisführung gegen die Möglichkeit der Zusammensetzung des leeren Raumes aus einfachen untheilbaren Punkten, solche Punkte als seine Bestandtheile durchaus behalten will, dann hört der leere Raum offenbar auf, absolut continuirlich zu sein, er ist dann als lückenloses Discretum zu charakterisieren. Wenn man aber, jene Argumente anerkennend, die absolut unbestimmt unendliche Anzahl dieser Punkte anerkennt, dann hört der leere Raum offenbar auf ein lückenloses Discretum zu sein — weil es keine einfachen Theile mehr

in demselben giebt — und verwandelt sich in das absolute absolut theillose Continuum. Nur weil man diese Consequenz jener Argumente nicht einzusehen vermag, kommt man immer wieder dahin, den leeren Raum bald als absolutes aus keinen Theilen bestehendes Continuum bald als lückenloses aus einfachen Punkten bestehendes Discretum zu betrachten, und man trent so diese beiden so grundverschiedenen Begriffe nicht.

Diesen wichtigen und folgenschweren Unterschied zwischen dem absoluten Continuum und dem lückenlosen Discretum kann man sehr leicht an einer geraden Linie illustrieren. Man zeichne auf dem Papier eine Gerade AB und man halbiere dieselbe in dem Punkte C. Wenn die Gerade AB absolut continuirlich ist, dann wird sich jede dieser Hälften weiter halbieren lassen u. s. w. in infinitum, so das man nie und nimmer auf letzte absolut einfache Theile gelangen kann, denn auch der kleinste Theil dieser continuirlichen Linie wird wiederum eine Linie sein, und zwar nicht nur jeder noch so kleine endliche sondern auch jeder noch so kleine unendlich kleine Theil der Geraden wird noch Ausdehnung haben und sich weiter theilen lassen, so dass die continuirliche Gerade wirklich in's absolut unbestimmte Unendliche theilbar ist. Wenn die Gerade AB dagegen ein lückenloses Discretum darstellt so wird man durch die fortgesetzten Halbierungen derselben ja schliesslich auf einfache weiter untheilbare Theile, die nichts Linienhaftes mehr darstellen, gelangen, ganz abgesehen davon ob die Anzahl dieser einfachen Raumpunkte eine endliche oder eine unendliche ist, denn wenn sie eine unendliche ist, so kann sie nur bestimmt unendlich sein (mag dieses bestimmt Unendliche meinetwegen von noch so hoher Ordnung sein), weil das bestimmt Unendliche einzig und allein letzte untheilbare Theile nicht ausschliesst, während das unbestimmt Unendliche dieselben vollkommen und absolut ausschliesst. Man muss also streng zwischen dem absoluten Continuum und dem lückenlosen Discretum unterscheiden, beide unterscheiden sich von dem lückenhaften Discretum darin, dass sie beide lückenlos sind, während aber das Continuum absolut ohne Theilung ist und nur potentiell in's unbestimmte Unendliche theilbar gedacht werden kann, ist das lückenlose Discretum aus letzten einfachen Theilen zusammengesetzt (da alles Zusammengesetzte aus Einfachem bestehen muss), deren Anzahl sowohl endlich als bestimmt-unendlich gedacht werden kann.*)

*) Von den drei geometrischen Gründen, die für die Unendlichkeit des Raumes nach oben und unten sprechen, spricht der erste, indem er die absolute Grössenlosigkeit des einfachen Raumpunktes behauptet, direkt gegen die Möglichkeit des

Während nun von den drei Widersprüchen gegen das Unendliche alle drei für das lückenlose Discretum (denn wenn der Raum ein Discretum ist, so kann er nur als lückenloses Discretum gedacht werden) gelten, gelten nicht alle für das absolute räumliche Continuum. In erster Reihe ist es der Widerspruch der unendlichen Zahl, der in Bezug auf dieses Continuum keine Bedeutung mehr hat, denn wo keine letzten einfachen Theile mehr gegeben sind, ist auch nichts mehr vorhanden was zu zählen wäre, folglich entsteht auch der Widerspruch der unendlichen Zahl nicht mehr. Man sollte nun erwarten dass auch der mit diesem so eng verknüpfte Widerspruch des plötzlichen Sprunges des Endlichen in das Unendliche nicht gelte. Denn es scheint ja dass da wo kein Übergang von der einen Reihe der Einheiten zu der anderen Reihe vorhanden ist, auch jener Sprung nicht mehr besteht. Aber zu unserer Ueberraschung ist der Sprung da. Denn in dem räumlichen Continuum sind offenbar endliche ausgedehnte Strecken vorhanden und überall da wo eine endliche Strecke in die unendliche hinübergeht, muss dieser Uebergang des Endlichen in das Unendliche ein sprungweiser sein, er muss in einer unendlichen Geraden AB (vgl. die Figur 1. Taf. I. die ganz gut zur Veranschaulichung des Sachverhalts auch in diesem Falle dienen kann, nur muss man sich die Gerade AB stetig vorstellen) im Punkt C bestehen, der das Ende des endlichen und den Anfang des unendlichen Theiles dieser Geraden darstellt. Ebenso gilt auch der Widerspruch der Endlichkeit jedes Unendlichen, und er gilt sogar nur für das räumliche Continuum vollständig und absolut, da er, wie wir gesehen haben, nur dann gilt, wenn der Raum sowohl nach oben wie nach unten unendlich ist, was nur bei dem continuirlichen Raume völlig und absolut der Fall ist. Jede endliche continuirliche Strecke muss aus unendlich vielen unendlich kleinen Strecken erster Ordnung bestehen, diese aus unendlich kleinen Strecken zweiter Ordnung u. s. w. in infinitum; ebenso muss jede

räumlichen lückenlosen Discretums also für das räumliche Continuum, während die übrigen zwei Beweise indirekt zu demselben Resultat gelangen. Denn die beiden übrigen Gründe stützen sich auf dieselbe Voraussetzung von der der erse Grund ausgeht; während aber dieser erste Grund unmittelbar daraus auf die Unmöglichkeit eines einfachen Punktes schliesst, der in jener Voraussetzung ausgedrückt ist, lassen die beiden anderen Gründe zunächst die Möglichkeit dieses einfachen Punktes zu und beweisen dann, wie sich der einfache Punkt als solcher nicht behaupten kann, wie er sich selbst immer wieder aufheben muss, und gelangen auf die Weise indirekt zu dem Resultat, dass das lückenlose Discretum nicht möglich, dass nur das Continuum möglich ist, indem sie e en die unbestimmte Unendlichkeit des vorausgesetzten Discretums beweisen, und damit dieses Discretum selbst aufheben.

endliche continuirliche Strecke der unendlich kleine Theil einer continuirlichen unendlich grossen Strecke erster Ordnung sein, diese der unendlich kleine Theil einer Strecke zweiter Ordnung u. s. w. in infinitum, so dass der Widerspruch der Endlichkeit jedes Unendlichen uneingeschränkt gilt. Diese Thatsache nun, dass die beiden anderen der drei Grundwidersprüche des Unendlichen auch für das räumliche Continuum (man braucht nicht noch zu sagen: unendliches Continuum, denn Continuum ist seinem Wesen nach unendlich) gelten, während der erste nicht gilt, ist sehr merkwürdig, wenn man weiss, wie die beiden anderen Widersprüche logisch von dem ersten abhängen und unmittelbar aus ihm hervorgehen. Der Widerspruch des plötzlichen Sprunges des Endlichen in das Unendliche entspringt unmittelbar aus dem Bestreben den Widerspruch der unendlichen Zahl zu vermeiden, und die absolute Unendlichkeit des Raumes nach oben und unten, die Grundlage des Widerspruchs der Endlichkeit jedes Unendlichen, folgt dann weiter auch aus dem Bestreben den Widerspruch des plötzlichen Sprunges des Endlichen in das Unendliche zu vermeiden, es ist also offenbar dass die beiden anderen Widersprüche die Grundvoraussetzung, von der der erste Widerspruch ausgeht, die Getheiltheit des Raumes in Theile, die sich zusammenzählen lassen, voraussetzen, und doch gelten sie, wie wir sehen, auch dann wenn diese Grundvoraussetzung nicht mehr besteht, wenn der Raum ein absolutes Continuum ist. Wir haben hier einen Zwiespalt vor sich, der auf den ersten Blick durchaus unerklärbar zu sein scheint, dessen Geheimniss aber einer tieferen Reflexion nicht verborgen zu bleiben vermag. Dieses grosse Geheimniss liegt einfach darin, dass das Continuum als solches möglich, dass aber das ausgedehnte räumliche Continuum nicht möglich ist.

Um diese grosse Wahrheit zu beweisen werden wir zunächst rein geometrische Gründe in Betracht ziehen, die das räumliche Continuum unmöglich machen, um dann rein logische Gründe für seine Unmöglichkeit anzugeben. Von diesen geometrischen Gründen nun kommt an die erste Stelle der so oft angeführte und so oft widerlegte Grund, wonach das räumliche Continuum nach oben überhaupt unmöglich ist, während nach unten diese Möglichkeit unzweifelhaft und einleuchtend ist. Nach oben kann der sich ausdehnende Raum nicht ebenso geschlossen werden wie er nach unten geschlossen ist und da er so nach oben offen ist und bleibt, ist er nach oben kein Continuum. Daraus schliesst man nicht etwa dass der Raum überhaupt kein Continnum sein kann, sondern nur dass das räumliche Continuum nach oben endlich ist, nicht bemerkend wie man damit

einen ungeheueren Widerspruch begangen hat (Continuum — endlich!). Die neuere Unendlichkeitsgeometrie hat aber die Offenheit des continuirlichen Raumes nach oben aufgehoben, sie hat bewiesen, dass der Raum nach oben ganz ebenso continuirlich ist wie er nach unten continuirlich ist: sie hat nur nicht bemerkt, wie dieser Beweis zu einem ganz widerspruchsvollen Resultate führt, wie das Zusammenfallen des Kreises mit der Geraden, auf dem diese Geschlossenheit und Continuirlichkeit des Raumes nach oben beruht, ganz unmöglich und widerspruchsvoll ist. So entscheidend dieser Beweis nun auch infolge dieser seiner Grundvoraussetzung gegen das räumliche Continuum ist, viel entscheidender ist ein anderer Beweiss, der schlisslich auf demselben Princip wie dieser beruht. Wie der Kreis und die Gerade im Unendlichen absolut zusammenfallen müssen, ebenso müssen sich zwei Parallele im Unendlichen in einem Punkte schneiden, und auf Grund dieses Schnittes der Parallelen im Unendlichen deduciert man mit mathematischer Notwendigkeit, dass die Ebene, in der sich jene Parallelen befinden, im Unendlichen selbst ein Punkt werden muss, wodurch die Unmöglichkeit einer continuirlichen Ausdehnung in's Unendliche und damit die Unmöglichkeit des räumlichen Continuums einleuchtend wird. Wir wollen die beiden Beweise nunmehr betrachten.

Die Frage der Continuirlichkeit des Raumes nach oben und zugleich der Beweis für diese Continuirlichkeit können am besten an dem Beispiele der eindimensionalen Ausdehnung, einer Geraden nämlich, veranschaulicht werden. Wenn ich z. B. die gerade Raumstrecke zwischen den Punkten A und B betrachte, so kann ich mir diese Strecke ganz wohl als ein Continuum denken, (vgl. Figur 2, Taf. I) da zwischen A und B überall reale Ausdehnung vorhanden ist. Dagegen wird dieses Denken des Continuums anscheinend zu einer Unmöglichkeit, wenn ich von den Punkten A und B ausgehend nicht nach unten d. h. nicht nach dem zwischen ihnen beiden liegenden Punkte C gehe, also so dass die beiden Richtungen AC und BC in einem und demselben Punkte zusammenfallen, sondern wenn ich in den entgegengesetzten Richtungen AD (resp. CD) und BD′ (resp. CD′) fortschreite. Während die beiden Punkte A und B, wenn sie sich in den Richtungen AC und BC bewegen, in dem Punkte C zusammenkommen, werden sie sich, wenn sie von C anfangend in den entgegengesetzten Richtungen CD und CD′ sich bewegen, sich in C trennen und anscheinend nie mehr zusammenkommen, indem sie durch alle Unendlichkeiten hindurch stets einander direkt entgegengesetzt laufen und so nie einander sich werden nähern können. Wenn dem nun so wäre, dann

wäre offenbar die Continuität des Raumes nach oben nicht gegeben, denn während die Raumstrecke zwischen den Punkten A und B nach unten continuirlich mit der räumlichen Ausdehnung ausgefüllt werden kann, scheint diese Ausfüllung nach oben absolut unmöglich zu sein, da jene Punkte sich nach oben nie mehr einander nähern werden, und je weiter sie im Unendlichen liegen desto entfernter sie voneinander und von ihrem Zusammenfallen zu sein scheinen. Nun, um diesem Uebelstande zu steuern, um den Raum ebenso nach oben absolut continuitätsfähig zu machen, wie derselbe nach unten unzweifelhaft continuirlich ist, hat man näher untersucht, ob wirklich jene Entfernung der Punkte A und B im Unendlichen eine fortwährend zunehmende ist, oder ob nicht in Wahrheit dies nur scheinbar ist, und jene Punkte in dem unendlich Grossen ebenso zusammenfallen wie sie im Endlichen resp. Unendlichkleinen miteinander zusammenfallen. Eine einfache Betrachtung des Kreises nun, wenn derselbe mit der geraden Linie verglichen wird, lehrt, dass je grösser der Radius eines Kreises desto kleiner seine Krümmung ist, und dass sich somit die Peripherie eines Kreises der Geraden immer mehr nähert je grösser der betreffende Kreisradius ist so dass, wenn der Radius unendlich gross wird, die Krümmung seiner Peripherie unendlich klein wird und mit der geraden Linie zusammenfällt, d. h. die Gerade wird im Unendlichen zum Kreise, denn man kann nicht umgekeht voraussetzen, dass der Kreis zur Geraden wird, da dies einen Sprung bedeuten würde. Wenn dem nun so ist, dann ist es offenbar, dass die beiden Punkte A und B, die sich in der entgegengesetzten Richtung auf der geraden Linie AB bewegen, sich nur solange voneinander entfernen, solange sie sich in dem endlichen Theile derselben befinden, sobald sie in den unendlichen Theil übergehen, fangen sie an sich zu nähern und nähern sich einander immer mehr je näher sie dem Ende der bestimmten Unendlichkeit sind, so dass sie in der Unendlichkeit, d. h. in dem unendlich Grossen, ebenso zusammenfallen wie sie im Endlichen resp. in dem unendlich Kleinen miteinander zusammenfallen, und damit ist der zwischen denselben liegende Raum absolut geschlossen und also das räumliche Continuum auch nach oben vollkommen möglich.

Wir haben den obigen Beweis so geführt, wie er gewöhnlich von den Mathematikern geführt wird. In dieser Form nun ist er offenbar fehlerhaft. Wenn der Raum nach unten ein absolutes Continuum ist, dann kann das Zusammenfallen des Kreises mit der Geraden ebensowenig in dem unendlich Grossen erster Ordnung geschehen, wie es nach unten nicht nur ein unendlich Kleines erster

Ordnung giebt. Wie es in dem Continuum nach unten kein unendlich Kleines letzter Ordnung giebt, sondern die Reihe der unendlich kleinen Grössen eine schlechthin unbestimmt unendliche ist, so muss auch die Reihe der unendlich grossen Grössen in dem Continuum eine schlechthin unendliche sein, was einfach auch daraus einleuchtet, dass, wenn der Radius eines Kreises in dem Continuum das unendlich Grosse erster Ordnung wird, seine Krümmung das unendlich Kleine erster Ordnung werden muss und nicht sogleich Null werden kann; der unendlich kleinen Krümmung zweiter Ordnung wird also offenbar der unendlich grosse Kreisradius zweiter Ordnung entsprechen müssen u. s. f. so dass der schlechthin unbestimmt unendlichen Reihe unendlich kleiner Grössen (resp. Krümmungen) die schlechthin unbestimmt unendliche Reihe unendlich grosser Grössen (resp. Kreisradien) im Continuum entsprechen wird. Solange der Raum nicht streng als ein Continuum sondern als ein Discretum gefasst wird — was solange geschieht solange man nicht streng das absolute Continuum von dem lückenlosen Discretum zu trennen weiss — solange kann der Kreis mit der Geraden nicht zusammenfallen und solange ist der obige Beweis nicht stringent. Denn mag das Discretum aus einer noch so unendlich grossen Anzahl von einfachen Raumpunkten bestehen, diese einfachen Raumpunkte werden das unendlich Kleine letzter Ordnung in dem bestimmt unendlichen Discretum darstellen und der Kreis von einer noch so unendlich kleinen Krümmung wird nicht mit der Geraden zusammenfallen. Wie die Reihe der unendlich kleinen Grössen nur in dem absoluten Continuum schlechthin unbestimt unendlich ist und demnach nur die absolute Null in diesem Continuum als das unendlich Kleine letzter Ordnung bezeichnet werden kann, so ist auch die Reihe der unendlich grossen Grössen nur in dem absoluten Continuum schlechthin unbestimmt unendlich nur in diesem Continuum also ist ein Kreis von einem schlechthin und absolut unendlichen Radius vorhanden, ein Kreis dessen Krümmung absolute Null ist (denn dem absolut unendlich Grossen entspricht das absolut unendlich Kleine d. h. die Null) und demnach fällt dieser Kreis wirklich völlig und absolut mit der Geraden zusammen.

So stringent nun dieser Beweis des Zusammenfallens der Geraden mit dem Kreise auch ist, sobald die absolute Continuität des Raumes vorausgesetzt wird, und so unzweifelhaft umgekehrt daraus die Geschlossenheit und die Continuität des Raumes nach oben folgt (zunächst folgt daraus allerdings nur die Continuität und Geschlossenheit des eindimensionalen Raumes, der Geraden, nach oben: da

aber die Ebene aus Geraden besteht so wird sie sich im Unendlichen ebenso zusammenschliessen, der dreidimensionale Raum, da er aus Ebenen besteht, ebenso u. s. w. also auch der Raum von unbestimmt unendlich vielen Dimensionen), wir können daraus nur folgern, dass der continuirliche Raum absolut unmöglich ist. Es ist richtig und unzweifelhaft dass der absolut continuirliche Raum formell möglich ist, indem die Gerade thatsächlich, sobald sie nach unten continuirlich ist, auch nach oben continuirlich werden muss, aber reell ist er nicht möglich, denn die Gerade muss dabei leider ihre eigene Natur aufgeben und etwas werden, was sie nicht ist und nicht werden kann. Denn der absolut unendlich grosse Kreis ist Gerade und Kreis zugleich: er ist unzweifelhaft eine Gerade, da seine Krümmung absolut gleich Null ist, und er ist ein Kreis weil er eine geschlossene Linie ist, und doch sind Kreis und Gerade so verschieden wie nur möglich, und können absolut nicht als ein und dasselbe gedacht werden. Die gerade Linie ist eine solche Linie, deren Punkte sich immer mehr voneinander entfernen, ohne sich einander irgendwie zu nähern, während der Kreis eine solche Linie ist, deren Punkte indem sie sich einerseits voneinander entfernen sich andererseits zugleich einander nähern, so dass sie sich schliesslich zusammenfinden, und nun sollen zwei so grundverschiedene geometrische Gebilde im Unendlichen zusammenfallen, sie sollen ein Gebilde ergeben, welches zugleich Gerade und Kreis ist, deren Punkte also zugleich jene Eigenschaft der Punkte einer Geraden und diese Eigenschaft der Kreispunkte haben, Eigenschaften also die einander völlig ausschliessen! Wenn es nun unzweifelhaft ist, dass im continuirlichen Unendlichen Kreis und Gerade zusammenfallen *müssen*, und wenn es ebenso unzweifelhaft ist, dass sie nicht zusammenfallen *können*, so folgt daraus nur dass das räumliche Continuum nicht möglich ist, ganz ebenso wie z. B. aus dem Zusammenfallen eines Theiles der unendlichen abgeschlossenen Reihe endlicher Zahlen mit dieser ganzen Reihe — ein Zusammenfallen welches ganz ebenso logisch unanfechtbar ist wie dieses Zusammenfallen der Geraden mit dem Kreise (vgl. die Anmerkung zur Seite 219.) — die Unmöglichkeit dieser unendlichen Reihe endlicher Zahlen folgt.

Aus dem absoluten Zusammenfallen des Kreises mit der Geraden (resp. der Ebene mit der Kugel etc.) folgt also mit absoluter Gewissheit, dass das räumliche Continuum nicht möglich ist. Aber noch viel einleuchtender und in einer geradezu überraschender Weise folgt dasselbe aus dem Nachweis, dass sich zwei Parallele im Unendlichen schneiden, und zwar nicht direkt aus diesem Satze

sondern aus der wichtigen Folgernng die auf Grund davon gezogen wird, dass nämlich die Ebene im Unendlichen zu einem einzigen Punkte zusammenschrumpft, der ganze grosse unendliche Raum also geradezu ein Punkt wird, und somit der unendliche continuirliche Raum unmittelbar sich selbst aufhebt.

Es seien die pallelen Geraden AB und CD gegeben (vgl. die Figur 3 Taf. I), die in's Unendliche verlängert sich miteinander schneiden werden. Wir schliessen nun, dass sich diese Geraden im Unendlichen wirklich schneiden werden nur daraus, dass wir bemerken, wie zwei endliche Gerade, die sich im Endlichen schneiden, dies in desto grösserer Entfernung thun (von denselben Anfangspunkten aus gerechnet), je kleiner die Neigung beider zueinander ist, d. h. je kleiner der von den beiden eingeschlossene Winkel ist. Die Geraden OB und OB_1, die von den in den Geraden AB und CD liegenden Anfangspunkten O und O_1 ausgehen, schneiden sich offenbar im Punkte B_1, der weiter von dem Anfangspunkte O resp. O_1 liegt als der Punkt B_1, unter einem kleineren Winkel als es der Winkel bei dem Punkte B_1 ist. Die Grösse des Winkels entspricht genau dem Bogen eines beliebigen um den Scheitel desselben beschriebenen Kreises: nun wird offenbar dieser Bogen desto kleiner werden je kleiner der Winkel selbst wird, und wenn sich die Geraden OB_1 und O_1 B_1 in dem unendlich Grossen erster Ordnung schneiden werden, so muss dieser Bogen obenbar die unendlich kleine Grösse erster Ordnung werden, in dem unendlich Grossen zweiter Ordnung wird er das unendlich Kleine zweiter Ordnung werden etc., da derselbe ja offenbar durch alle möglichen Grössenstufen hindurchgehen muss, um die absolute Grenze aller unendlich kleinen Grössen in dem absolut continuirlichen Raume, d. h. die absolute Null, schliesslich erreichen zu können. Erreicht er nun diese Grenze wirklich und vollständig, dann muss der entsprechende Winkel selbst absolute Null werden, er verschwindet also als solcher vollständig, die beiden Geraden werden also absolut parallel zueinander, d. h. die Geraden OB_1 und O_1 B_1 fallen dann mit den parallelen Geraden absolut zusammen, diese beiden Parallelen werden sich also in dem absolut unbestimmt-unendlichen continuirlichen Raume wirklich miteinander schneiden (da man nicht annehmen kann, dass die Geraden OB_1 und O_1 B_1, wenn ihr Neigungswinkel B_1 absolute Null wird, sich zu schneiden aufhören, da das einen plötzlichen Sprung bedeuten würde, der jedoch im Continuirlichen unmöglich ist.*)

*) Ich will der Deutlichkeit wegen diese Unmöglichkeit des Zusammenfallens der Geraden mit dem Kreise und die Unmöglichkeit des Schnittes der Parallelen in

Es fragt sich nun ob die Parallelen AB und CD im Unendlichen zwei Schnittpunkte oder nur einen einzigen Schnittpunkt haben? Denn so klar es auf den ersten Blick auch scheinen mag, dass dieselben zwei solche haben müssen, da sie sich in zwei Richtungen in's Unendliche ausdehnen, so muss man doch bedenken, dass jede dieser Geraden im absoluten Unendlichen zum Kreise wird, und es dann ganz möglich ist, dass sie nur einen einzigen Schnittpunkt haben. Und thatsächlich ist dem so. Hätten die beiden Parallelen zwei Schnittpunkte im Unendlichen, dann wären sie nicht mehr zwei sondern eine Gerade, da nach einem bekannten geometrischen Axiom zwei Geraden, wenn sie zwei Punkte in der Ebene miteinander gemeinsam haben, notwendigerweise zusammenfallen müssen, und die Ebene, in der die beiden Geraden AB und CD liegen,

dem Unendlichen, solange dieses Unendliche discret gefasst wird, noch einmal in dieser Anmerkung principiell feststellen. Die zwei Punkte der Geraden AB (vgl. Figur 4 Taf. I) die sich in convergierenden Richtungen AC, CB dem Mittelpunkte der geraden C hinbewegen, würden diesen Mittelpunkt offenbar nie erreichen, solange die Gerade als discret gefasst wird, mag man diese Discretheit noch so unendlich weit fortsetzen. Der Punkt B muss offenbar, bevor er den ganzen Weg BC durchläuft, zuerst die Hälfte dieses Weges durchlaufen, dann die Hälfte der anderen Hälfte u. s. w. Ist nun die Strecke CB bis in's Unendliche theilbar, dann wird offenbar der Punkt B, bevor er in den Punkt C anlangt, wenn er schon alle die unendlich vielen Weghälften durchlaufen hat, noch die letzte unendlich kleine Strecke durchlaufen müssen, die ihn von dem Punkte C trennt. Wenn der Raum nun discret ist so muss diese unendlich kleine Strecke, mag man sie sich noch als unendlich klein von einer noch so unendlich grosser Ordnung denken, eine einfache Einheit darstellen; soll aber auch diese unendlich kleine Strecke unendlicher Ordnung noch weiter theilbar sein, und zwar in's absolut unbestimmte Unendliche theilbar sein, d. h. soll der discrete Raum absolut unbestimmt unendlich sein, so wird offenbar der Punkt B den Punkt C nie, absolut nie erreichen solange dieser Raum noch immer als diskret gefasst wird. Sobald dagegen der absolut unbestimmt unendliche Raum als Continuum gefasst wird, wird der Punkt B in der Lage sein alle die Zwischenstadien des Unendlichen in diesem Continuum wirklich durchzulaufen und endlich den Punkt C wirklich zu erreichen. Wird der Raum diskret gefasst, dann muss der Punkt B offenbar auf eine letzte untheilbare einfache unendlich kleine Strecke antreffen, die er ganz durchlaufen muss ohne sie weiter in Hälften zu theilen, wie er alle die früheren unendlichen und endlichen Strecken in Hälften getheilt hat; dagegen wenn die Strecke CB ein absolutes Continuum ist, durchläuft der Punkt B auch diese (willkürlich festgesetzte) unendlich kleine Strecke, indem er sie weiter und zwar in's absolut unbestimmte Unendliche theilt, und erreicht schliesslich den Punkt C unmittelbar und ohne zuvor auf eine unendlich-kleine Strecke zu stossen, die ihn von dem Punkte C noch trennen würde. Dem analog nun, kann die Krümmung des Kreises nur im absoluten Continuum alle die Stufen des Unendlich Kleinen durchlaufen und schiesslich absolute Null werden, und ebenso kann nur im absoluten Continuum der Neigungswinkel zweier Geraden alle die Stufen des unendlich Kleinen durchlaufen und schliesslich absolute Null werden, so dass die Geraden dann einander parallel werden.

auch im Unendlichen Ebene bleibt, ganz ebenso wie diese Geraden, obgleich sie im Unendlichen Kreise werden, doch zugleich auch Geraden sind und bleiben. Daraus folgt also unzweifelhaft, dass die beiden Parallelen AB und CD im Unendlichen notwendigerweise einen einzigen Schnittpunkt haben müssen.*)

Steht es nunmehr fest, dass zwei Parallelen einen einzigen Schnittpunkt im Unendlichen haben, so lässt sich sehr leicht beweisen, dass auch alle Parallelen, die zwischen den beiden liegen, denselben Schnittpunkt im Unendlichen untereinander und mit ihnen haben. In der That werden alle die Geraden $O_2\ B_1$ $O_3\ B_1$ $O_4\ B_1$ etc. wenn sie im Endlichen denselben Schnittpunkt mit den Geraden OB_1 und $O_1\ B_1$ (vgl. die Figur 3 Taf. I) haben, auch im Unendlichen den gemeinsamen Schnittpunkt mit ihnen haben, alle Parallelen also die zwischen den beiden Parallelen AB und CD liegen, müssen sich mit ihnen im Unendlichen in einem und demselben Punkte schneiden. Daraus lässt sich aber leicht der Schluss ziehen, dass auch alle Parallelen, die ausserhalb der Geraden AB und CD liegen, mit diesen denselpen Schnittpunkt im Unendlichen haben müssen, so dass alle Geraden, die einer Geraden AB parallel sind, sich im Unendlichen in einem einzigen Punkte schneiden. Ist dem aber so, dann bedeutet das nicht mehr und nicht weniger, als dass die Ebene, in der diese Parallelen liegen, wenn sie unendlich gross wird, sich in einen einzigen Punkt verwandelt. Die Ebene kann man ja ganz gut so entstanden sich denken, dass eine Gerade sich ihrer ursprünglichen Lage parallel bleibend bewegt, (also in rein fortschreitender Bewegung begriffen ist), d. h. sie

*) Auch auf eine andere Art und Weise lässt sich beweisen, dass zwei Parallele im Unendlichen nur einen einzigen Schnittpunkt haben. Man betrachte z. B. den Schnittpunkt der Geraden CD mit der Geraden XY in der Figur 5. (Taf. I), die man gewinnt, wenn man an der Geraden XY eine Strecke AB abzeichnet und die Punkte der Graden CD so wählt, das die Strecke AC ‖ BD ist. Aus den ähnlichen Dreiecken ACP und BDP folgt $\frac{AP}{BP} = \frac{AC}{BD}$ und, wenn $AP = x$, $AC = a$, $BP = x - d$ ($d = AB$) $BD = b$ sind, $x = \frac{ad}{a-b}$. Ist $a > b$ dann befindet sich der Schnittpunkt der Geraden rechts von B, und wenn $a < b$ links von A; wenn aber $a = b$ wird, dann sind die beiden Geraden CD und XY einander parallel und die Gleichung $x = \frac{ad}{a-b}$ nimmt die Form $x = \frac{ad}{0} = \infty$, die Parallelen schneiden sich also im Unendlichen. Dieser Schnittpunkt ist aber offenbar ein einziger, denn alle anderen Schnittpunkte befinden sich entweder rechts oder links von A resp. B, er selbst ist also weder links noch rechts oder besser gesagt sowohl rechts als links, also offenbar ein einziger.

kann als aus einer absolut unbestimmt unendlicher Anzahl von einander parallelen Geraden bestehend gedacht werden. Wenn sie aber so gedacht wird und so allein muss ihre primäre Entsteiungsweise gedacht werden dann wird offenbar diese Ebene im Unendlichen zu einem einzigen Punkte werden d. h. sie verwandelt sich in einen einzigen Punkt. Denn da der Punkt, in dem sich alle die die Ebene constituierenden parallelen Geraden im Unendlichen schneiden, seiner Lage nach in dieser Ebene offenbar ein willkürlicher ist, und trotz dieser Willkürlichkeit nur ein einziger Punkt es ist, in dem sich alle diese Geraden im Unendlichen schneiden, so bedeutet das nicht mehr und nicht weniger, als dass die Ebene von dem einen Punkte überall umgeben ist, was wiederum nichts anderes bedeutet, als dass die Ebene im Unendlichen zu einem Punkte wird.*)

Verwandelt sich die Ebene, wenn sie unendlich wird, in einen einzigen Punkt, dann bedeutet das nicht mehr und nicht weniger als dass der ausgedehnte Raum, er sei von einer noch so grossen Anzahl von Dimensionen, sich ebenso in einen einzigen Punkt verwandeln muss. Denn wie wir uns die Ebene als aus einer unbestimmt unendlichen Anzahl von Geraden bestehend uns gedacht haben, ebenso können wir den dreidimensionalen Raum als aus unbestimmt unendlich vielen Ebenen bestehend uns denken, und da jede dieser Ebenen im Unendlichen sich in einen Punkt verwandelt, so wird sich der dreidimensionale Raum folglich zunächst in eine Gerade verwandeln (denn die ihn constituierenden Ebenen sind als einander parallel zu denken), die Gerade aber wird im Unendlichen zum Kreise, der Kreis aber als geschlossene Linie enthält in sich offenbar die Ebene (dies ist die Kreisfläche) und die unendliche Ebene muss sich ja offenbar in einen einzigen Punkt verwandeln. Es ist nun leicht einzusehen wie und auf welche Weise jeder Raum von einer höheren Dimensionsanzahl sich schliesslich in einen einfachen Punkt verwandeln müsse. In Wahrheit aber kann der continuirliche Raum von mehr als zwei Dimensionen nicht einmal versuchsweise entstehen: der Raum von einer Dimension d. h. die Gerade kann dies noch, sobald sie aber absolut unendlich wird,

*) Der hier angeführte Beweis für die Verwandlung der unendlichen Ebene in den Punkt enthält zwar manches Willkürliche, für unsere Zwecke genügt er aber vollständig. Ein noch strengerer Beweis liesse sich nur in analytischer Weise führen, was uns hier zu weit führen würde. Ich bemerke zugleich, dass die projektive Geometrie zu einem [illegible] Resultat führt, nach derselben verwandelt sich die unendliche Ebene im Unendlichen in eine Gerade. In diesen verschiedenen Resultaten, die auf verschiedenen Wegen gewonnen werden, offenbart sich am Ende nur der ganze Widersinn des Unendlichkeitsbegriffs.

verwandelt sie sich in den Raum von zwei Dimensionen (da die Gerade im Unendlichen zum Kreise wird und der Kreis als geschlossene Linie notwendigerweise, wie wir später sehen werden, die Kreisebene in sich enthalten muss), dieser Raum von zwei Dimensionen verwandelt sich aber, da er unendlich ist, sogleich in den einfachen ausdehnungslosen Punkt, womit jede weitere Ausdehnung in einer höheren Dimensionsanzahl ein für allemal abgeschnitten ist.

Wir haben eben gesehen, wie der continuirliche Raum nicht bestehen kann, und wenn man versucht denselben doch zu Stande zu bringen, er notwendigerweise in den einfachen ausdehnungslosen Punkt zurücksinkt. Was bedeutet das aber? Nicht weniger und nicht mehr, als *dass das ausgedehnte Continuum nicht möglich ist, dass das Continuum*, wenn es möglich ist, *nicht ausgedehnt sein kann.* Der Begriff des Continuums ist im allgemeinen kein widerspruchsvoller Begriff. Es möchte zwar auf den ersten Blick scheinen, dass das Continuum, seiner allgemeinen Definition nach, einen Widerspruch in sich enthält, da dasselbe dasjenige bedeutet, was Theile hat, dessen Theile aber voneinander nicht getrennt sind, da dasselbe wohl ungetheilt aber nicht theillos ist. Es scheint ja doch dass Theile nicht anders denkbar sind, denn als voneinander getrennte Theile, was Theil ist ist schon dadurch, dass es Theil ist, von dem Ganzen verschieden, und Verschiedenheit bedeutet nichts anderes als Geschiedenheit, also ist Theil und getrennter Theil ein und dasselbe. Ich könnte nun sehr leicht diesem anscheinend im Geiste dieses Buches geführten Beweis die allgemeine Denkmöglichkeit des Continuums einfach auf Grund der Thatsache entgegenstellen, dass unzählige Menschen bisher sich ganz gut ein Continuum denken konnten, und dass sie gerade umgekehrt die Möglichkeit eines Discretums läugneten. Aber eine solche Art und Weise der Argumentation würde gerade dem wahren Geiste dieses Buches nicht entsprechen, dessen Bestreben dahin geht, nur dasjenige gelten zu lassen, was sich innerlich, seinem logischen Gehalte nach, als begriffliche Möglichkeit dokumentieren kann. Wir haben nun gesehen, dass das Discretum, seinem allgemeinen Begriffe nach, ganz möglich ist und einen widerspruchslosen Begriff darstellt, dass Widersprüche in diesem Begriffe nur dann auftreten, wenn das Discretum als aus unendlichen Theilen bestehend gedacht werden soll. Ebenso nun ist das Continuum seinem allgemeinen Begriffe nach ganz wohl möglich, nur darf man dasselbe nicht unter einer Form sich denken, die es durchaus nicht annehmen kann. Der Theil ist wohl verschieden von dem Ganzen, er ist aber nur dann von dem Ganzen geschieden,

wenn er eine ganz bestimmte Grösse hat, denke ich mir den Theil seiner Grösse nach als etwas ganz unbestimmtes, dann ist nichts widersprechendes mehr, wenn ich ihn nicht mehr als etwas von dem Ganzen getrenntes mir denke. Und thatsächlich *sobald man diesen feinen Unterschied zwischen dem seiner Grösse nach völlig bestimmten und dem seiner Grösse nach völlig unbestimmten Theile macht, kann man sich ganz wohl das Continuum neben dem Discretum denken.* Die Ungeschiedenheit der Theile des Continuums voneinander bringt diese ihre völlige Unbestimmtheit der Grösse mit sich, die Geschiedenheit der Theile des Discretums voneinander bringt ihre völlige Grössenbestimmtheit mit sich, und davon rührt es her, dass man bei dem Theilen des Continuums keinen letzten weiter nicht theilbaren d. h. keine weiteren Theile in sich enthaltenden Theil vor sich hat, während man bei der Theilung des Discretums schliesslich zu absolut einfachen untheilbaren Theilen gelangt, die durch diese ihre absolute Untheilbarkeit den letzten Maassstab für die Bestimmtheit der Theile des Discretums sind, diese Bestimmtheit ihren eigentlichen Ausdruck in ihnen findet. Wir begnügen uns hier mit dieser Feststellung der allgemeinen begrifflichen Möglichkeit des Continuums und seinem allgemeinen Verhältniss zu dem Discretum, werden aber erst in dem dritten Abschnitte der Ontologie uns noch besonders damit beschäftigen.

Ist so das Continuum seinem allgemeinen Begriffe nach ganz wohl möglich, so fragt es sich, warum das ausgedehnte Continuum nicht möglich ist? Der letzte logische Grund nun, der das ausgedehnte Continuum unmöglich macht, liegt darin, dass Ausdehnung notwendigerweise ein Aussereinander der Theile des Continuums mit sich bringt, Aussereinander aber mit der Geschiedenheit ganz ebenso identisch ist wie die Grössenbestimmtheit mit Geschiedenheit identisch ist, denn was aussereinander ist das ist ja notwendig auch voneinander geschieden, was unmittelbar einleuchtet. Die Theile des Continuums, da sie ungeschieden sind, können nicht aussereinander sein, sie können also nur ineinander sein, sobald man sich also das Continuum ausgedehnt denkt, verlieren seine Theile mit dem Ineinander auch ihre Ungeschiedenheit, sie werden aussereinander und geschieden, und das Continuum hört auf, Continuum zu sein, es verwandelt sich in das Discretum. Dieses aus dem Continuum hervorgehende Discretum ist aber notwendigerweise ein absolut unbestimmtes unendliches Discretum und es ist kein Wunder, dass die geometrischen Consequenzen, die daraus folgen, dieses Discretum zum wahren Continuum zurückführen und damit beweisen, dass das ausgedehnte Continuum unmöglich ist;

sie erweisen sich eben als logische Consequenzen, die aus dem Begriffe des Continuums folgen, wenn dieser Begriff auf den ausgedehnten Raum angewandt wird. Im lückenlosen Diskretum ist das Zusammenfallen der Geraden mit dem Kreise, der Schnitt der Parallelen im Unendlichen und die Verwandlung der Ebene in einen einzigen Punkt solange unmöglich, solange das Discretum nicht als absolut unbestimmt unendlich gedacht wird; sobald man dasselbe aber so denkt, sind alle diese seltsamen Dinge möglich, sie machen aber auch zugleich die Ausdehnung des auf die Weise absolut continuirlich gefassten Raumes unmöglich, sie führen also das Continuum zu seiner ursprünglichen einzig möglichen Gestalt zurück, d. h. zum ausdehnungslosen Continuum.

Ist dem nun so, dann ist auch der Zwiespalt, der zwischen dem ersten Widerspruche des Unendlichen und den beiden anderen besteht, wenn man das räumliche Continuum und nicht mehr das räumliche Discretum vor sich hat, begreiflich. Der Zusammenhang dieser drei Grundwidersprüche ist, wie wir früher sahen, ein derartiger, dass, wenn der eine gilt, notwendigerweise auch die beiden übrigen gelten müssen, und doch zeigt sich beim räumlichen Continuum das seltsame Schauspiel, dass dem nicht so ist, dass da der eine und zwar der erste und grundlegende Widerspruch nicht gilt, während die beiden übrigen vollständig gelten. Dieser Zwiespalt rührt, wie wir es leicht nach dem eben Ausgeführten bemerken können, davon her, dass der Begriff des Continuums auf den Raum angewandt ist, auf den er keine Anwendung haben kann. Während das Unendliche, wenn man das Discretum vor sich hat, notwendigerweise in erster Reihe den Widerspruch der unendlichen Zahl in sich enthält, aus dem die beiden anderen Widersprüche des plötzlichen Sprunges des Endlichen in's Unendliche und der Endlichkeit jedes Unendlichen entspringen, entfällt dieser Widerspruch bei dem Unendlichen des Continuums vollständig, da das Continuum keine getrennten Theile hat, die zu zählen wären. Das räumlich ausgedehnte Continuum ist nun, insofern es Continuum ist, von jenem grundlegenden Widerspruche der unendlichen Zahl frei, aber dasselbe ist nicht von den beiden anderen Widersprüchen frei, und zwar einfach deshalb nicht, weil der Raum nur scheinbar als Continuum gedacht werden kann, in Wahrheit aber Discretum ist und bleibt. Ist der Raum in Wahrheit ein Discretum, dann ist es kein Wunder, dass jede endliche Strecke in ihm nur durch einen plötzlichen Sprung in die unendliche Strecke hinübergeht, und dass jede unendliche Strecke in Wahrheit eine endliche ist. Wäre der Raum ein Con-

tinuum in wahrem Sinne dieses Wortes, dann könnten in ihm diese Widersprüche nicht auftreten, wahres Continuum ist derselbe aber deshalb nicht, weil in wahrem Continuum die ungetrennten Theile in keinen bestimmten Grössenverhältnissen zueinander stehen (sonst müssten seine Theile der Grösse nach bestimmt sein, was jedoch dem Begrife des Continuums schnurstracks widersprechen würde), in einem solchen Continuum giebt es also keine Theile, die in endlichen Zahlverhältnissen zueinander stünden, wie es mit den Raumstrecken in Bezug aufeinander der Fall ist, im wahren Continuum ist demgemäss auch kein Übergang der endlichen Theilstrecken in unendliche vorhanden. Es mag paradox erscheinen, nach diesen Ausführungen ist es aber unzweifelhaft, dass schon die Thatsache, wonach ich im Raume zwei Strecken ziehen kann die in dem einfachen endlichen Zahlenverhältniss 1 : 2 stehen, dass, sage ich, schon diese einfache Thatsache den Raum verhindert ein Continuum sein zu können. Das Bestehen des Widerspruchs des plötzlichen Sprunges des Endlichen in's Unendliche und des Widerspruchs der Endlichkeit jedes Unendlichen im Raume setzt somit die Discretheit des Raumes notwendigerweise voraus (indem diese Widersprüche das Bestimmtsein des Grössenverhältnisses seiner Theile voraussetzen), womit ihre Untrennbarkeit von dem ersten Widerspruche des Unendlichen, der diese Discretheit des Raumes zu seiner unmittelbaren Voraussetzung hat, vollauf bestätigt ist.

Nach diesen Ausführungen wird es uns nunmehr nicht schwer sein die strenge Scheidung des Unendlichen im Sinne des Discreten von dem Unendlichen im Sinne des Continuums durchzuführen. Das wahre Unendliche, der wahre Unendlichkeitsbegriff ist einzig und allein der Begriff des absolut ausdehnungslosen aus vollkommen voneinander ungetrennten Theilen bestehenden Continuums, während das discrete Unendliche das falsche Unendliche ist, den falschen Unendlichkeitsbegriff darstellt. Wir haben gesehen wie einige Mathematiker (vgl. die Anmerkung zur s 219) behaupten, dass das Unendliche, da dasselbe eben nicht das Endliche ist, notwendigerweise Eigenschaften besitzen müsse, die dem Endlichen nicht zukommen. Die Richtigkeit dieser Behauptung hatten wir damals bereitwilligst anerkannt und nur hinzugefügt, dass die besagten das Unendliche von dem Endlichen unterscheidenden Eigenschaften nichts widersprechendes in sich enthalten dürfen. Solange nun das Unendliche discret gefasst wird (und umgekehrt solange das Discrete als unendlich gefasst wird) erscheinen im Unendlichen Widersprüche, die dasselbe vollkommen unmöglich machen. Von den vier Grund-

widersprüchen, die in dem Begriffe des discreten Unendlichen bestehen, ist der wichtigste der vierte (von Cantor und Dedekind sogar zur Definition des Unendlichen erhobene) Widerspruch, wonach jede unendliche discrete Menge Theilmengen hat, die mit ihr aequivalent sind. Der wesentliche Unterschied des Unendlichen von dem Endlichen bestünde sonach, dieser Auffassung gemäss, darin, dass im Endlichen Theil und Ganzes voneinander vollkommen verschieden sind, während im Unendlichen Theil und Ganzes einander auch gleich sein können (denn nicht jede, nur unendliche Theile sind mit dem unendlichen Ganzen gleich). Nun, es ist wahr, von den vier Grundwidersprüchen des discreten Unendlichen ist dieser vierte Widerspruch, wie wir früher bemerkt haben (vgl. die erwähnte Anmerkung), bei weitem der wichtigste und in ihm ist wirklich indirekt die wichtigste und wesentliche Eigenschaft des wahren Unendlichen in seinem Unterschiede von dem Endlichen ausgedrückt. Wir haben gesehen, dass das unendliche Continuum nur dann begrifflich möglich ist, wenn seine ungetrennten Theile ihrer Grösse nach absolut unbestimmt sind, denn nur in diesem Falle ist der Theil nicht von dem Ganzen geschieden, obgleich er von ihm verschieden ist. Wenn nun das Unendliche discret gefasst wird, ist es kein Wunder, dass diese Forderung, der Theil des Unendlichen dürfe von dem Ganzen nicht geschieden sein, die dem Discreten ganz entsprechende Form annimmt, dass er von dem Ganzen sogar nicht verschieden ist. Im wahren Unendlichen ist der Theil von dem Ganzen immer verschieden, ganz ebenso wie in dem Endlichen der Theil stets von dem Ganzen verschieden ist, mit dem einzigen Unterschiede, dass das Verschiedenheitsverhältniss im ersten Falle ein ganz unbestimmtes, während es in dem zweiten ein ganz bestimmtes (zahlenmässig ausdrückbares) ist; sobald wir also das Unendliche discret fassen, muss die Ungeschiedenheit der Theile des continuirlichen Unendlichen von diesem in der Nichtverschiedenheit der unendlichen Theile des discreten Unendlichen von diesem selbst als dem Ganzen ihren Ausdruck finden, die Unbestimmtheit des Grössenverhältnisses des (unendlichen) Theiles mit dem (unendlichen) Ganzen in dem wahren Unendlichen findet also ihren Ausdruck in der völligen Gleichheit der unendlichen Theile mit dem Ganzen in dem discreten Unendlichen. Aber freilich wäre es andererseits nicht ganz logisch, wenn das unbestimmte Verschiedenheitsverhältniss zwischen dem Theile und dem Ganzen in dem wahren Unendlichen eindeutig die Gestalt der völligen Gleichheit in dem discreten Unendlichen annehmen würde, es ist vielmehr ganz logisch, dass dieses Verhältniss selbst zugleich auch

nicht ein solches ist, was, wie wir gesehen haben, auch thatsächlich der Fall ist.

Das discrete Unendliche stellt somit eine Vereinigung zweier ganz entgegengesetzter schlechthin unvereinbaren Begriffe dar, von denen jeder für sich etwas widerspruchsloses ist, ihre Einheit dagegen, ihrer divergierenden Eigenschaften wegen, widerspruchsvoll ist. Das discrete Unendliche ist die Einheit des discreten Endlichen und des continuirlichen Unendlichen, das Prädicat der Unendlichkeit hat dasselbe von dem letzteren das Prädicat der Discretheit von dem ersteren, es soll somit Prädicate vereinigen, die unvereinbar miteinander sind. Denn das Wesen des Endlichen besteht in seiner Discretion und umgekehrt jedes Discrete muss endlich sein; ebenso besteht das Wesen des Unendlichen in der Continuität und umgekehrt muss jedes Continuirliche unendlich sein; folglich ist das discrete Unendliche ebensowenig möglich wie das endliche Continuum möglich ist. Die Unmöglichkeit des endlichen Continuums wird im Princip anerkannt (niemand hat die Endlichkeit des Continuums nach unten behauptet), man will aber nicht ebenso die Unmöglichkeit des discreten Unendlichen anerkennen, odgleich beides gleichermaassen entweder möglich oder unmöglich ist. Mag übrigens das continuirliche Unendliche begrifflich möglich oder unmöglich sein, das discrete Unendliche ist absolut unmöglich und wird durch seine innere widerspruchsvolle Natur vollständig vernichtet. Denn dieses Unendliche ist in Wahrheit gar nichts anderes als das völlig unbestimmt und endlos gedachte Endliche, das discrete Unendliche soll ja nichts anderes bedeuten als die Endlosigkeit des Endlichen. Die abstrakte Zahlreihe muss unendlich sein, weil sich kein letztes endliches Glied in derselben denken lässt, die Zeitreihe und die Raumreihe sollen unendlich sein, weil sie konkrete Specificationen jener abstrakten Idee sind. Nun aber leider zeigt sich bei näherem Zusehen diese anscheinend so notwendige und unaufhaltbare Fortsetzung der endlichen Zahlreihe als eine absolute Unmöglichkeit. Endlos kann ich das Endliche noch denken, wenn diese Endlosigkeit nur rein potentiell gefasst wird, so wie das in der Zeitreihe thatsächlich der Fall ist; endlos kann das Endliche durchaus nicht sein sobald diese seine Endlosigkeit als aktuelle gefasst wird, denn dann treten gleich die vier Grundwidersprüche des Unendlichen auf, die nichts anderes bedeuten als dass die unbestimmte (und bestimmte) Endlichkeit des Endlichen nicht zu einer bestimmten Unendlichkeit gemacht werden kann. Ob das währe Unendliche besteht oder nicht, das ist eine offene Frage, was aber sicher ist ist dies,

dass dieses Unendliche, wenn es besteht, ganz und gar ausserhalb der Reihe des Endlichen liegen muss, dass das Unendliche nur dann bestehen kann, wenn das Endliche kein Bestandtheil mehr von ihm ist, wenn das Unendliche schlechthin jede Gemeinschaft mit dem Endlichen als solchem verliert.

Eine rein mathematische Betrachtung führt uns und kann uns nur bis dahin führen, den Begriff des Unendlichen von dem Begriffe des Endlichen streng zu scheiden, das Unendliche aus dem Gebiete des Endlichen vollständig auszuschliessen; ob aber dem so gewonnenen rein abstrakten Unendlichkeitsbegriffe irgend etwas in der Wirklichkeit entspricht, das geht die Mathematik gar nichts mehr an, das ist Sache der Metaphysik. Wir haben nun in dem letzten Kapitel des ersten Abschnitts gesehen, dass diesem wahren Unendlichkeitsbegriffe in der Wirklichkeit wirklich etwas entspricht, nämlich die absolute qualitätslose Substanz, und haben dann gesehen, wie die gesammte endliche Wirklichkeit aus ihr reell stammt. Danach möchte es nun scheinen, dass unsere obige Behauptung, wonach das Unendliche ganz ausserhalb des Endlichen liegt und als solches mit ihm keine Gemeinschaft hat, unrichtig sei. Und thatsächlich wäre diese Behauptung unrichtig wenn man sie so verstünde, dass das Reich des Unendlichen und dasjenige des Endlichen schlechthin nnd absolut beziehungslos zueinander wären, richtig ist diese Behauptung nur in dem Sinne, dass das Unendliche als solches ausserhalb des Endlichen liegt und in dem Sinne keine Gemeinschaft mit diesem hat, dass dieses etwa selbst als solches sein Bestandtheil wäre, wie das bei jenem falschen Unendlichen der Fall ist. Das Endliche stammt, metaphysisch genommen, aus dem Unendlichen, und mathematisch ist diese Genesis deshalb möglich, weil ja das Unendliche ganz so wie das Endliche aus Theilen besteht, mit dem einzigen Unterschiede, dass das Unendliche dabei schlechthin ungetheilt ist, während das Endliche getrennte Theile hat, d. h. getheilt ist. Nichts hindert aber vorauszusetzen, dass das Unendliche in Theile getheilt werden könne — da ja dasselbe solche enthält — nur darf man sich diese Theilung nicht als ein Zerfallen des Unendlichen in Theile sondern einzig und allein als ein Ablösen der Theile von dem Unendlichen denken. Löst sich ein Theil von dem Unendlichen ab, dann hört er auf, weiter dem Unendlichen anzugehören, er gehört nunmehr dem Endlichen an, das Unendliche und das Endliche bleiben also dabei vollständig aussereinander. Auf dieses letzte so bedeutungsvolle Verhältniss des Endlichen zum Unendlichen können wir erst in dem dritten Ab-

schnitte der Ontologie eingehen und begnügen uns hier mit diesen allgemeinen Bemerkungen.

Bevor wir nun zur Betrachtung des Discreten in seiner wahren Gestalt übergehen, bleibt uns nur noch ein Unterschied unaufgeklärt, ein Unterschied aber der aufgeklärt werden muss, wenn unsere Voraussetzung des ausdehnungslosen Continuums nicht in der Luft schweben soll, trotz aller Stützen die wir ihr gegeben haben. Was für Unterschied besteht nämlich zwischen dem einfachen ausdehnungslosen Continuum und dem einfachen untheilbaren realen Raumpunkte, dem letzten Bestandtheile des discreten endlichen Raumes? Aktuell scheinen ja beide gar keinen Unterschied zu haben und ihr Unterschied bestände nur darin, dass der einfache reale Punkt auch potentiell untheilbar nicht nur also aktuell ungetheilt ist, während das ausdehnungslose Continuum wohl aktuell ungetheilt potentiell aber theilbar ist. Aber der so charakterisierte Unterschied ist völlig ungenügend. Einerseits nämlich ist damit offenbar gar kein Unterschied zwischen beiden wirklich statuirt, wenn das Eine potentiell theilbar und das Andere potentiell untheilbar ist, denn dieser Unterschied als solcher muss, wenn er nicht eine blosse Fiktion sein soll, offenbar einen reellen d. h. aktuellen Unterschied in den betreffenden Objecten voraussetzen, denn wie wäre es sonst möglich, dass das Eine potentiell theilbar und das Andere potentiell untheilbar ist, wenn beide aktuell ganz gleicher Natur sind? Und andererseits, was mit diesem unmittelbar zusammenhängt, die potentielle Theilung des unausgedehnten Continuums als solche ist etwas was gleichsam ganz ausserhalb dieses Continuums geschieht, nicht das Continuum wird als solches getheilt, sondern es werden von ihm einzelne Theile abgelöst, so dass die potentielle Theilung des Continuums als solche notwendigerweise einen inneren Unterschied des Continuums von dem einfachen Discretum voraussetzt. Dieser wesentliche Unterschied kann nun nur darin liegen, dass das unausgedehnte einfache Continuum nicht in demselben Sinne aktuell einfach ist in welchem dies der einfache reale Punkt ist, das einfache unausgedehnte Continuum muss als eine in sich Theile habende Einheit gedacht werden, während der einfache unausgedehnte Punkt keine Theile in sich hat. Wie kann aber etwas unausgedehntes Theile in sich haben? Offenbar nun, wenn Theile nur aussereinander bestehen könnten, könnten auch die Theile des Continuums nicht bestehen, weil sie ungetrennt sind. Man muss demnach voraussetzen, dass die Theile des Continuums ineinander sind, dass das einfache Continuum nur in extensivem Sinne aber nicht auch in intensivem Sinne einfach und untheilbar ist, während der einfache

unausgedehnte Punkt sowohl in extensivem wie in intensivem Sinne schlechthin einfach und untheilbar ist, und wenn so ihr Unterschied angegeben wird dann ist er wirklich ein ganz eindeutiger. Freilich haben wir um diesen Unterschied zu statuieren zu einer Kategorie unsere Zuflucht genommen, die sehr selten in der Metaphysik und Mathematik in Betracht gezogen worden ist. Intensität in wahrem Sinne dieses Wortes, als das Ineinander der Theile, scheint etwas schlechthin unmögliches zu sein, und doch haben wir in dem zweiten Kapitel des ersten Abschnitts constatiert, dass dieselbe unzweifelhaft als eine der fundamentalen Eigenschaften unserer unmittelbaren Bewusstseinsinhalte anzutreffen ist. In dem zweiten Unterabschnitt dieses Abschnittes werden wir die fundamentale Bedeutung dieser Kategorie neben derjenigen der Extensität für die qualitative Struktur der Wirklichkeit kennen lernen, bemerken hier nur noch, dass die Intensität im Reiche der endlichen qualitativen Wirklichkeit von der Intensität im Reiche der unendlichen qualitätslosen Wirklichkeit streng zu unterscheiden ist, dass die Intensität der qualitativen Wirklichkeit discrete Intensität ist, während die Intensität der qualitätslosen Wirklichkeit eine continuirliche ist, so dass die Intensität sowohl continuirlich als discret sein kann, während die Extensität nur discret ist.

Wenn nun so das räumliche Continuum nicht bestehen kann und das Continuum, wenn es besteht, unräumlich sein muss, so kann der Raum nur discret sein, d. h. aus letzten einfachen untheilbaren Theilen bestehen, und wir müssen nun die positive Möglichkeit dieses Discretums und seine innere Struktur feststellen. Was wir bisher festgestellt haben ist erstens, dass ein räumliches Continuum nicht möglich ist, dass der Raum also nur ein Discretum sein kann, und zweitens dass ein unendliches Discretum unmöglich ist, dass das Discretum also, wenn es besteht, ein endliches sein müsse. Es fragt sich also nun, ob dieses räumliche Discretum ein lückenhaftes oder ein lückenloses ist und wie es seiner inneren Struktur nach zu denken ist, und ob es überhaupt möglich ist.

Die Möglichkeit des räumlichen Discretums haben wir im Allgemeinen schon früher, als wir die drei geometrischen Beweise gegen die Möglichkeit desselben in Betracht zogen, festgestellt, und wollen nun jene Ausführungen in einigen wichtigen Punkten ergänzen. Schon bei der Zeit (vgl. s. 138) haben wir festgestellt, dass die discrete Grösse als solche keine begriffliche Unmöglichkeit darstellt, dass wir in der arithmetischen Zahlgrösse, die aus einfachen absolut untheilbaren Zahleinheiten besteht, das begriffliche

kann als aus einer absolut unbestimmt unendlicher Anzahl von einander parallelen Geraden bestehend gedacht werden. Wenn sie aber so gedacht wird (und so allein muss ihre primäre Entsteluugsweise gedacht werden) dann wird offenbar diese Ebene im Unendlichen zu einem einzigen Punkte werden d. h. sie verwandelt sich in einen einzigen Punkt. Denn da der Punkt, in dem sich alle die die Ebene constituierenden parallelen Geraden im Unendlichen schneiden, seiner Lage nach in dieser Ebene offenbar ein willkürlicher ist, und trotz dieser Willkürlichkeit nur ein einziger Punkt es ist, in dem sich alle diese Geraden im Unendlichen schneiden, so bedeutet das nicht mehr und nicht weniger, als dass die Ebene von dem einen Punkte überall ungeben ist, was wiederum nichts anderes bedeutet, als dass die Ebene im Unendlichen zu einem Punkte wird.*)

Verwandelt sich die Ebene, wenn sie unendlich wird, in einen einzigen Punkt, dann bedeutet das nicht mehr und nicht weniger als dass der ausgedehnte Raum, er sei von einer noch so grossen Anzahl von Dimensionen, sich ebenso in einen einzigen Punkt verwandeln muss. Denn wie wir uns die Ebene als aus einer unbestimmt unendlichen Anzahl von Geraden bestehend uns gedacht haben, ebenso können wir den dreidimensionalen Raum als aus unbestimmt unendlich vielen Ebenen bestehend uns denken, und da jede dieser Ebenen im Unendlichen sich in einen Punkt verwandelt, so wird sich der dreidimensionale Raum folglich zunächst in eine Gerade verwandeln (denn die ihn constituierenden Ebenen sind als einander parallel zu denken), die Gerade aber wird im Unendlichen zum Kreise, der Kreis aber als geschlossene Linie enthält in sich offenbar die Ebene (dies ist die Kreisfläche) und die unendliche Ebene muss sich ja offenbar in einen einzigen Punkt verwandeln. Es ist nun leicht einzusehen wie und auf welche Weise jeder Raum von einer höheren Dimensionsanzahl sich schliesslich in einen einfachen Punkt verwandeln müsse. In Wahrheit aber kann der continuirliche Raum von mehr als zwei Dimensionen nicht einmal versuchsweise entstehen: der Raum von einer Dimension d. h. die Gerade kann dies noch, sobald sie aber absolut unendlich wird,

*) Der hier angeführte Beweis für die Verwandlung der unendlichen Ebene in den Punkt enthält zwar manches Willkürliche, für unsere Zwecke genügt er aber vollständig. Ein noch strengerer Beweis liesse sich nur in analytischer Weise führen, was uns hier zu weit führen würde. Ich bemerke zugleich, dass die projektive Geometrie zu einem von dem obigen abweichenden Resultat führt, nach derselben verwandelt sich nämlich die Ebene im Unendlichen in eine Gerade. In diesen verschiedenen Resultaten, die auf verschiedenen Wegen gewonnen werden, offenbart sich am Ende nur die ganze Willkür des Unendlichkeitsbegriffs.

das Hineingehören der einfachen realen Negationsacte, die zwei reale Punkte in diesem Raume voneinander trennen, unmöglich macht, wie die innere Struktur der Zeit, wie wir gesehen haben, das Hineingehören der einfachen Veränderungsaugenblicke in die Zeitreihe unmöglich gemacht hat. Obgleich nun so sowohl die realen Negationsacte der simultanen Raumreihe wie die realen Veränderungsacte der succesiven Zeitreihe in diese Reihen selbst nicht hineingehören — so dass alle Sätze über die allgemeine und specielle Struktur dieser Reihen völlig unabhängig von der metaphysisch notwendigen Voraussetzung jener sind — und somit zwischen den realen Zeit- und Raumpunkten als solchen notwendigerweise leere nichtseiende absolut einfache untheilbare Lücken bestehen, so sind doch diese Lücken, wenn man die Sache streng logisch und mathematisch betrachtet, gar nicht als Nullen zu charakterisieren. Denn in logischem und mathematischem Sinne ist nur dasjenige als Null zu bezeichnen, was absolut keine Grösse hat, was weder einfach noch zusammengesetzt ist, denn Null ist das mathematische Nichts, und das Nichts hat keine Eigenschaften, also auch keine Grösseneigenschaften. Die leeren nichtseienden Lücken in dem Raume und der Zeit sind aber nicht Nichts, sie sind ein Nichts nur in qualitativem Sinne insofern sie als solche mit keinem realen Inhalte erfüllt sind, in quantitativem Sinne sind sie aber nicht als Nullen zu betrachten, da sie ganz ebenso einfach sind wie die durch sie getrennten realen Punkte, vielmehr sind sie ganz ebenso als Einheiten zu betrachten, wie es diese realen Einheiten als solche sind. Rein quantitativ also unterscheiden sich diese beiden Arten von Einheiten voneinander gar nicht, ihr einziger Unterschied besteht in ihrem realen Inhalt, die einen sind nämlich mit einem solchen erfüllt, während die anderen mit einem solchen nicht erfüllt sind. Wenn dem nun so ist, dann ist es einleuchtend, dass in der abstrakten arithmetischen Grösse keine Rücksicht auf diesen qualitativen Unterschied (wenn dieser Ausdruck nicht missverständlich ist) beider genommen wird, sondern die einfache Zahleinheit rein als solche betrachtet wird. Sobild wir uns aber nach dem realen Werth der abstrakten Zahleinheiten umsehen, müssen wir durchaus diesen ihren qualitativen Unterschied in Betracht ziehen, und dann müssen wir anerkennen, dass sowohl die discrete Zeit- wie die discrete Raumgrösse aus zwei toto genere voneinander verschiedenen Einheitsarten bestehen.

Es könnte nun zunächst scheinen, dass, wenn wir die rein quantitative Seite des realen Raumes (und der realen Zeit) in Betracht ziehen, wir uns um diesen qualitativen Unterschied seiner

letzten Bestandtheile gar nicht zu kümmern brauchen. Dem ist aber nicht so. Der grundverschiedene reale Werth jener beiden räumlichen Punktarten muss gerade deshalb in Betracht gezogen werden, weil der sogenannte geometrische Raum mit dem realen Raum als solchem zusammenfällt, nur wenn dem nicht so wäre, nur wenn ein leerer Raum neben den realen Inhalten bestünde, nur dann könnte man gänzlich davon abstrahieren, ob ein Raumpunkt mit realem Inhalte erfüllt ist oder nicht. Tiefer besehen stellt es sich vielmehr heraus, dass eine geometrische Betrachtung des realen discreten Raumes nur dann möglich ist, wenn jener qualitavive Unterschied seiner letzten Bestandtheile in Betracht gezogen wird. Wird dieser qualitative Unterschied nicht in Betracht gezogen, dann ist jede der beiden Punktarten eine arithmetische Zahleinheit und da alle arithmetischen Zahleinheiten miteinander gleichartig sind, so liessen sich alle räumlichen Einheiten unmittelbar miteinander summieren. (Die Grösse der discreten Raumstrecke AF (vgl. Figur 6 Tafel I) wäre dann gleich der Anzahl aller in ihr enthaltenen Punkte und nicht der Anzahl der in ihr enthaltenen nichtseienden Punkte, was offenbar absurd wäre.) Sobald man den qualitativen Unterschied jener beiden Punktarten in Betracht zieht, hören sie auf gleichartig und summierbar zu sein, und es fragt sich dann nur, welchen Punktarten die primäre Stelle einzuräumen ist. Nun, hier, bei dieser Frage können wir einen gewissen Unterschied zwischen der geometrischen und der realen Betrachtung des Raumes machen; insofern der reale Raum nämlich seinem realen Inhalte nach betrachtet wird, insofern ist unzweifelhaft den realen Punkten in demselben der Vorrang vor den irrealen zu geben, insofern derselbe Raum aber seiner räumlichen Beschaffenheit nach in Betracht gezogen wird, insofern ist den irrealen Punkten in demselben der Vorrang vor den realen zu geben. Denn die irrealen Punkte als solche sind es, die die realen voneinander trennen, die dieselben räumlich machen, die dieselben in einen Raum setzen, zwei reale Punkte sind zwei, sind räumlich voneinander entfernt nur dadurch, dass zwischen denselben ein irrealer Raumpunkt da ist, der sie voneinander trennt, und der so diese ihre Trennung und Entfernung bedeutet. Dasjenige also was die Ausdehnung, was den Raum zu dem Raum macht, sind die irrealen Punkte, und ihnen ist demgemäss bei der rein geometrischen Betrachtung des Raumes der Vorrang zu geben.

Was bedeutet aber dieser Vorrang der einen Punktart vor der anderen? Nichts anderes als dass, da beide Punktarten nicht miteinander summierbar sind, wenn die eine Punktart für die grundlegende angenommen wird die andere dann keine Rolle spielt. Allerdings ist

dies nicht so zu verstehen, dass wenn die trennenden Punkte in Betracht gezogen werden die getrennten verschwinden und gleichsam als absolute Nullen zu betrachten sind und vice versa, sondern es bedeutet nur, dass die trennenden Punkte allein in Betracht zu ziehen sind wenn man die rein räumliche Seite, die Extension des realen Raumes in Betracht zieht, und dass die getrennten Punkte allein in Betracht zu ziehen sind, wenn man das in der Extension sich Befindende selbst in Betracht zieht. Da man aber beide, die Extension und das Extendierte, in Wahrheit nicht voneinander trennen kann, so sind in dem geometrischen Raume ebenso wenig die extendierten wie in dem realen Raume die extendierenden Punkte verschwunden, nur ist in dem ersten Falle die eine und in dem zweiten Falle die andere Punktenart die Hauptsache.

Das räumliche Discretum ist also, wie man aus unseren bisherigen Ausführungen ersieht, ganz gut möglich sobald man in demselben zwei wesentlich verschiedene Punktarten voraussetzt, während dieses Discretum bei der Voraussetzung einer einzigen Punktenart absolut unmöglich ist und sich in das absolute Continuum verwandelt, in welchem der einfache Raumpunkt allerdings nur als inhaltsloser mathematischer Grenzpunkt bestehen kann, da es in einem solchen Continuum keine einfache untheilbare reale Einheit giebt. In Wahrheit aber ist in dem Continuum nicht einmal ein solcher inhaltsloser Punkt möglich, denn die wirkliche Möglichkeit eines solchen Punktes würde die reelle Getrenntheit der durch ihn getrennten continuirlichen Strecken bedeuten, was die Umwandlung des Continuums in das lückenlose Discretum bedeuten würde, wir lassen dies aber hier noch ausser Betracht und wollen nur einen Vergleich der geometrischen Betrachtung des räumlichen Discretums mit derjenigen des Continuums anstellen. Obgleich im räumlichen Continuum inhaltslose Raumpunkte hineingedacht werden können, und obgleich, wenn wir durch zwei Punkte eine Strecke in diesem Continuum begrenzt haben, so dass diese Strecke die räumliche Entfernung jener beiden Punkte bedeutet, diese Punkte dabei die Rolle jener realen Punkte im discreten Raume spielen, so entsprechen doch diese Punkte nicht jenen extendierten Punkten des discreten Raumes, und zwar deshalb nicht weil der ganze continuirliche Raum als solcher dem extendierenden Theil des discreten Raumes entspricht. Und dann weiter, während der exendierende Theil des discreten Raumes aus inhaltslosen Punkten besteht und mit diesen Punkten begrifflich zusammenfällt, ist der extendierende Theil des continuirlichen Raumes ganz ebenso real wie der extendierte Theil

des discreten realen Raumes real ist. Dies ist so zu verstehen, dass, wenn der continuirliche Raum als mit realem Inhalte erfüllt gedacht wird, dieser reale Inhalt dann extendierend wird, während die Rolle des Extendierten dann die inhaltslosen Punkte übernehmen. Während also beim discreten Raume der reale Raum im engeren Sinne von dem geometrischen Raum im engeren Sinne geschieden ist, ist der continuirliche Raum sozusagen ganz der geometrische Raum, und der reale Raum hat in diesem Raume eine bloss fiktive Bedeutung. Später werden wir sehen dass der geometrische Raum im eigentlichen Sinne ohne den realen extendierten Raumtheil nicht möglich ist, und dass die geometrischen Gebilde gerade deshalb in dem continuirlichen Raume unmöglich sind, weil dieser reale extendierte Theil in ihm eine blosse Fiktion ist.

Nachdem wir nun so die allgemeine Möglichkeit des discreten Raumes festgestellt haben, fragt es sich, wie dieses Discretum näher zu bestimmen ist, ob dasselbe lückenhaft oder lückenlos sei? Lückenhaft wäre das räumliche Discretum dann, wenn es zwischen den einfachen realen Punkten desselben *ausgedehnte* nichtseiende Lücken gäbe analog den leeren Zwischenräumen der discreten im leeren Raume zerstreuten Materie. Wenn der leere Raum ein besonderes neben der materiellen Substanz bestehendes Wesen wäre. dann liesse sich wohl das lückenhafte Discretum als die simultane Gegebenheitsform der Theile dieser materiellen Substanz denken; sollte aber dabei der leere Raum selbst als solcher ein Discretum sein, so könnte derselbe offenbar nicht mehr ein lückenhaftes Discretum sein. Denn entweder müsste man dann annehmen, dass die discreten Theile des leeren Raumes durch leere Zwischenräume voneinander getrennt sind, in welchem Falle also der erste leere Raum sich in dem zweiten befände u. s. f. in infinitum, oder man müsste voraussetzen, dass die discreten einfachen Theile des leeren Raumes durch absolut leere nichtseiende ausgedehnte Lücken voneinander getrennt sind, was offenbar unmöglich ist. Man kann für den leeren Raum, der etwas zwischen dem Sein und dem Nichtsein in der Mitte stehendes ist, noch voraussetzen, dass derselbe ausgedehnt ist, in Bezug auf das absolute Nichts kann aber diese Voraussetzung gar nicht mehr gemacht werden, da das absolute Nichts die Abwesenheit aller Prädicate also auch des Prädicats der Ausdehnung bedeutet. Der leere Raum muss also, wenn er ein Discretum ist, notwendigerweise ein lückenloses Discretum sein, und um so mehr wird dies für den realen mit Inhalt erfüllten Raum gelten müssen. Die realen einfachen Punke des realen Raumes können offenbar nicht durch leere nichtseiende

ausgedehnte Lücken voneinander getrennt sein, da das Nichts keine Ausdehnung hat und haben kann, sie müssen sich also unmittelbar miteinander berühren, die nichtseienden Lücken, die sie trennen, können keine Ausdehnung haben, der reale Raum muss also notwendigerweise ein lückenloses Discretum sein.

Hier nun, bevor wir weiter auf die specielle Struktur des realen Raumes übergehen, müssen wir die bisherigen im Grunde rein mathematischen Ausführungen unterbrechen und eine tiefe und ernste metaphysische Frage uns vorlegen, die durchaus nicht umgangen werden kann. Die Notwendigkeit des lückenlosen realen Discretums deducieren wir aus der Unmöglichkeit einer Ausdehnung des reinen absoluten Nichts, und andererseits kann dieses absolute Nichts auch in dem Sinne nicht unausgedehnt sein, dass es die absolut einfache untheilbare Einheit darstellt, und doch kann das lückenlose Discretum ohne diese nichtseienden einfachen Lücken nicht gedacht werden. Und thatsächlich, die absolute Einfachheit ist ganz ebenso ein reales Prädicat wie die Ausdehnung, und wenn dem Nichtseienden nicht das Prädicat der Ausdehnung so kann demselben auch das Prädicat der einfachen Nichtausdehnung nicht beigelegt werden, und so scheint demnach unser lückenloses reales Discretum ganz ebenso und aus demselben Grunde unmöglich zu sein, aus dem das lückenhafte reale (und leere) Discretum unmöglich ist. Die Schwierigkeit, die hier besteht, ist ernst und tiefgehend, sie zeigt wie tief die Wurzel der Mathematik in den Boden der Metaphysik hineingewachsen ist, wie die Möglichkeit der discreten Mathematik in letzter Instanz von der Lösung einer der metaphysischen Hauptschwierigkeiten abhängt. Die leere absolut unausgedehnte Lücke, welche notwendigerweise zwei reale Punkte des discreten realen Raumes voneinander trennt, bleibt solange eine Unmöglichkeit solange nicht etwas Reales vorausgesetzt wird, was diese Lücke als solche setzt und möglich macht. Zunächst möchte man meinen, dass dieses Reale, welches wir bisher als den realen Trennungs- und Negationsact charakterisiert haben, sich in diesen leeren Lücken als solchen befinden, sie gleichsam mit seiner Realität erfüllen müsste. Wir werden später die geometrische Unmöglichkeit dieser Ausfüllung beweisen, sie wird aber sogleich einleuchtend, sobald man sich die eigentliche Bedeutung derselben vergegenwärtigt. In wahrem Sinne erfüllt wäre jene Lücke nur dann, wenn sie so erfüllt wäre, dass sie gänzlich und absolut verschwindet, d. h. eigentlich nur dann, wenn das Discretum als solches überhaupt zu sein aufhörte, wenn sich dasselbe in's absolute Continuum verwandelte. Ist jene Lücke so erfüllt, dass die beiden realen Punkte voneinander

und von dem die Lücke erfüllenden Negationsacte reell getrennt bleiben, dann haben wir in Wahrheit die leere Lücke gar nicht vermieden, wir haben vielmehr statt der einen Lücke zwei neue gesetzt, denn nun muss je eine leere Lücke zwischen einem jedem der realen Punkte einerseits und dem realen Negationsacte andererseits, der zwischen diesen beiden Punkten liegt, bestehen. Die Schwierigkeit verchwindet aber vollständig wenn wir voraussetzen, dass der zwei reale Punkte voneinander trennende reale Negationsact nicht *im räumlichen Sinne* zwischen diesen Punkten liegt, sondern räumlich ausserhalb derselben, denn in diesem Falle besteht einerseits sowohl jene leere nichtseiende Lücke zwischen den beiden realen Raumpunkten, insofern sie Raumpunkte sind, wie andererseits wieder diese leere nichtseiende Lücke im metaphysischen Sinne kein absolutes Nichts mehr darstellt, sondern ein reales Etwas, den realen Negationsact nämlich, der als solcher ja direkt die beiden Raumpunkte voneinander trennt. Wie man also sieht, kann nur die Voraussetzung der Realiät des Negationsactes die metaphysische Möglichkeit des lückenlosen Discretums begreiflich machen (wir werden später sehen, dass das lückenlose Discretum auch in seiner inneren Struktur gewisse Eigenschaften enthält, die wiederum nur durch diese Voraussetzung bestehen können) und indem wir uns hier mit diesen vorläufigen Bemerkungen begnügen, werden wir weiter unten die Unmöglichkeit des Gegebenseins der realen Negationsacte im discreten Raume streng mathematisch beweisen, die letzten metaphysischen Consequenzen daraus aber allerdings erst im dritten Abschnitte der Ontologie ziehen.

Wenn wir nun die Frage nach der inneren (speciellen) Struktur des lückenlosen Discretums erheben, so können wir folgendes allgemeine Criterium zur Entscheidung der Frage, welche Punktenanordnungen ein solches lückenloses Discretum nicht und welche es einzig und allein bilden können, aufstellen: *jede Punktenanordnung, in der es leere nichtseiende ausgedehnte Lücken giebt, ist unmöglich, möglich nur diejenige, in der die leeren nichtseienden Lücken unausgedehnte einfache Einheiten darstellen.* Dieses allgemeine Criterium folgt unmittelbar aus der Definition des lückenlosen resp. des lückenhaften Discretums und es braucht nichts besonderes mehr zu seiner Begründung hinzugefügt zu werden. Folgendes ist aber noch hinzuzufügen. Wenn eine Punktenanordnung, in der die die einzelnen Punkte trennenden leeren Lücken ausgedehnt d. h. grösser als die einfache Einheit sind, unmöglich ist, *dann ist ebenso eine Punktenanordnung, in der die leeren die einzelnen Punkte vonein-*

ander trennenden Lücken kleiner als die einfache geometrische Einheit sind, *unmöglich*, denn eine kleinere Entfernung als es diejenige ist, in der sich zwei Punkte unmittelbar miteinander berühren, ist absolut unmöglich (sonst müsste die Theilbarkeit der einfachen Einheit vorausgesetzt werden, was jedoch absurd ist), so dass dieser Satz ganz ebenso aus der Definition des lückenlosen Discretums folgt, wie es mit dem ersten der Fall ist, und wir müssen denselben neben dem ersten als das zweite allgemeine Criterium zur Entscheidung der Frage, welche Punktenanordnung ein lückenloses Discretum darstellt, betrachten.

Auf Grund dieser beiden Kriterien nun lassen sich sehr leicht aus allen möglichen Punktenanordnungen (Punktmengen oder Punktsystemen) diejenigen ausscheiden, die ein lückenloses Discretum darstellen. Diese Ausscheidung wollen wir hier zunächst durchaus auf Grund der geltenden Geometrie ausführen, d. h. wir werden die absolute Continuität des Raumes voraussetzen, um dann von allen möglichen Punktenanordnungen, die in diesem Raume denkbar sind, diejenigen auszuscheiden, die ein lückenloses Discretum bilden können, oder, besser gesagt, wir werden bei jedem Raume von einer bestimmten Dimensionsanzahl diejenigen elementarsten Punktenanordnungen ausscheiden, die auf Grund jener beiden Criterien als solche möglich sind und dann wiederum von diesen diejenigen ausscheiden, die jenen Raum lückenlos (oder vollständig) ausfüllen können.

Fangen wir zunächst mit dem einfachsten Raume, mit dem eindimensionalen Raume oder mit der Geraden an.* Wenn wir uns die Gerade als eine Punktenreihe denken, in der sich je zwei Punkte miteinander berühren, dann wird offenbar die elementarste Gestalt der Geraden die aus bloss zwei Punkten bestehende Gerade sein, wir können diese Elementargestalt der Geraden, um die vollständige Analogie der Grundgebilde des eindimensionalen Raumes mit denjenigen der höherdimensionalen Räume herzustellen, Zweieck nennen. Es fragt sich also, welches Zweieck einzig und allein nach jeden beiden Criterien möglich ist? Es ist sehr leicht einzusehen, dass dies nur dasjenige Zweieck sein wird, dessen zwei Punkte in der Entfernung von der Grösse einer einfachen geometrischen

* Später werden wir beweisen, dass die Gerade, die Ebene, der dreidimensionale Raum etc. also nur die sogenannten euklidischen Raumformen die Räume verschiedener Dimensionen in wahrem Sinne dieses Wortes repräsentieren, dass die sogenannten krummen und gebrochenen Raumgebilde immer in einem Raume von einer höheren Dimensionsanzahl vorhanden sind, als es diejenige ihrer selbst ist, wenn sie als einfache Gebilde betrachtet werden.

Einheit liegen denn nur dann berühren sich diese Punkte unmittelbar und zwischen denselben ist keine ausgedehnte nichtseiende Lücke vorhanden. Ist dem nun so, dann ist es auch leicht weiter einzusehen, dass nur eine aus solchen Zweiecken bestehende Gerade möglich ist und dass nur diese Zweiecke den eindimensionalen Raum lückenlos zusammensetzen resp. ausfüllen.

Wenn wir nun zu dem zweidimensionalen Raume, d. h. der Ebene übergehen, so müssen wir auch hier zuerst die einfachsten Elementarpunktenanordnungen in Betracht ziehen. Die Möglichkeit derselben muss nun aber, da der zweidimensionale Raum den eindimensionalen in sich enthält, in zweierlei Hinsicht betrachtet werden, einerseits müssen die linienhaften Punktenreihen, die die Grenze, und andererseits die eigentlich zweidimensionalen Punktenmengen im Inneren des zweidimensionalen Gebildes in Betracht gezogen werden. In erster Hinsicht nun sind alle jene zweidimensionalen Punktualfiguren auszuscheiden, deren Peripherien aus lückenhaften Discreta erster Dimension bestehen, es sind also nur diejenigen Punktualfiguren zu behalten, die regelmässige Polygone, deren Seiten gleich der einfachen geometrischen Einheit sind, darstellen. In zweiter Hinsicht kann leicht eine Thatsache constatiert werden, auf deren Grund von diesen regelmässigen Polygonen diejenigen als lückenlose Discreta auszuscheiden sind, deren Seitenzahl < 6 ist. Bekanntlich ist der Radius eines um ein regelmässiges Polygon beschriebenen Kreises bei dem Sechsecke gleich der Seite, bei den Polygonen, deren Seitenzahl < 6 ist, kleiner, bei den Polygonen, deren Seitenzahl > 6 ist, grösser als die Seite. Beim Dreieck, Viereck und Fünfeck lässt sich also im Inneren kein realer Punkt denken, denn seine Entfernung von den Peripheriepunkten wäre kleiner als 1 (1 ist die Grösse der Seite), folglich sind diese einfachsten Punktenpolygone nach dem zweiten Criterium möglich, da wenn ein realer Punkt nicht im Mittelpunkte denkbar ist, er bei diesen Polygonen desto weniger ausserhalb des Mittelpunktes möglich ist. Nicht so unmittelbar kann aber der Schluss auf die Unmöglichkeit (denn nur von dieser kann die Rede sein) der Punktenpolygone, deren Seitenzahl grösser als 6 ist, gezogen werden, wir können diesen Schluss erst auf Grund der Thatsache ziehen, welche regelmässigen Polygone lückenlos den zweidimensionalen Raum ausfüllen können.

In dieser zweiten Hinsicht nun, können bekanntlich nur das regelmässige Dreieck, Viereck und Sechseck den Flächenraum lückenlos ausfüllen. Eine Ebene lässt sich aus regelmässigen Vielecken nur dann lückenlos ausfüllen, wenn um jede Ecke eines bestimmten Vielecks

eine ganze Zahl von solchen herumzulegen ist. Sein Eckwinkel N lasst sich sehr leicht aus $\frac{(2n - 4)R}{n}$ berechnen (wo n die Seitenzahl des Polygons bezeichnet) und ergiebt im Falle $n = 3, 4, 5, 6, 7 \ldots$ die Werthe $N = 60^\circ, 90^\circ, 108^\circ, 120^\circ, 128\frac{4}{7}$ etc. Der Bruch $\frac{360^\circ}{N}$ ergiebt nun in den Fällen $N = 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$ eine ganze Zahl, in allen anderen Fällen nicht, was leicht constatiert werden kann. Lässt sich nun so der Ebenenraum nur aus Dreiecken, Vierecken und Sechsecken zusammensetzen, so ist es ebenso klar, dass bei dieser Zusammensetzung nur Dreiecke und Vierecke wiederum regelmässige Polygone (und zwar Sechsecke und Quadrate) ergeben, während dies bei dem Sechsecke (und jedem anderen Polygon) nicht mehr der Fall ist, so dass daraus klar hervorgeht, dass jedes regelmässige Vieleck, dessen Seitenzahl > 6 ist, aus regelmässigen Dreiecken, Vierecken, Fünfecken und Sechsecken (selbstverständlich ist hier nur von den regelmässigen Polygonen die Rede, die gleiche Seitengrösse haben) nicht zusammengesetzt werden kann, in ihrem Inneren lassen sich also nicht Punkte anordnen deren Entfernungen $= 1$ wären, sie sind also unmöglich.

Im zweidimensionalen Raume sind also von den Elementargebilden nur das punktuale Dreieck, Viereck, Fünfeck und Sechseck möglich, von denen wiederum nur das Dreieck, das Viereck und das Sechseck den zweidimensionalen Raum lückenlos ausfüllen können.

Nach Analogie mit dem bei dem zweidimensionalen Raume Ausgeführten haben wir im dreidimensionalen Raume nur die fünf regelmässigen Körper (Tetraeder, Hexaeder, Octaeder, Dodekaeder und Ikosaeder) in Betracht zu ziehen, denn nur bei ihnen sind die Flächen solcherart, dass sie lückenlose Discreta darstellen können, wenn ihre Seiten (resp. die Kanten des Polyeders) $= 1$ sind. Der Radius der um diese Körper beschriebenen Kugel ist nun nur bei dem Dodekaeder grösser als seine Kante, bei allen übrigen kleiner, so dass auf Grund des zweiten Criteriums leicht geschlossen werden kann, dass diese Körper möglich sind. Die Unmöglichkeit des Dodekaeders kann nur dann behauptet werden, wenn wir nachweisen können, dass er in regelmässige Polyeder (deren Kante selbstverständlich $= 1$ ist) nicht zerlegt werden kann, was wir offenbar nur thun können, wenn uns bekannt ist, welche Polyeder den dreidimensionalen Raum lückenlos ausfüllen. Nun zeigt eine Berechnung der dreidimensionalen Eckwinkel der fünf Polyeder (bekanntlich

kann die Grösse des dreidimensionalen Eckwinkels nur aus dem Verhältniss der Fläche des ihm entsprechenden sphärischen Polygons einer um die Ecke des Polygons beschriebenen Kugel zu der Gesammtoberfläche der letzteren berechnet werden), dass von ihnen der dreidimensionale Raum nur von Hexaedern lückenlos zusammengesetzt werden kann, und da aus Hexaedern wieder Hexaeder hergehen, aus anderen regelmässigen Polyedern aber kein Raum zusammensetzbar ist, so ist es klar, dass das Dodekaeder in mögliche regelmäsige Polyeder nicht zerlegbar ist, dass dasselbe also unmöglich ist.

Im vierdimensionalen Raume sind bekanntlich sechs regelmässige Gebilde vorhanden: Pentaedroid (begrenzt von 5 Tetraedern), Hexadekaedroid (begrenzt von 16 Tetraedern) Hexakosiedroid (begrenzt von 600 Tetraedern), Ikosatetraedroid (begrenzt von 24 Oktaedern), Octaedroid (begrenzt von 8 Hexaedern) und Hekatonikosaedroid (begrenzt von 120 Dodekaedern) Von diesen sechs Gebilden ist nun das Hekatonikosaedroid einfach deshalb unmöglich, weil dasselbe von einem unmöglichen dreidimensionalen Gebilde, dem Dodekaeder, begrenzt ist. Von den übrigen fünf Gebilden sind Pentaeder und Hexadekaedroid deshalb möglich weil der Radius der um diese Gebilde beschriebenen vierdimensionalen Kugel < 1 ist, während das Octaedroid wiederum deshalb möglich ist, weil der Radius der um ihn beschriebenen Kugel $= 1$ ist, in seinem Inneren ein realer Punkt also möglich ist, der um die einfache geometrische Einheit von den Eckpunkten entfernt ist (analog dem Sechseck im zweidimensionalen Raume). Aus demselben Grunde ist das Ikosatetraedroid möglich, denn der Radius der um ihn beschriebenen Kugel beträgt ebenso 1. Es bleibt also nur noch Hexakosiedroid zu untersuchen, bei dem der Radius der umschriebenen vierdimensionalen Kugel > 1 ist, und seine Möglichkeit muss analog der des Dodekaeders im dreidimensionalen Raume entschieden werden, wir müssen also untersuchen, welche von den vierdimensionalen regelmässigen Gebilden den vierdimensionalen Raum lückenlos ausfüllen können. Eine Berechnung der vierdimensionalen Eckwinkel nun aus den entsprechenden vierdimensionalen Kugelpolygonen würde zeigen, dass von den sechs regelmässigen Gebilden nur das Octaedroid den Raum lückenlos ausfüllen kann, andere dagegen gar nicht, und da aus Octaedroiden nur wieder Octaedroide entstehen können, ist leicht zu schliessen, dass das Hexakosiedroid nicht möglich ist.

In fünfdimensionalem und jedem Raume überhaupt deren Dimensionszahl > 4 ist, sind nur drei regelmässige Gebilde vor-

handen,* die dem Tetraeder, Octaeder und Hexaeder in dem dreidimensionalen, dem Pentaeder, Hexadekaedroid und dem Octaedroid in dem vierdimensionalen, und dem Dreieck und Quadrat in dem zweidimensionalen Raume entsprechen (die allgemeinen Formeln für ihre Eckenzahl lauten: $n+1$, 2^n und $2n$; für $n = 1$ ist $n+1 = 2^n = 2n$ in eindimensionalem Raume entspricht diesen drei regelmässigen Gebilden nur das Zweieck; für $n = 2$ ist $n+1 = 3$, dagegen $2^n = 2n$ also entsprechen jenen drei Gebilden die zwei, das Dreieck und das Quadrat; erst wenn $n = 3$ sind drei verschiedene Gebilde da und ihnen entsprechen genau die drei Gebilde der höheren Dimensionen). Von diesen drei Gebilden sind nur die zwei, welche dem dreidimensionalen Tetraeder und Octaeder entsprechen, auch im punktuellen Raume möglich, denn bei beiden ist der Radius der um sie beschriebenen n-dimensionalen Kugel stets < 1. Dagegen ist das fünfdimensionale Gebilde, welches dem Hexaeder resp. Octaedroid entspricht, einfach deshalb unmöglich, weil, wie sich zeigen lässt (vgl. den Anhang, Elemente der neuen Geometrie, III Theil), die Entfernung der realen Centralpunkte von je zwei dieses Gebilde begrenzenden vierdimensionalen Hexaeder < 1 wäre, eine solche Berührungsentfernung der realen Punkte im lückenlos discreten Raume aber unmöglich ist. Ist nun das fünfdimensionale $2^{\underline{n}}$ Gebilde unmöglich, dann sind auch alle die $2^{\underline{n}}$ Gebilde irgend einer höheren Dimensionsanzahl unmöglich, denn sie setzen die Möglichkeit desselben als ihres Bestandtheiles voraus.

Wenn wir nun untersuchen, welches von den zwei n-dimensionalen möglichen Gebilden den n-dimensionalen Raum lückenlos ausfüllen kann, so ist in Bezug auf das $n+1$-Gebilde leicht zu schliessen, dass dasselbe den n-dimensionalen Raum nicht ausfüllen kann, da aus ihm wieder nur regelmässige (dem Sechseck entsprechende) n-dimensionale Gebilde entstehen könnten, diese aber in dem n-dimensionalen Raume nicht vorhanden sind. Für das 2n-Gebilde lässt sich in ähnlicher Weise leicht der Schluss machen, dass der-

* Über die n-dimensionalen regelmässigen Gebilde vgl. die Abhandlung von W. J. Stringham, „Regular Figures in n-dimensional Space" (American Journal of Mathematics 1880, vol III, p. 1—14), in der sie zum ersten Male bestimmt worden sind. Dort finden sich auch die Kanten der drei- und vierdimensionalen regelmässigen Gebilde in Bezug auf den Radius der um sie beschriebenen Kugel als Einheit bestimmt. Dass die drei von Stringham für die Bestimmung der regelmässigen n-dimensionalen Gebilde aufgestellten Criterien im allgemeinen auch auf dem Standpunkte der neuen Geometrie gelten, brauche ich wohl nicht besonders zu erwähnen.

jenige n-dimensionale Raum aus ihm nicht wird zusammengesetzt werden können, in dem sich nicht ein regelmässiger Körper befindet dessen Grenzgebilde das 2n-Gebilde des n — 1-dimensionalen Raumes darstellen, während umgekehrt das Vorhandensein eines solchen regelmässigen Gebildes noch nicht die Zusammensetzbarkeit des entsprechenden Raumes aus dem 2n-Gebilde bedeutet. Da nun nur der drei- und der vierdimensionale Raum die entsprechenden regelmässigen Gebilde enthalten (es sind dies das Hexaeder und das Ikositetraedroid) so lässt sich nach dem früher Ausgeführten leicht schliessen, dass der n-dimensionale Raum nur im Falle wenn n = 4 aus entsprechenden 2n-Gebilden zusammengesetzt werden kann.

Aus den bisherigen Ausführungen folgt also als Resultat, dass die elementaren lückenlos-discreten Gebilde in dem eindimensionalen Raume das einfache die kleinste Gerade darstellende Zweieck, in dem zweidimensionalen Raume das Dreieck, Viereck, Fünfeck und Sechseck, im dreidimensionalen Raume das Tetraeder, Hexaeder, Oktaeder und Ikosaeder, im vierdimensionalen Raume das Pentaeder, Octaedroid, Hexadekaedroid und Ikositetraedroid, in dem n-dimensionalen Raume (wenn $n > 4$) das $n+1$- und das 2n-Gebilde sind, und dass von diesen elementaren Gebilden in dem eindimensionalen Raume das Zweieck, in dem zweidimensionalen das Dreieck und das Quadrat (wenn wir das Sechseck auf das Dreieck, woraus dasselbe entsteht, zurückführen), in dem drei- und vierdimensionalen Raume das 2^n Gebilde, in dem vierdimensionalen das 2n-Gebilde und in dem n-dimensionalen (wenn $n > 4$ ist) kein solches mehr den Raum lückenlos zusammensetzt. Daraus sieht man, wie es geometrische Gebilde giebt, die auf Grund der allgemeinen Criterien für die Möglichkeit eines lückenlosen punktuellen Discretums möglich sind und die doch in dem ausgedehnten lückenlos discreten Raume nicht möglich sind. Das n-dimensionsle $n+1$-Gebilde z. B. ist möglich, mag n noch so gross sein, während schon der fünfdimensionale ausgedehnte quadratische Raum unmöglich ist, und es fragt sich nun, ob diesen begrifflichen Möglichkeiten irgend etwas in der Realität entspricht und entsprechen kann.

Auf diese Frage lässt sich eine Antwort geben nur, wenn wir den Weg der bisherigen Geometrie gänzlich verlassen und nunmehr ganz den Weg unserer neuen Geometrie betreten, die den Raum aus lauter Punkten zusammensetzen will. Wir untersuchen jetzt somit nach jenen beiden Criterien die Möglichkeit der punktuellen Raum-

formen direkt, nicht vermittelst der Eliminationsmethode, die wir bisher benutzt haben. Es ist offenbar, dass die einfachste Gerade die wir uns denken können das einfache aus zwei unmittelbar sich berührenden Punkten bestehende Zweieck ist. Es ist nun ebenso klar, dass, wie der einfachste eindimensionale Raumtheil der aus zwei sich unmittelbar berührenden Punkten bestehende Raum ist, dass ebenso der einfachste zweidimensionale Raumtheil aus drei sich unmittelbar berührenden Punkten besteht, dass dem entsprechend der einfachste dreidimensionale Raumtheil aus vier, der einfachste vierdimensionale Raumtheil aus fünf und überhaupt der einfachste n-dimensionale Raumtheil aus $n+1$ sich unmittelbar berührenden Punkten besteht. Wenn wir nun untersuchen, aus welchen von diesen einfachen Raumtheilen sich der entsprechende ausgedehnte Raum zusammensetzen lässt, so werden wir leicht einsehen, dass sich aus Zweiecken der eindimensionale Raum zusammensetzen lässt, während die Notwendigkeit, dass der zweidimensionale Raum lückenlos aus den einfachsten Dreiecken zusammensetzbar ist, nicht so unmittelbar einleuchtet und besonders bewiesen und deduciert werden muss, welchen Beweis ich in dem Anhang (Elemente d. n. Geometrie, I Theil I-ter Abschnitt) ausgeführt habe. Ebenso ist es dort ausgeführt, warum der zweidimensionale Raum aus Quadraten zusammensetzbar ist, indem gezeigt wird, dass der $1\frac{1}{2}$ betragende Eckwinkel des Quadrats (der Eckwinkel des Dreiecks beträgt 1) in dem dreieckigen dreidimensionalen Raume möglich und vorhanden ist. Es ist nämlich offenbar, und das ist der Grundgedanke meiner neuen Geometrie, dass der aus unmittelbar sich berührenden Punkten bestehende n-dimensionale dreieckige Raum den grundlegenden Raum darstellt — dreieckig ist er, weil seine zweidimensionalen Bestandtheile dreieckig sind — und dass nur jene Räume und jene lückenlos-diskreten Punktenanordnungen möglich sind, die sich mittelbar oder unmittelbar durch diesen Raum rechtfertigen lassen. In dem Anhang habe ich nun ausgeführt, dass sich das regelmäsige Fünfeck in dem zweidimensionalen Raume und das Ikosaeder in dem dreidimensionalen — die Unmöglichkeit des letzteren führt sich dabei auf diejenige des ersteren zurück — (selbstverständlich sammt allen anderen schon auf Grund der geltenden Geometrie als unmöglich erkannten Gebilden), geometrisch nicht rechtfertigen lassen, obgleich sie formell möglich sind und deshalb unmögliche geometrische Gebilde darstellen, und dass deshalb auch alle Beweise, ob sich ein Raum aus ihnen lückenlos zusammensetzen lässt oder nicht, völlig bedeutungslos werden. Ebenso ist es in dem Anhang ausgeführt warum

der n-dimensionale Raum (wo $n > 2$ ist) aus dem $n+1$-Gebilde nicht zusammensetzbar ist, und zwar auf Grund desselben Princips auf Grund dessen die Zusammensetzbarkeit des zweidimensionalen Raumes aus dem Dreiecke einzig und allein deduciert werden kann.*

Von den einfachen geometrischen Gebilden, die in dem entsprechenden ausgedehnten punktuellen Raume nicht möglich sind, sind also nur zwei übriggeblieben, das dreieckige $n+1$-Gebilde und das octaedrische 2n-Gebilde, welche immer möglich sind mag n noch so gross sein, während das quadratische 2^n Gebilde nur bis zu dem vierdimensionalen Raume möglich ist. Wir erheben nunmehr die Frage, ob das einfachste n-dimensionale $n+1$-Gebilde, welches die Grundlage alles punktuellen Raumes bildet, da dessen Existenz von der Dimensionsanzahl überhaupt unabhängig ist, irgend eine reale Bedeutung hat, da dasselbe ja begrifflich ganz ebenso möglich ist, wie die übrigen Raumformen.** Haben wir nämlich einmal eine bestimmte Menge von Punkten vor uns, so können wir diese Punkte entweder so räumlich anordnen, dass sie sich alle unmittelbar miteinander berühren, oder wir können sie räumlich so anordnen, dass sie sich nicht alle unmittelbar berühren, in welchem Falle dann dieselben entweder in der Ebene so zu ordnen sind, dass jeder Punkt sich mit sechs Punkten unmittelbar berührt, oder

* In der obigen Deduction der möglichen Punktensysteme auf Grund der geltenden Geometrie haben wir uns einerseits nur auf die regelmässigen und andererseits nur auf die reinen d. h. aus homogenen Bestandtheilen bestehenden Gebilde beschränkt. So lässt sich z. B. auf Grund der geltenden Geometrie behaupten, dass der zweidimensionale Raum nicht nur aus Rhomben, dessen Hälften regelmässige Dreiecke sind, sondern aus allen möglichen Rhomben, unter denen die Quadrate nur einen speciellen Fall darstellen, zusammensetzbar ist; so ist der dreidimensionale Raum nicht nur aus Würfeln, sondern auch aus Prismen mit rhombischer Grundfläche zusammensetzbar; und entsprechendes gilt auch für den vier- und den höherdimensionalen Raum mit einigen Modificationen. Ebenso lässt sich der zweidimensionale Raum nicht nur aus Dreiecken resp. Quadraten allein, sondern auch aus einer besonderen Mischung derselben (in Zwölfecke) zusammensetzen; eine solche gemischte Zusammensetzung existiert aber für keinen Raum mehr. Es hätte uns offenbar zu weit geführt, wenn wir alle diese Zusammensetzungsweisen oben auseinandergesetzt hätten. In dem Anhang habe ich auf Grund der neuen Geometrie gezeigt, welche von ihnen möglich und welche unmöglich sind.

** Dieselbe Frage der möglichen Realität betrifft offenbar auch das n-dimensionale 2n-Gebilde. Da dieses Gebilde aber auch in Bezug auf das $n+1$-Gebilde secundär ist, so entscheidet die Möglichkeit der Realität des $n+1$-Gebildes zugleich auch diejenige des 2n-Gebildes, aber allerdings nur die Möglichkeit derselben.

von ihnen umgeben ist (was in diesem Falle gleichbedeutend ist) oder so dass jeder Punkt von acht Punkten umgeben ist, u. s. w. (vgl. darüber und über den Begriff der umgebenden Punkte den Anhang) Eine Vielheit von Punkten lässt sich offenbar nur in diese Raumformen hineinbringen, und warum sollte die unausgedehnte Raumform des $n+1$-Gebildes nicht ebenso möglich sein, wie diese ausgedehnten Raumformen? Eine begriffliche Möglichkeit, die mit ebensolcher Notwendigkeit aus dem Princip der punktuellen Raumstruktur entspringt wie die übrigen begrifflichen Möglichkeiten des Raumes, muss ganz ebenso eine reelle Möglichkeit darstellen wie diese letzteren. Und wir werden in der That in dem zweiten Unterabschnitt dieses Abschnitts sehen, dass die Weltatome oder die Weltmonaden ursprünglich nur in jener unausgedehnten einfachen n-dimensionalen Raumform existiert haben, dass die ausgedehnte Raumform gerade deshalb, weil sie ihrer inneren Struktur nach mehrdeutig ist, nicht die ursprüngliche Raumform sein kann, was auch von der empirischen Thatsache, dass der gegebene Weltraum dreidimensional ist, bestätigt wird. Die Welt musste sich vor der Veränderung in der unausgedehnten Raumform befunden haben, und erst mit der Veränderung trat auch die Welt in die ausgedehnte Raumform ein, so dass wir, um die beiden Formen voneinander besser unterscheiden zu können, sie auch als *ausgebreitete* und *unausgebreitete* Raumformen bezeichnen können (denn wenn wir die unausgebreitete Raumform als unausgedehnte bezeichnen, so bedienen wir uns eines unbequemen Ausdrucks, der leicht das Missverständniss hervorrufen kann, als ob sich da wirklich um eine Raumform handelte die keine Ausdehnung hätte, was contradictio in adjecto wäre). Der unausgebreitete Raum ist, rein mathematisch betrachtet, der Dimensionsanzahl nach völlig unbestimmt, während der vollkommene ausgebreitete Raum, wie wir beweisen werden, nicht mehr denn sechs Dimensionen haben kann. Wenn aber unsere metaphysische Voraussetzung richtig ist, dass die qualitativ-quantitative Wirklichkeit von der absoluten Substanz seit Ewigkeit produciert ist, dann ist die Zahl der Weltmonaden konstant, und die Dimensionszahl der unausgebreiteten Raumform wird konstant, während diejenige der ausgebreiteten variabel bleibt, so dass daraus klar hervorgeht, dass der ausgebreitete Raum nicht die ursprüngliche Raumform der Welt, wenn die Welt ewig ist, bilden kann. Wenn der Raum continuirlich ist, dann ist derselbe von selbst und als solcher ausgedehnt oder ausgebreitet und die Anzahl seiner Dimensionen muss in Wahrheit eine schlechthin unendliche sein, so dass der empirisch gegebene dreidimensionale Raum nur

einen Ausschnitt aus diesem Raume bilden würde; wenn der Raum dagegen discret ist, dann muss streng seine unausgebreitete von seiner ausgebreiteten Form unterschieden werden, und dann ist es klar dass, wenn die Welt der Vielheit und Mannigfaltigkeit ewig ist, dann nur der unausgebreitete Raum seine Raumform sein kann, da der ausgebreitete Raum bei einer konstanten Zahl von Punkten seiner Dimensionsanzahl nach vieldeutig ist, während dies bei dem unausgebreiteten nicht der Fall ist. Dies wird auch, aber allerdings nur durch einen glücklichen Zufall, empirisch bestätigt. Der empirisch gegebene Raum hat drei Dimensionen, und da er ganz wohl auch sechs Dimensionen haben könnte, so ist daraus der Schluss zu ziehen, dass seine Existenz ganz zufällig ist. Nun allerdings wenn sie wirklich eine solche ist dann ist sie dies nur auf Grund der Überzeugung von der logischen Möglichkeit auch des vier-, fünf- sechsdimensionalen Raumes, hat man aber einmal diese Ueberzeugung, dann braucht man jene empirische Thatsache nicht mehr, denn man wird gewahr dass sie nur durch einen glücklichen Zufall da ist.

Wir wollen nun näher in die innere Struktur des Raumes eingehen, um so die vielen Fragen, die sich auf die Grundlagen der Geometrie selbst beziehen, und die in erster Reihe die Definitionen der Grundbegriffe derselben betreffen, wie es die Gerade, die Ebene die Dimension etc. sind, vom Standpunkte unserer Geometrie aus entscheiden zu können. Wir gehen dabei von der ersten aus der grundlegenden Raumform unserer Geometrie unmittelbar folgenden Raumform, dem zweidimensionalen dreieckigen Raume, aus. In der Figur 6 (Taf. I) ist ein solches zweidimensionales dreieckiges Punktennetz gegeben und ein einziger Blick auf denselben führt uns zur Constatierung der bedeutsamen Thatsache, dass es in demselben neben den eindimensionalen Geraden, deren Punkte sich unmittelbar berühren, d. h. bei denen die Berührungsentfernung $= 1$ ist, es auch Geraden giebt, deren Punkte sich in einer Berührungsentfernung berühren die > 1 ist, und zwar dass es deren eine grosse Menge von verschiedener Art giebt. Es könnte nun jemand leicht auf den Gedanken kommen, dass solche Geraden auf Grund des ersten jener beiden Criterien für das lückenlose Discretum unmöglich seien, denn eine Gerade, deren Punkte sich in einer Entfernung berühren, die grösser als 1 ist, sind ja unmöglich. Gewiss ist dem so, wenn die Gerade für sich und nicht als Glied des zweidimensionalen Raumes betrachtet wird, denn nur die aus unmittelbar sich berührenden Punkten bestehende Gerade kann den eindimensionalen Raum ausmachen. Das dreieckige zwei-

dimensionale Punktensystem, in dem sich je drei Punkte unmittelbar miteinander berühren, ist geometrisch als lückenloses Discretum ganz ebenso auf Grund jener beiden Criterien möglich, auf Grund deren der eindimensionale Raum, als Gerade deren Punkte sich unmittelbar berühren, als lückenloses Discretum möglich ist, und wenn somit in dem zweidimensionalen Punktendiscretum Gerade erscheinen, die nach diesen Criterien unmöglich zu sein scheinen, so ist eben zu erwägen, ob sie dies wirklich sind oder nicht. Nun eine nähere Ueberlegung zeigt, dass die Berührung der Punkte in diesen Geraden nicht auf dieselbe Art und Weise geschieht, wie die Berührung in denjenigen Geraden, deren Punkte sich in der Entfernung 1 berühren. Um dies zu erläutern wollen wir nur die vier Punkte ABCD jenes Punktennetzes (vgl. Figur 7 Taf. I) betrachten, von denen die Punkte ABC einerseits und die Punkte BCD andererseits ein Dreieck bilden. Wenn sich der Punkt A mit dem Punkte B resp. der Punkt B mit dem Punkte C so berührt, dass zwischen beiden eine leere nichtseiende Entfernung vorhanden ist, deren Grösse 1 ist (es braucht nicht besonders erwähnt zu werden, dass die Punkte ABCD als reale Punkte zu betrachten sind, da ja der geometrische Raum nicht ein von dem realen verschiedener Raum ist), dann besteht offenbar zwischen dem Punkte A und D keine solche leere nichtseiende Lücke, denn eine solche Lücke besteht ja nur zwischen dem Punkte D einerseits und den Punkten B und C andererseits. Die leere unausgedehnte nichtseiende Lücke zwischen den Punkten A und B, A und C, B und C, B und D, C und D macht offenbar eine leere nichtseiende Lücke zwischen den Punkten A und D völlig überflüssig, denn durch jene leeren nichtseienden Lücken ist das zweidimensionale Punktennetz ABCD vollständig bestimmt und gesetzt. Aber nicht nur dass diese Lücke dabei überflüssig ist, sondern sie ist sogar unmöglich, denn sie würde sich ja mit der Lücke zwischen den Punkten B und C kreuzen, wir hätten dann statt der leeren Lücken BC und AD nur eine einzige leere Lücke, die sich sowohl in der Richtung BC als in der Richtung AD ausdehnte, was doch offenbar absurd ist, da das Nichtseiende keine Ausdehnung hat, geschweige denn eine in verschiedenen Richtungen und Formen erfolgende. Es ist also sicher, dass das Berührungsverhältniss zwischen den Punkten A,D nicht dasselbe ist wie zwischen den Punkten B, C, dass dieses wohl eine unausgedehnte nichtseiende Lücke darstellt, jenes aber durchaus keinen nichtseienden Inhalt hat. Dass sich die Punkte A und D wirklich berühren, daran kann kein Zweifel bestehen, denn wir müssen überall da ein Berührungs-

verhältniss annehmen, wo zwischen zwei Punkten kein Punkt mehr dazwischenliegt, was unzweifelhaft mit den Punkten A und D der Fall ist. Nur ist diese Berührung eben nicht von derselben Art wie es diejenige zwischen den Punkten B und C ist, denn während diese eine nichtseiende Lücke darstellt, stellt jene keine solche dar.

Damit ist die Schwierigkeit, wieso es Geraden in dem zweidimensionalen Raume geben kann, deren Punkte sich nicht unmittelbar berühren, insofern behoben, inwiefern wir nachgewiesen haben, dass diese Berührung nicht von derselben Art mit jener ist, aber wir haben noch nicht diese ihre Verschiedenheit in unzweideutiger Weise angegeben. Denn wir müssen genau den Unterschied zwischen der eine nichtseiende Lücke darstellenden unmittelbaren Berührung und der keine solche Lücke darstellenden Berührung angeben. Dieser Unterschied ist nun zunächst dahin zu bestimmen, dass die zweite Berührungsart offenbar nicht möglich wäre, wenn die erste Berührungsart nicht vorhanden wäre, dass durch diese allein die ursprüngliche Setzung des Raumes vollzogen wird und dass jene nur als ein Nebenerfolg dabei erscheint, so dass die erste einzig und allein als *primär*, die zweite aber durchaus als *secundär* zu bezeichnen ist. Deshalb aber ist nun weiter die primäre Berührung allein als *unmittelbare* zu bezeichnen während die secundäre Berührung als *mittelbare* zu bezeichnen ist, da sie erst durch jene erfolgt. Und dann schliesslich — und das ist ihr wichtigster Unterschied — ist die unmittelbare Berührung als die *reelle* während die mittelbare als die *imaginäre* zu bezeichnen ist. Die Entfernung zweier Punkte die sich unmittelbar berühren stellt eine leere nichtseiende Lücke dar, während die Entfernung zweier sich mittelbar berührenden Punkten keine solche Lücke darstellt. Sollen wir nun diesem Unterschied einen vernünftigen Sinn verleihen, so kann dieser nur darin liegen, *dass der unmittelbaren leeren nichtseienden Lücke ein realer Negationsact entspricht, während der mittelbaren Lücke kein solcher Negationsact entspricht* Im Raume und für den Raum (da die realen Negationsacte nicht im Raume liegen) sind beide Lücken in gleicher Weise reine Verhältnisse, denn die eine stellt ebenso eine räumliche Entfernung dar wie die andere, für die Wirklichkeit, wenn sie ganz und voll betrachtet wird, ist die leere unausgedehnte nichtseiende Lücke als reale *Beziehung* von der völlig leeren Lücke der mittelbaren Berührung als dem *reinen Verhältniss* wohl zu unterscheiden und in diesem Sinne hat es dann einen ganz realen Sinn, wenn wir die unmittelbare Berührung als die reale während wir die mittelbare Berührung als

die imaginäre bezeichnen, denn sie hat für die Realität als solche nur die Bedeutung eines reinen Verhältnisses. Aber auch für den Raum als solchen kann dieser Unterschied dahin angegeben werden, dass die unmittelbare Berührung deshalb real ist, weil ihre Grösse der Grösse des realen Punktes (d. h. 1) gleich ist, während die mittelbare Berührung eine Grösse hat, die mit dieser im Allgemeinen völlig unvergleichbar ist, denn wir werden in dem Anhang beweisen, dass die imaginären Berührungen in den allermeisten Fällen — untereinander und mit der realen Berührung incommensurabel sind. Die enorme Wichtigkeit dieser letzteren Thatsache für unsere Geometrie werden wir gleich unten sehen.

Wir kommen nun zu dem mit der Thatsache der imaginären Geraden und mit den Grundlagen unserer Geometrie überhaupt in so einem engen Verhältniss stehenden Beweise, dass der reale Negationsact nicht in dem Raume selbst, den er als reale Beziehung setzt, vorhanden ist. Betrachten wir zunächst, um diesen wichtigen Nachweis zu führen, die zwei unmittelbar sich berührenden Punkte A und B (die man leicht auf dem Papier machen kann). Wenn diese zwei realen Punkte wirklich aussereinander sind, so muss es zwischen ihnen eine leere nichtseiende unausgedehnte Lücke geben, deren Entfernung mathematisch genau = 1 ist, da eine Entfernung 0 nicht mehr das Aussereinandersein und Getrenntsein sondern das absolute Zusammenfallen derselben bedeuten würde. Wenn nun das Nichtseiende unmöglich ist und als solches keine trennende Kraft hat (wie kann das Nichtbestehende trennen?) so müssen wir etwas reales voraussetzen, was jene beiden Punkte voneinander trennt, und das ist der reale Negationsact. Wenn wir nun voraussetzen, dass sich dieser reale Negationsact selbst räumlich zwischen den beiden Punkten A und B befindet, dann müsste er, da er ja räumlich genommen einen absolut einfachen untheilbaren Punkt darstellt (denn die Negationsbeziehung ist, wie wir in dem dritten Kapitel des ersten Abschnittes gesehen haben, einfach), von jedem dieser Punkte getrennt sein, er müsste selbst also von jedem derselben durch eine leere unausgedehnte Lücke getrennt sein, da ebenso wie, rein geometrisch betrachtet, die Entfernung zwischen den Punkten A und B = 1 ist, ebenso die Entfernungen zwischen den Punkten A und C (wenn C den mittleren Negationspunkt bezeichnet) einerseits und C und B andererseits solche einfachen geometrischen Einheiten darstellen müssen, sie müssten also ganz so wie jene erste leere nichtseiende Lücken darstellen, und wir müssten diese Lücken durch die Voraus-

setzung neuer Negationsacte auszufüllen suchen u. s. w. in infinitum. Daraus folgt also offenbar, dass der reale Negationsact nicht in dem Raume AB vorhanden sein kann, dass er ausserhalb desselben liegt, denn nur in diesem Falle ist er in Wahrheit fähig jene leere nichtseiende Lücke zwischen den Punkten A und B auszufüllen. Freilich klingt es ein bishen paradox wenn man hört, dass der reale Negationsact, indem er die leere nichtseiende Lücke zwischen den Punkten A und B ausfüllt, nicht in räumlichem Sinne zwischen diesen Punkten liegen darf. aber das Paradoxe hört auf sobald man sich dessen erinnert, dass, wie ich schon einmal früher erwähnt habe, die Wirklichkeit reicher als unser erstes anfänglich so oberflächliches Denken ist. Auch ist das Vorurtheil als ob es nichts Reales geben könnte, was überhaupt ausserhalb des Raumes läge, nur solange aufrechtzuerhalten, solange man noch immer an jener alten Ansicht von der Natur des Raumes festhalte, derselbe wäre die allgemeine Bedingung des Ortsgegebenseins aller Dinge; sobald man sich aber daran erinnert, dass der Ort und der Raum von den Dingen gesetzt werden, so lassen sich ganz wohl verschiedene ganz auseinander liegende Räume denken (die nicht Theile eines und desselben Raumes sind) und es lassen sich auch einzelne Punkte denken, die überhaupt Bestandtheile keines Raumes sind. Solche Punkte sind nun in Wahrheit die realen Negationsacte, denn wenn wir annehmen, dass (um ein in mancher Hinsicht noch überzeugenderes Beispiel anzuführen) z. B. die drei Negationsacte O, M, P die zwischen den Punkten A B C (vgl. die Figur 8 Taf. 1) liegen, ebenso ein räumliches Dreieck OPM bilden wie die Punkte ABC, so müsste man offenbar voraussetzen, dass zwischen den Negationspunkten OP (resp. PM und OM) wiederum reale Negationsacte liegen, da ihre Entfernung im geometrischen Sinne offenbar $=$ 1 ist, man müsste dann weiter zwischen den so postulierten Negationsacten neue postulieren u. s. f. in infinitum, was nur beweist, dass die Negationspunkte O, P, M keinen Raum bilden können, dass jeder für sich gleichsam einen besonderen Raum darstellt. Die Ausflucht etwa, dass als die die Negationspunkte OPM trennenden Acte die realen Punkte ABC dienen könnten, ist illusorisch, da die realen Berührungspunkte mit den realen Beziehungen nicht die Rollen vertauschen können.*

* Diese Trennung wäre aber auch rein geometrisch unmöglich. Denn wenn die drei Negationspunkte P, O und M einen Raum für sich bilden, der ganz ausserhalb des Raumes ABC liegt, dann kann nur das Dreieck POM als die Projection dieses Raumes in dem Raume ABC betrachtet werden (von einer Projection des einen Raumes in dem anderen kann offenbar in dem Sinne die Rede sein, dass man die Punkte

Wer nun an unsere obige geometrische Argumentation für die Unmöglichkeit, dass sich der reale Negationsact räumlich genommen zwischen den realen Punkten befindet, nicht glaubt, der mag nur das Dreieck POM betrachten, der im Falle dass sich die Negationsacte zwischen den realen Punkten befinden entstehen müsste, um einzusehen, dass sich dann die Negationsacte in der dreieckigen Ebene in einer geometrischen Entfernung, die kleiner als 1 ist, berühren müssten, was offenbar unmöglich ist.**

Wenn also die Existenz des realen ausserräumlichen Negationsactes angenommen wird, dann verschwindet die Schwierigkeit der imaginären Berührungsentfernungen in dem lückenlosen Discretum vollständig. Die imaginären Berührungsentfernungen sind reine Verhältnisse, die reale Berührungsentfernung ist wohl für den Raum und in dem Raume nur ein Verhältniss, sie ist dies aber nur dadurch, dass sie in der Gesammtrealität eine durch eine Realität ausgefüllte Beziehung darstellt. Da der reale Negationsact und die zwei durch ihn getrennten Raumpunkte nicht in einem und demselben Raume gesetzt sind, so kann nicht mehr davon die Rede sein, dass die Entfernung zwischen dem Negationsacte einerseits und jedem der Raumpunkte anderseits eine einfache geometrische Einheit darstellt, die nun ihrerseits mit einem neuen Negationsacte auszufüllen wäre, denn von geometrischer Entfernung kann nur da die Rede sein, wo die voneinander entfernten resp. getrennten Punkte in einem und demselben resp. in einem Raume überhaupt liegen, wo das nicht der Fall ist, ist keine Entfernung vorhanden, so dass wir mit Recht für die realen Raumpunkte einerseits und für

des einen in dem anderen gesetzt denkt); die geometrische Entfernung zwischen P und M resp. P, O und O, M ist dann aber < 1, das Dreieck POM also auch der Raum POM ist unmöglich.

** Sind so die realen Negationsacte räumlich ganz voneinander isoliert, so scheint das Haupthinderniss für ihre Wahrnehmbarkeit entfernt zu sein (vgl. S. 185), so dass die Negationspunkte notwendigerweise wahrgenommen werden müssten und doch werden sie nicht wahrgenommen (wenn die Negationspunkte einen Raum für sich bildeten, dann würde man dieselben wohl nicht isoliert aber man würde sie als ein scheinbares räumliches Continuum wahrnehmen, neben dem scheinbaren räumlichen Continuum der realen Empfindungspunkte). Diese Thatsache, dass sie nicht wahrgenommen werden, beweist nicht ihre Nichtexistenz, ganz ebenso wie die Nichtwahrnehmbarkeit der absoluten Substanz — die ja räumlich ganz ebenso wie die Negationsacte völlig isoliert ist — ihre Nichtexistenz nicht beweist. Aus ihrer Unwahrnehmbarkeit ist vielmehr nur zu schliessen, dass die realen Negationsacte ganz ebenso ausserhalb der empirischen Wahrnehmungswelt liegen, wie die absolute Substanz ausserhalb dieser Welt liegt, den eigentlichen Grund davon werden wir aber erst in dem zweiten Unterabschnitte dieses Abschnittes geben.

den realen Negationsact andererseits behaupten können, dass sie *absolut unmittelbar voneinander getrennt* und *miteinander verbunden* sind (vgl. S. 68). Wollte man nun, um nur die Notwendigkeit des realen Negationsactes um jeden Preis zu vermeiden, für die zwei unmittelbar sich berührenden realen Raumpunkte etwa voraussetzen, dass ihre unmittelbare Berührung mit dieser absolut unmittelbaren Berührung des realen Negationsactes mit den beiden realen Raumpunkten identisch ist, so würde man damit den so klaren Begriff der geometrischen Entfernung vollständig unklar machen. Denn die zwei sich unmittelbar berührenden realen Raumpunkte müssen sich in der einfachen geometrischen Entfernung von der Grösse 1 berühren: wäre diese Entfernung Null (man kann die Entfernung des realen Negationsactes von dem realen Raumpunkte nicht als 0 bezeichnen, da man da von einer Entfernung also auch von einer Aufhebung einer solchen nicht reden kann), dann hätten wir keinen extensiven Raum mehr, denn aus lauter Nullen lässt sich wirklich keine Extension machen. Wollte man aber die Extension in die realen Raumpunkte selbst als solche (und nicht in die leeren Zwischenpunkte) verlegen, so verbietet -- ganz abgesehen davon dass man damit das Wesen des discreten Raumes selbst aufhebt, welches gerade in diesem Unterschied der extendierenden und der extendierten Raumpunkte liegt — die Thatsache der imaginären Geraden diese Verlegung vollständig. Denn in diesem Falle bleiben die imaginären Geraden völlig unerklärt: die imaginäre Berührungsentfernung ist unzweifelhaft grösser als die reale und wenn die reale der Null gleich ist, dann muss auch jede imaginäre Entfernung mit der Null gleich sein, da ja beide in gleichem Sinne als Berührungen Berührungen (d. h. leer) sind, die imaginären Geraden dürften also in diesem Falle neben den reellen in dem discreten Raume nicht bestehen, was eben nicht der Fall ist. Und zuletzt wollen wir noch die letzte Voraussetzung erwähnen, die gemacht werden kann, um die Notwendigkeit des realen Negationsactes zu vermeiden, man kann nämlich einfach voraussetzen dass ein realer Unterschied zwischen der unmittelbaren Berührungsentfernung und jenen mittelbaren imaginären überhaupt nicht besteht, dass alle Berührungsentfernungen reine Verhältnisse sind. Setzt man dies aber voraus, dann können wir uns offenbar die den Raum constituirenden Raumpunkte in beliebigen Entfernungen voneinander denken, den Raum also aus allen möglichen Punktenanordnungen zusammensetzen, wodurch der Begriff des discreten lückenlosen Raumes völlig willkürlich wird. Man wird vielleicht sagen, dass er doch nicht ganz willkürlich wird, da ja die Berührungsentfernung

zweier Punkte doch auch dann nicht $<$ 1 sein kann, alle jene Punktenanordnungen also ausgeschlossen zu sein scheinen, bei denen diese Entfernungen vorkommen. Leider aber ist dem nicht so. Denn in diesem Falle wird der Begriff der einfachen geometrischen Entfernung selbst ein ganz willkürlicher, da man jede noch so kleine Entfernung für eine solche ansehen kann. Aus regelmässigen Fünfecken kann ich z. B. den Raum solange nicht lückenlos zusammensetzen, solange ich genau weiss, dass nur das regelmässige punktuale Fünfeck, dessen Seite $=$ 1 ist, dabei in Betracht gezogen werden könne. Wenn diese Einheit aber völlig unbestimmt ist, da jede mögliche Entfernung — wenn nämlich jede Entfernung ein reines Verhältniss ist und es nirgends eine leere nichtseiende Lücke giebt (deren Grösse $=$ 1 ist) — für eine solche betrachtet werden kann, dann hindert nichts vorauszusetzen, dass die dritte Seite des unregelmässigen Dreiecks, welches die übrigbleibende Lücke bei jener Ausfüllung des Raumes mit Fünfecken ausfüllt, die einfache geometrische Einheit darstellt. Man sieht deutlich, wohin die discrete Geometrie durch das Aufgeben des wesentlichen Unterschiedes der realen und der imaginären Berührung geführt wird: zu ihrer eigenen Selbstaufhebung und Vernichtung.

Die wesentliche Schwierigkeit, die hierin in der discreten Geometrie liegt, habe ich durchaus nicht verschweigen wollen. Man glaube nicht, dass ich das deshalb gethan habe, weil ich die Voraussetzung des realen Negationsactes, die für meine Metaphysik von so einer fundamentalen Bedeutung ist, durchaus retten wollte, und deshalb diese Schwierigkeit so sehr betone, da allerdings meiner Ansicht nach nur durch diese Voraussetzung die Grundschwierigkeit der discreten Geometrie behoben werden kann. So scheint also die discrete Geometrie von einer metaphysischen Grundvoraussetzung, von der Metaphysik also abhängig zu sein. In Wahrheit aber hängt, wie wir bald sehen werden, und zwar in einem viel grösseren Grade auch die continuirliche Geometrie von der Metaphysik ab, und andererseits ist das Verhältniss der discreten Geometrie zu der Metaphysik ebensosehr auch ein umgekehrtes d. h. es hängt in Wahrheit nicht nur die discrete Geometrie von der Metaphysik ab, sondern es hängt auch die Metaphysik von der discreten Geometrie ab. Könnten wir in widerspruchsloser Weise geometrisch feststellen, dass die unmittelbare Berührung ein reines Verhältniss darstellt, so wäre damit eine wesentliche Stütze der metaphysischen Grundvoraussetzung des realen Negationsactes aufgehoben und diese Grundvoraussetzung wäre dann nicht mehr so absolut

notwendig. Ich glaube aber dem gegenüber allerdings, die Unmöglichkeit der unmittelbaren Berührung als reines Verhältnisses streng mathematisch bewiesen zu haben und gehe jetzt zur weiteren Ausgestaltung der discreten Geometrie über.

Die enorme Bedeutung der imaginären Geraden in dem discreten Raume offenbart sich noch in einer für die Geltungsfrage der discreten Geometrie principiellen Art und Weise. Wie ich schon einmal bemerkt habe stellen die allermeisten imaginären Geraden in Bezug auf die realen Geraden irrationale Grössen dar. Obgleich nun der Gegensatz von imaginär und reell mit dem Gegensatz von irrational und rational nicht zusammenfällt, kann man doch leicht zeigen, dass nur imaginäre Geraden irrational sein können, während die reellen Geraden ursprünglich einzig und allein als rationale Geraden zu betrachten sind, so, dass die irrationalen Geraden nur in dem discreten Raume möglich sind und dass sie hier demnach streng von den rationalen Linien unterschieden sind. Die realen Geraden stellen offenbar in dem discreten Raume einzig und allein die rationalen Geraden dar, weil sie ja notwendigerweise die primären Gebilde sind, aus denen der discrete Raum selbst besteht. Zwar sind die realen Geraden irrational, wenn man irgend welche irrationale Gerade als primäres Vergleichsobject der Grösse nimmt; aber einerseits sind in diesem Falle die realen Geraden in ihren einfachsten Elementen < 1, während umgekehrt wenn die reale Gerade als Vergleichsobject gilt die imaginären Geraden stets > 1 sind, so dass also die reellen Geraden in ihren einfachsten Elementen die kleinste geometrische Grösse darstellen und damit ganz natürlich als Maassstab aller anderen zu dienen haben, und andererseits sind alle realen Geraden von einer und derselben Art, während es der imaginären Geraden eine ganze Menge von verschiedener Art giebt, jene also sowohl quantitativ wie qualitativ die einfachsten Gebilde sind, worin sich nur ihre primäre Natur den anderen gegenüber dokumentiert. Während also in dem discreten Raume die irrationalen Geraden als imaginäre Geraden von den rationalen Geraden streng unterschieden sind (irrationale Geraden sind stets imaginär, reelle Geraden rational) und die einen nicht willkürlich für die anderen genommen werden können, ist dem bei dem absolut continuirlichen Raume offenbar nicht der Fall, da es in demselben keine letzten einfachen primären Elementargeraden giebt.

Was so aber an dem eindeutigen Unterschiede der rationalen und der irrationalen Geraden in dem continuirlichen Raume verloren

geht, das scheint reichlich ersetzt zu sein durch die Realität, die die irrationalen Geraden in diesem Raume erlangen, und die sie in dem discreten Raume nach unseren Ausführungen nicht haben. Betrachten wir z. B. die imaginäre Gerade AD (Figur 8, Taf. I), so ist ihre Grösse offenbar (über die Berechnung der Grösse der imaginären Geraden vgl. Elem. d. n. Geom. I. Th. III Ab.) gleich $\sqrt{3}$, also irrational. Die irrationale Zahl $\sqrt{3}$ liegt zwischen den rationalen Zahlen 1 und 2 (resp. $\sqrt{1}$ und $\sqrt{4}$) und der Punkt D würde also auf der Geraden ABE zwischen den Punkten B (= 1) und E (= 2) liegen. Da aber die kleinsten geraden Strecken AB und BE arithmetisch und geometrisch absolut untheilbare Einheiten darstellen, so kann der Punkt D reell nicht zwischen diesen Punkten vorhanden sein (die Strecke BE müsste, wie wir gesehen haben, = 2 sein, damit der Punkt D dazwischenkomme). So steht es mit der Sache aber solange, solange wir die punktuelle discrete Natur des Raumes festhalten; sobald wir dagegen voraussetzen, dass der Raum absolut continuirlich ist, ist die Strecke BE in's absolut unbestimmte Unendliche theilbar, ihre Grosse hört auf = 1 zu sein, da es in dem absoluten Continuum keine einfachen untheilbaren Einheiten giebt, und der irrationale Punkt D kann ganz gut zwischen den Punkten B und E zu stehen kommen.* Aber nicht nur dass der

*) Dedekind erblickt in dieser Thatsache, dass die irrationalen Geraden nur im Continuirlichen reell bestehen, das Wesen der Stetigkeit, indem er behauptet, dass die die rationalen Strecken auf einer Geraden darstellenden Punkte nicht alle Punkte der Geraden sind, dass es zwischen ihnen Lücken giebt, und dass diese Lücken durch die die irrationalen Strecken darstellenden Punkte ausgefüllt werden und damit die gerade Strecke stetig gemacht wird (vgl. seine Schrift „Stetigkeit und irrationale Zahlen" 2-te Aufl. 1892 § 3). Ähnlich definiert Cantor die Stetigkeit als eine „perfecte zusammenhängende Menge" (Math. Annal. Bd. XXI, § 10). Es ist nun richtig, dass erst die Gesammtheit der rationalen und der irrationalen Punkte einer Geraden diese stetig macht, aber sowohl Cantor wie Dedekind verstehen dabei unter Stetigkeit etwas, was wohl leicht mit der Stetigkeit verwechselt werden kann, was aber selbst nicht die Stetigkeit ist. Nach ihnen besteht nämlich der Raum aus einfachen Raumpunkten (dasselbe lehrt auch Bolzano, Paradoxien des Unendlichen, § 38) ist also discret und seine Stetigkeit ist somit nichts anderes als die Lückenlosigkeit des Discretums (Cantor a. a. O. verwirft ausdrücklich den Begriff des wahren Continuums, in dem er mehr ein „religiöses Dogma" denn einen mathematisch-logischen Begriff erblickt). Dass aber das lückenlose Discretum notwendigerweise, mag dasselbe ein unendliches oder ein endliches sein, entweder die dreieckige oder die quadratische Struktur haben müsse und dass bei einer solchen Struktur von einer Stetigkeit der Geraden im Sinne von Cantor und Dedekind keine Rede sein könne, folgt aus unseren Ausführungen unzweifelhaft, und nur weil sich diese Denker die Frage der inneren geometrischen Struktur des lückenlosen Discretums nicht vorgelegt haben, konnten sie einen solchen fundamentalen Irrthum begehen. Die wahre Ursache aber, die ihnen diese Sachlage

Punkt D zwischen die Punkte B und E zu stehen kommt, sondern die Strecke AD selbst als solche wird dabei ganz ebenso reell wie die Strecke BE, d. h. es hört aller und jeder Unterschied in ihrer inneren geometrischen Struktur auf, denn in diesem Falle ist der Punkt D von dem Punkte A nicht durch die Punkte B und C so getrennt, dass er sich mit ihm nicht unmittelbar berühren kann, da ja die Punkte A, B und C keine Sonderstellung dem Punkte D gegenüber in dem continuirlichen Raume einnehmen, wie das bei dem discreten Raume der Fall ist, wo sie das einfachste discrete zweidimensionale Raumelement bilden. In dem absolut continuirlichen Raume hören die einzelnen Punkte auf, sich von den anderen Punkten durch besondere Lagen und Stellungen zu unterscheiden, was schliesslich davon herrührt dass sie überhaupt aufhören sich voneinander zu unterscheiden — und jede drei Punkte können in ihm ein gleichseitiges Dreieck bilden (ich kann dann z. B. auch aus den Punkten D,M,N, von denen der Punkt M auf der Strecke AD liegt, das gleichseitige Dreieck MDN bilden) was offenbar in dem diskreten Raume nicht der Fall sein kann. Jede Gerade ist also in dem absolut con-

verdunkelt hat, liegt darin, dass sie die endlichen aus Punkten bestehenden Strecken nicht auf eine endliche Anzahl von solchen zurückgeführt haben. Cantor hat zwar die Unmöglichkeit des unendlich Kleinen in einem Discretum eingesehen, nach ihm giebt es aber doch keine kleinste endliche Strecke (das Archimedische Axiom vgl. „Zeitschrf. für Phil.“ Bd. 91, S. 112) so dass jede auch noch so kleine endliche Strecke aus einer unendlichen Punktenmenge besteht, und sich dann das lückenlose Discretum einer endlichen geraden Strecke in seiner Punktenanordnung im Wesentlichen gar nicht von der wahren stetigen Strecke unterscheidet, da der einzige Unterschied zwischen beiden darin besteht, dass die Anzahl der Punkte in dieser eine schlechthin unbestimmt unendliche, in jener aber eine bestimmt unendliche ist (und zwar ist sie nach Cantor von der zweiten Mächtigkeit, indem die Gesammtheit der rationalen Punkte die erste und die Gesammtheit der rationalen und der irrationalen Punkte die zweite Mächtigkeit beträgt). Solch' ein unendliches lückenloses Discretum ist, wie wir früher bewiesen haben, durchaus unmöglich, da sich dasselbe notwendigerweise in das wahre Continuum verwandeln müsste. Das unendliche lückenlose Discretum stellt eine unhaltbare Mittelstellung zwischen dem endlichen Discretum unserer Geometrie, in dem eine endliche Strecke aus einer endlichen Anzahl von Punkten besteht und in dem es somit eine kleinste endliche Strecke giebt (die Elementargerade — das Zweieck) und dem absoluten räumlichen Continuum, in dem jede endliche Strecke aus einer schlechthin unbestimmt unendlichen Anzahl von Punkten besteht und in dem es schlechthin keine kleinste Strecke giebt weder von endlicher noch von unendlich kleiner Grösse. Nimmt man nun aber noch in Betracht, dass die innere geometrische Struktur des Discretums durchaus verbietet, dass irrationale Punkte in einer solchen discreten Strecke existieren können, und mag die Anzahl ihrer Punkte auch eine unendliche sein, dann sieht man ein, dass ein solches räumliches Discretum nicht nur unmöglich sondern auch zwecklos und überflüssig ist.

tinuirlichen Raume reell, da sich jede als aus unmittelbar sich berührenden Punkten bestehend denken lässt, es dann also keinen Unterschied zwischen den reellen und den imaginären Linien giebt.

Diese Thatsache nun, dass die imaginären Linien in dem absolut continuirlichen Raume ganz ebenso reell werden wie die reellen, könnte als eine wichtige Gegeninstanz gegen unsere discrete Geometrie angeführt werden, die die Existenz der imaginären Geraden notwendigerweise zulassen muss und sie dann nur durch gewisse „gewagte“ metaphysische Voraussetzungen zu rechtfertigen vermag. So stehen aber die Dinge in Wahrheit nicht. Die continuirliche Geometrie rettet zwar die Realität der irrationalen Geraden als *Geraden* (da alle irrationalen Geraden imaginär sind), sie verliert aber die irrationalen Geraden als *irrationale* Geraden vollständig, denn in dem absoluten Continuum hören die irrationalen Geraden auf irrational zu sein, sie werden rational, mit der Aufhebung des *geometrischen* Unterschieds der rationalen und der irrationalen Geraden hebt man auch ihren *arithmetischen* Unterschied auf. Das lässt sich leicht beweisen. Die irrationale und die rationale Gerade haben, das ist wahr, keinen gemeinschaftlichen Theiler solange man sich in dem Gebiete des Endlichen befindet, sie haben ebenso kein gemeinsames Maass solange man sich in dem Gebiete des bestimmt Unendlichen befindet, sie haben aber ein gemeinsames Maass und werden somit commensurabel in dem absolut unbestimmten Unendlichen, indem das absolut kleinste unendlich Kleine, die absolute Null, der letzte Theil sowohl der einen wie der anderen Linie ist.*. In dem absoluten Continuum fallen also die rationalen und die irrationalen Grössen resp. Strecken ganz ebenso absolut zusammen, wie in demselben Kreis und Gerade absolut zusammenfallen, und wie hier die Gerade zum Kreise wird ebenso wird die irrationale Strecke rational, der specifische Unterschied zwischen der rationalen und der irrationalen Linien geht also verloren, mit der Realität gewinnen die irrationalen Geraden in dem Continuum also auch die Rationalität. Wenn der Raum dagegen discret ist, besteht kein gemeinsamer Theiler der rationalen und der irrationalen Grösse mehr, die irrationalen Geraden können nur imaginär sein, und so

* Arithmetisch findet diese Commensurabilität der irrationalen und der rationalen Geraden in dem absoluten Continuum darin ihren Ausdruck, dass jede Zahl, also sowohl die rationale wie die irrationale, als eine convergente unendliche Reihe von Gliedern sich darstellen lässt, die ihren Grenzwerth erst in dem absoluten Unendlichen erreichen könne (vgl. die Anmerkung weiter unten über die Infinitesimalmethode).

ist die Geometrie des Discreten wirklich im Stande, von dieser wichtigen Raumthatsache der incommensurablen Geraden Rechenschaft zu geben, während die Geometrie des Continuirlichen in dieser Beziehung völlig rathlos ist.

Es besteht aber eine scheinbar ebenso unzweifelhafte Raumthatsache, von der wieder die discrete Geometrie keine Rechenschaft zu geben vermag, von der aber die continuirliche einzig und allein eine Erklärung abzugeben im Stande ist, und dies ist die Thatsache der krummen Linien (resp. der krummen geometrischen Gebilde überhaupt). Ich stimme nun vollkommen bei der Behauptung, dass die krummen Linien nur durch die continuirliche Geometrie erklärt werden können, ich stimme aber nicht der Behauptung bei, dass ihre Existenz ganz ebenso unzweifelhaft ist wie diejenige der irrationalen Geraden. Die irrationalen Geraden sind eine von der Constitution des Raumes *völlig unabhängige* geometrische Thatsache, während dagegen die krummen Linien einzig und allein in dem continuirlichen Raume denkbar sind, nur dann also als solche gegeben sind *wenn* der Raum continuirlich ist.

Diese letztere Behauptung will ich nun auch beweisen, und gehe dabei wiederum von der grundlegenden dreieckigen discreten Ebene aus. Nach der allgemein angenommenen Definition ist eine Linie krumm, wenn sie in jedem ihrer Punkte die Richtung ändert d. h. wenn ihre Punkte nirgends in einer und derselben Richtung liegen, wenn sie nirgends Gerade, und seien diese noch so klein, enthalten. Setze ich dabei voraus, dass die Linie wirklich aus den Punkten besteht, so werde ich in Wahrheit immer nur eine gebrochene Linie vor mir haben, denn eine gebrochene Linie ist ja auch die aus den kleinsten Geraden bestehende Linie, und die vorausgesetzte krumme Linie wird in diesem Falle in Wahrheit mit der aus den kleinsten Geraden bestehenden gebrochenen Linie identisch sein. Sobald ich aber die Voraussetzung der Discretheit fallen lasse, und nirgends Punkte zulasse die sich unmittelbar berühren (vgl. die Anmerkung zur Seite 275) mag dies in einem noch so weiten unendlich Kleinen sein, dann werde ich sehr leicht eine Punktenreihe mir denken, in der es nirgends zwei Punkte giebt, die in einer und derselben Richtung d. h. in einer und derselben Geraden liegen, die also wirklich jener Definition der krummen Linie vollkommen entspricht, was offenbar nur in dem absoluten Continuum der Fall sein wird, denn nur in dem absoluten Continuum giebt es keine „im Unendlichen benachbarte“ Punkte. In dem absoluten Continuum kann ich mir wohl auch gebrochene Linien denken, deren ein-

fachste Gerade unendlich klein sein werden, aber diese gebrochenen Linien sind doch geometrisch strenge von den krummen Linien zu unterscheiden, da es in der unendlich kleinen Geraden immer Punkte (und sogar unendlich viele Punkte) giebt, die in einer und derselben Richtung liegen, während es solcher Punkte in einer wahren Curve nicht geben darf. Ebenso sind in dem absoluten räumlichen Continuum streng die geschlossenen Curven, die Kreise z. B., von den Polygonen zu unterscheiden, deren Seiten unendlich kleine Gerade darstellen: in einem solchen Continuum sind sowohl die einen wie die anderen denkbar, und man kann klar und deutlich ihren Unterschied angeben. Ein Kreis stellt z. B. die absolute Grenze der regelmässigen (ein- und umgeschriebenen) Polygone dar, er wird aber mit dem Polygon erst dann absolut identisch, wenn die Seitenzahl des letzteren absolut unbestimmt unendlich wird, denn erst in diesem Falle wird seine Seite zur absoluten Null, d. h. es besitzt keine in einer und derselben Richtung liegenden Punkte mehr. In dem absoluten Continuum lassen sich also neben den krummen Linien auch alle anderen geradlinigen Gebilde denken, Polygone von x-beliebiger Kleinheit ihrer Seiten, etc. während sich in dem lückenlosen Discretum, wie wir sehen werden (vgl. den Anhang), nur eine äusserst kleine Zahl regelmässiger und eine beschränkte aber allerdings weit grössere Zahl unregelmässiger Polygone denken lässt, deren Seitengrösse aber eine kleinste untere Grenze hat, die nicht überschritten werden kann. Das absolute Continuum ist auch seiner Dimensionenzahl nach schlechthin unendlich, während das Discretum, wenn es ausgedehnt ist, die Dimensionszahl 4 nicht überschreiten kann. Man sieht, das Continuum ist in jeder Beziehung geometrisch viel reichhaltiger als das Discretum und doch ist dieser sein Reichthum am Ende, wie wir bald sehen werden, rein illusorisch.

Es ist also unzweifelhaft dass die krummen Linien nur in dem absoluten Continuum vorhanden sein können, während sie in dem Discretum vollständig und absolut fehlen. Wenn dem aber so ist, dann bedeutet das nicht mehr und nicht weniger, als dass die krummen Linien keine allgemeine geometrische Thatsache darstellen, die von der Constitution des Raumes unabhängig wäre, wie es mit der Thatsache der irrationalen Linien der Fall ist. Denn dass die Hypotenuse in dem rechtwinkeligen Dreieck, dessen eine Kathete zweimal grösser als die andere ist, irrational in Bezug auf diese ist, ist eine geometrische Thatsache, die als solche abgesehen davon gilt, ob der Raum discret oder continuirlich ist, denn das besagte

rechtwinkelige Dreieck ist sowohl in dem einen wie in dem anderen Raume gegeben, stellt also eine allgemeine geometrische Thatsache dar. Nun aber leider kann man von der Irrationalität der Hypotenuse des rechtwinkeligen Dreiecks keine Erklärung geben, wenn der Raum continuirlich ist, denn in dem continuirlichen Raume hören die irrationalen Linien auf sich von den rationalen zu unterscheiden, sie werden rational. Eine Geometrie aber, die von einer so fundamentalen geometrischen Thatsache keine Rechenschaft zu geben vermag, muss entschieden in ihrem Fundamente falsch sein, und so erblicken wir in der Thatsache der irrationalen Linien ein der wichtigsten Argumente für unsere discrete Geometrie, die einzig und allein dieselben als solche zu rechtfertigen vermag. Dagegen kann aus der Unfähigkeit der discreten Geometrie, die Thatsache der krummen Linien zu erklären, nicht die Ungiltigkeit derselben gefolgert werden, denn das würde nur in dem Falle zutreffen, wenn die krummen Linien ganz ebenso eine allgemeine von der speciellen Beschaffenheit des Raumes völlig unabhängige Thatsache wären, wie das mit den irrationalen Linien der Fall ist. Sie sind aber als solche nur in dem continuirlichen Raume gegeben, während sie in dem discreten vollkommen *fehlen*, sie stellen also nicht eine geometrische Thatsache dar, die völlig unabhängig davon wäre, ob der Raum discret oder continuirlich ist, sie sind vielmehr geometrisch nur in dem räumlichen Continuum möglich. Die irrationalen Linien vernichten also die Möglichkeit des continuirlichen Raumes vollständig, während die krummen Linien seine Möglichkeit gar nicht gewährleisten, aus der Möglichkeit der krummen Linien in dem absoluten Continuum kann also die Möglichkeit eines solchen räumlichen Continuums gar nicht gefolgert werden, während durch die Thatsache der irrationalen Linien die Möglichkeit desselben vollkommen ausgeschlossen ist.*

Bis jetzt haben wir in unseren Discussionen vorausgesetzt, dass in dem absolut continuirlichen Raume geometrische Figuren überhaupt möglich sind. Das ist nun, tiefer besehen, durchaus nicht

* Die allgemeine Voraussetzung von der wir ausgingen, als wir das Zusammenfallen der rationalen und der irrationalen Geraden, das Zusammenfallen des Kreises mit der Geraden, das Sichschneiden der Parallelen etc. im absoluten Continuum behaupteten, war die, dass der Grenzwerth einer variablen Grösse erst in demselben erreicht wird. Und diese Voraussetzung ist es, die das Erklärungsprincip der so erklärungsbedürftigen Infinitesimalmethode bildet. Der Grenzwerth einer variablen Grösse kann, wenn unendliche Theilung derselben vorausgesetzt wird, nicht erreicht werden solange diese Grösse endlich ist, er kann auch nicht erreicht werden, wenn sie bestimmt-unendlich ist, er wird nur dann erreicht, wenn sie schlechthin unbestimmt-

der Fall. Früher haben wir nachgewiesen, dass man das absolute Continuum von dem lückenlosen Discretum streng unterscheiden muss und jetzt fügen wir hinzu, dass nur die Verwechselung dieser beiden so grundverschiedenen Begriffe daran Schuld ist, dass man von geometrischen Figuren im absoluten Continuum spricht. Die geltende Geometrie hat zwar den klaren und richtigen Begriff vom räumlichen Continuum, dessen Definition am Eingang der Unter-

unendlich d. h. stetig ist. Ich will dies zunächst an einem ganz einfachen Beispiele erläutern. Die unendliche Reihe:

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + - - - - - - - -$ = 1 hat den Grenzwerth 1, d. h. die Summe dieser Reihe ist im Unendlichen = 1. Solange diese Reihe nun endlich ist, wird der Grenzwerth 1 nicht erreichbar sein, es wird immer noch ein Bruchtheil da sein, der hinzugefügt werden muss, damit die Summe = 1 wird. Dasselbe wird nun offenbar auch in dem bestimmt Unendlichen der Fall sein, nur dass der Bruchtheil hier eine unendlich kleine Grösse einer gewissen Ordnung darstellen wird; erst in dem unbestimmt Unendlichen wird dieser Bruchtheil absolute Null werden, d. h. der Grundwerth 1 wird dann vollständig und absolut erreicht sein. In dem unbestimmt Unendlichen wird dieser Grundwerth nicht etwa nur annäherungsweise erreicht, er wird vielmehr wirklich und absolut erreicht werden (vgl. auch die Anmerkung zur S. 237), da dann das unendlich Kleine letzter Ordnung wirklich Null geworden ist und nicht etwa, wie das Unendlich-kleine einer bestimmten (erster, zweiter etc.) Ordnung, nur im Verhältniss zu dem Endlichen als Null zu betrachten ist. Dieser einfachste Fall zeigt nun, wie wir uns auch in allen anderen Fällen die Erreichung des Grenzwerthes verschiedener Variablen zu denken haben und wie die Ermittelung dieser Grenzwerthe durch die Infinitesimalmethode zu rechtfertigen ist.

Nehmen wir z. B. den Grenzwerth der Funktion x^n. Aus der Formel $\frac{(x+h)^n - x^n}{h}$ foglt bekanntlich $\frac{n}{1} x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} h + - - - \frac{n}{1} x h^{n-1} + h^n$. Nach der gewöhnlichen Erklärung erreicht der Quotient $\frac{\triangle x^n}{\triangle x}$ den Grenzwerth $n x^{n-1}$ dadurch dass alle Glieder mit h fortfallen und Null werden, indem jede unendlich kleine Grösse einer bestimmten Ordnung im Verhältniss zu den endlichen Grössen Null werden soll. In Wahrheit aber verhält sich die Sache so, dass jedes h-Glied (h, h^2, h^3 etc) alle unendlich kleinen Grössen verschiedener Ordnungen passiert und erst in dem absolut umbestimmten Unendlichen zu Null wird, wobei dann der Quotient $\frac{\triangle x^n}{\triangle x}$ wirklich den Grenzwerth $n x^{n-1}$ erreicht. Dass diese Erklärung richtig ist, zeigt auch die Thatsache, dass die sogenannte Quadratur der Curven nur auf Grund der Infinitesimalmethode ausführbar ist, was wohl auch nicht anders sein kann, da die Curven nur im absoluten Continuum möglich sind, wo sie die Grenzwerthe der geradlinigen Figuren mit unendlich kleinen Seiten darstellen (und nicht mit diesen identisch sind). Wie diese Erklärung auch auf alle anderen schwierigeren und verwickelteren Fälle (z. B. auf die Gewinnung des totalen Differentialquotienten aus den partiellen etc.) angewandt werden kann, wäre nicht schwer zu zeigen, würde uns hier aber zu weit führen.

suchung durchaus tadellos ist. Sobald man aber in die Einzeluntersuchungen eingeht, vergisst man ganz, was eigentlich das Continuum bedeutet und behandelt dasselbe ganz als ein lückenloses Discretum, indem man diesem letztern alle Eigenschaften des Continuums beilegt, ausgenommen die Eigenschaft der strengen Continuität selbst (vgl. die Anmerkung zur S. 275). Die Verwechselung der beiden Begriffe rührt letzten Endes von dem Missverständniss des Ausdrucks „Theilung in Gedanken" her. Die Geometer werden, sobald die allgemeine Natur des Raumes in Frage kommt, bereitwilligst anerkennen, dass derselbe in Wahrheit absolut untheilbar und ungetheilt ist, dass von einer wirklichen reellen Theilung des Raumes in Theile keine Rede sein kann, sie behaupten aber trotzalledem, dass man denselben ganz wohl in „Gedanken" theilen kann, ohne sich die Frage vorzulegen, was denn eigentlich dieses Theilen in Gedanken bedeuten möge. Unzweifelhaft ist es einerseits, dass der Raum in Gedanken getheilt werden kann, und ebenso unzweifelhaft ist es andererseits, dass derselbe in Wirklichkeit absolut nicht getheilt werden kann.* Wie ist dies beides zu vereinigen? Wir haben ja in der Erkenntnisslehre (und in der Einleitung) gesehen, dass alles was in Gedanken möglich ist, auch in der Wirklichkeit möglich sein müsse, dass die Denknotwendigkeit zugleich Seinsnotwendigkeit ist. Die Antinomie löst sich sehr leicht auf, wenn wir bedenken, dass dem Raume nur dann die Continuität beigelegt werden kann (oder, besser gesagt, man versuchen kann ihm dieselbe beizulegen), wenn derselbe ein leeres neben den realen Seinsinhalten bestehendes Wesen ist. Diesen leeren Raum kann ich mir dann sehr gut als in Gedanken theilbar denken, indem ich durch die in ihm gedachten realen Seinsinhalte einzelne Theile von ihm von den anderen gleichsam isolieren kann. Freilich kann eine solche Isolation in wahrem Sinne dieses Wortes nicht stattfinden, der leere Raum als solcher bleibt nach wie vor völlig stetig und ungetheilt, aber als leerer ist er im Stande, die realen Seinsinhalte in sich aufzunehmen, er giebt diesen realen Inhalten ihre Ortsbestimmtheit, so dass die einzelnen Theile des leeren Raumes von den realen Inhalten gleichsam bedeckt und so von den anderen getrennt sind,

* In dem letzten Kapitel des ersten Abschnitts haben wir bemerkt (s 104.) dass die absolute Substanz extensives Continuum deshalb nicht sein könne, weil in diesem Falle bei der Ablösung eines Teils des Continuums eine leere nichtseiende Lücke in ihm verbliebe die doch unmöglich ist. Jetzt fügen wir noch hinzu, dass selbst wenn der abgelöste Theil im Raume als solchem verbliebe, dieser doch dabei aufhören würde, ein Continuum zu sein, er würde vielmehr an dem betreffenden Theile ein lückenloses Discretum werden.

und dies und nichts anderes bedeutet jene Theilung in Gedanken. Soll also diese Theilung in Gedanken in Bezug auf den absolut continuirlichen Raum nicht ein leeres Wort sein, so kann das nur bedeuten, dass neben dem leeren continuirlichen Raume die discrete reale Materie existiert, deren einzelne Theile die Abgrenzung einzelner Partien jenes ersten von den anderen „in Gedanken“ ermöglicht.

Und auf dieser Grundvoraussetzung des leeren Raumes und der realen discreten Materie beruht und kann einzig und allein die gesammte geltende Geometrie beruhen, so sehr sie manchmal auch bestrebt sein möge, möglichst abstrakt zu erscheinen und sich nur mit dem leeren Raume zu beschäftigen. Und thatsächlich nur unter dieser Voraussetzung kann die moderne Geometrie auf Geltung Anspruch erheben. Denn die discrete Materie für sich könnte nicht das lückenhafte Discretum darstellen, in dem nach unseren früheren Ausführungen alle möglichen geometrischen Formen denkbar sind, wenn der leere Raum die Rolle der leeren nichtsetenden Lücken in diesem Discretum nicht übernähme, und andererseits könnte in dem absolut leeren continuirlichen Raume keine Rede von einer Abgrenzung einzelner geometrischen Figuren sein, wenn die realen materiellen Theilchen nicht da wären, die durch verschiedene Lagen im Raume verschiedene geometrische Gebilde in *Bezug aufeinander* in ihm bilden. Ich sage, in Bezug aufeinander, weil, wenn man sich die Sache nur von der rechten Seite ansehen will, dasjenige was dabei eigentlich die geometrischen Figuren bildet, dasjenige worin diese Gebilde eigentlich bestehen, nur die discreten einfachen Theilchen der realen Materie sind. Diese Sachlage wird verdunkelt indem man sich die realen letzten Theilchen der Materie zwar als physisch ungetheilt aber nicht als mathematisch untheilbar betrachtet und so wird an Stelle des so als mathematisch theilbar gedachten Theilchens der reine unausgedehnte mathematische Punkt gesetzt, der die geometrischen Figuren aus dem absoluten Continuum gleichsam hinaushebt. In Wahrheit aber muss die reale Materie aus letzten mathematisch untheilbaren Theilen, d. h. den realen Punkten, die ihrer Grösse nach durchaus diesem leeren mathematischen Punkte entsprechen, bestehen, wenn die geltende Geometrie alle jene geometrichen Figuren haben will, die sich sonst nur in rein fiktiver Weise im absoluten Continuum denken lassen. Denn sind die letzten materiellen Theilchen nicht mathematisch untheilbar, dann können sie mathematisch nur endliche potentiell bis in's Unendliche theilbare Grössen darstellen (und zwar sind

sie endlich in jeder Dimension in der sie sich ausdehnen), so dass dann in einer endlichen continuirlichen Strecke nur eine endliche Menge von solchen denkbar ist, während in dem ersten Falle eine unendliche Menge von solchen denkbar ist. Stellen die materiellen Theilchen einfache mathematische Punkte dar, dann können aus ihnen alle möglichen krummen und ebenen geometrischen Gebilde entstehen, während wenn sie nicht von solcher Natur sind, dann nur die ebenen Gebilde möglich sind und zwar nur diejenigen deren Seiten nicht unendlich klein sind. Dass im ersten Falle eine schlechthin unbestimmt unendliche Menge von einfachen materiellen Theilchen vorausgesetzt werden müsse (und doch wie widerspruchsvoll diese Voraussetzung ist!), wenn dabei wirklich die krummen (und die ebenen Gebilde mit unendlich kleinen Seiten) entstehen sollen,* während im zweiten Falle die bestimmt unendliche Menge der materiellen Theilchen durchaus genügt, braucht wohl nicht besonders erwähnt zu werden, sobald man sich die continuirliche Natur des Raumes in Erinnerung ruft. Aus allem diesen folgt, dass das leere räumliche Continuum nur die allgemeine Bedingung der Möglichheit geometrischer Figuren bildet (und zwar nicht aller, da es viele giebt die in dem reinen Discretum als solchem auch möglich sind), ihrer allgemeinen Existenz und ihrer speciellen Essenz nach sind sie dagegen durchaus durch das materielle Discretum bestimmt. Ein regelmässiges Siebeneck z. B. besteht als solches weder in dem leeren räumlichen Continuum als solchem, noch in dem Discretum der realen Materie, wenn diese für sich allein gedacht wird (denn in diesem Falle wird dieselbe zum lückenlosen Discretum und in einem solchen ist das regelmässige Siebeneck nicht vorhanden), sondern dasselbe besteht nur in dem materiellen Discretum, wenn dieses lückenhaft ist, was wiederum nur dann der Fall ist, wenn das materielle Discretum in dem leeren räumlichen Continuum gegeben ist. Die geometrischen Figuren als solche (in dem allgemeinen Sinne dieses Wortes) gehören also durchaus dem lüchenhaften Discretum an, während sie dem Continuum als solchem gar nicht angehören und angehören können, nur deshalb weil das lückenhafte Discretum einzig und allein in dem leeren ausgedehnten Continuum gedacht werden kann, entsteht der

* Macht man diese Voraussetzung nicht, nimmt man an dass die Menge der discreten Punkte im dem leeren Raume eine bestimmt unendliche ist, dann können diese Gebilde nur durch Bewegung der materiellen Theilchen entstehen, in welchem Falle sie dann doch als solche in rein fiktiver Weise gegeben sind, was nicht etwa bedeutet, dass sie durch Bewegung nicht wirklich beschrieben, was nur bedeutet, dass sie nie als fertige gegeben sind.

Anschein, als ob die geometrischen Figuren einzig und allein in dem räumlichen Continuum bestehen könnten, während sie gerade hier weder bestehen noch bestehen können.

Aus dem eben Ausgeführten folgt unzweifelhaft, dass die geltende Geometrie durchaus auf einer metaphysischen Grundvoraussetzung beruht, auf der Voraussetzung der Dualität des leeren Raumes und der discreten Materie, und wenn diese metaphysische Grundvoraussetzung unrichtig ist, dann stürzt damit auch die gesammte geltende Geometrie zusammen. Ich glaube nun durch die bisherigen Untersuchungen diese metaphysische Voraussetzung vollkommen widerlegt zu haben, indem ich erstens die Unmöglichkeit des leeren Raumes, zweitens die Unmöglichkeit des räumlichen Continuums und drittens die Unmöglichkeit des unendlichen Discretums bewiesen habe. Dieser letzte Punkt ist freilich für das Grundprincip der geltenden Geometrie, das lückenhafte Discretum nämlich (denn das ist in Wahrheit der Kernpunkt *der Geometrie* als solcher, als der Lehre von *den geometrischen Gebilden*) nicht von entscheidender Bedeutung, denn selbst wenn die Zahl der materiellen Theilchen endlich ist — die Welt also der Materie nach endlich, dem Raume nach unendlich ist — sind in dem begrenzten Gebiete derselben alle diejenigen geometrischen Gebilde möglich, die in dem absoluten Continuum denkbar sind. Die entscheidende Frage der neuen discreten und der alten continuirlichen Geometrie führt sich also von der metaphysischen Seite aus darauf, ob der leere continuirliche Raum möglich ist oder ob der Raum und der reale Seinsinhalt miteinander zusammenfallen, von der rein mathematischen Seite aus aber darauf, ob das lückenhafte oder das lückenlose Discretum als das Grundprincip der Geometrie zu gelten habe. Ist die metaphysische Voraussetzung des leeren continuirlichen Raumes richtig, dann ist das lückenhafte Discretum das Grundprincip der Geometrie, und die geltende Geometrie besteht zu Recht, ist die metaphysische Voraussetzung des realen discreten Raumes richtig, dann ist das lückenlose Discretum das Grundprincip der Geometrie, und die geltende dualistische Geometrie muss ihren Platz der neuen monistischen einräumen.

Erst nachdem uns so die metaphysische Grundvoraussetzung der geltenden Geometrie klar geworden ist, sind wir im Stande, eine andere Frage zur Entscheidung zu bringen, die in dem Lager der geltenden Geometrie selbst ausgebrochen ist, und die die Geister des vorigen Jahrhunderts so mächtig bewegt hat. Es ist dies das Problem der sogenannten nicht-euklidischen Geometrie. Unter der

nicht-euklidischen Geometrie ist einerseits die Erweiterung des sogenannten ebenen nicht-euklidischen Raumes seiner Dimensionszahl nach (die Voraussetzung der n-dimensionalen Räume) und andererseits die Voraussetzung der nicht-ebenen Raumformen zu verstehen, aber im engeren und eigentlichen Sinne versteht man und kann man unter der nicht-euklidischen Geometrie, wenn das innere Princip dieser letzteren und nicht eine blosse historische Zufälligkeit (die Beschränkung der Geometrie auf den dreidimensionalen Raum) in Betracht gezogen wird, nur diese letztere verstehen. Diese Erweiterung der euklidischen Geometrie bezieht sich bekanntlich auf das fünfte Postulat oder das elfte Axiom der Elementen Euklid's, auf das sogenannte Parallelenaxiom, indem festgestellt wird, dass es Räume solcher Art giebt in denen dieses euklidische Axiom nicht mehr gilt. Dass sich von einem Punkte aus ausserhalb einer Geraden nur eine einzige Parallele in Bezug auf diese Gerade ziehen lässt, dieser Satz bildet bei Euklid ein unbewiesenes Postulat, auf das er viele wichtigen Sätze seiner Geometrie gründet, unter denen der damit in unmittelbarer Beziehung stehende Satz von der zwei Rechte betragenden Winkelsumme im Dreiecke am wichtigsten ist. Die nicht-euklidische Geometrie stellt nun fest, dass dieser Satz nicht ein allgemeingültiger ist, dass sich Raumformen denken lassen, in denen sich durch einen Punkt ausserhalb einer Geraden mehrere oder in denen sich keine Parallelen in Bezug auf diese Gerade ziehen lassen, resp. in denen die Winkelsumme im Dreiecke kleiner und grösser als zwei Rechte beträgt. Dies sind in erster Reihe die sogenannten Flächen positiver und negativer Krümmung, die Sphäre (Riemann) und die Pseudosphäre (Lobatschewsky). Auf der Späre lässt sich durch einen Punkt ausserhalb der Geraden (selbstverständlich ist die Gerade auf diesen krummen Flächen nicht identisch mit der Geraden in eigentlichem und wahrem Sinne dieses Wortes, die Geraden auf diesen krummen Flächen sind selbst krumm, und gerade nennt man sie nur deshalb weil sie die kürzesten Linien zwischen zwei Punkten darstellen) keine Parallele zu derselben ziehen, auf der Pseudosphäre dagegen lassen sich durch einen Punkt ausserhalb der Geraden zwei Parallele ziehen, neben denen noch unendlich viele Geraden existieren, die sich mit der ersten Geraden ganz ebenso nicht schneiden wie die beiden Parallelen. Wie die Krümmung eines Kreises ganz verschieden ist je nach der Grösse des Radius (der Kreis stellt den Riemann'schen Raum von einer Dimension dar) ebenso ist die Krümmung der Kugel und der Pseudosphäre verschieden nach der Grösse der entsprechenden Radien

(jede von ihnen hat zwei die Krümmung bestimmenden Radien, nur sind sie bei der Pseudosphäre von entgegengesetzter Richtung). Wird ein die Linie resp. die Fläche bestimmender Krümmungsradius unendlich gross, so wird die Krümmung der Linie resp. der Fläche unendlich klein resp. Null und man hat dann die Gerade und die Ebene im euklidischen Sinne, die somit einen Grenzfall zwischen jenen beiden gekrümmten Räumen darstellen (sie stellen den Uebergang der positiven in die negative Krümmung dar). Ausser diesen Flächen, deren Krümmung konstant ist, existieren noch Flächen deren Krümmung an allen Stellen nicht mehr konstant ist und Flächen, deren Krümmung wohl konstant ist, die aber die sogenannten abwickelbaren Flächen darstellen (Clifford-Klein), so stellt z. B. die Cylinderfläche eine auf die gewöhnliche Ebene abwickelbare Fläche dar, die aber selbst nicht die typische euklidische Ebene darstellt und analog dem entsprechen auch den Sphären und Pseudosphären abwickelbare Flächen. Das Eigenthümliche der abwickelbaren Flächen besteht darin, dass sie dieselbe Geometrie mit den entsprechenden typischen Flächen haben. Fügt man noch hinzu, dass der Riemann'sche und Lobatschewsky'sche Raum ganz ebenso ihrer Dimensionsanzahl nach unbestimmt sind wie der euklidische, so ist damit in der Hauptsache das Gebäude der absoluten Geometrie erschöpft.*

Seitdem die nicht-euklidische Geometrie ausgebildet worden ist, ist unter den Mathematikern ein heftiger Streit darüber ausgebrochen, ob dieser Geometrie eine reale Bedeutung beizulegen ist oder nicht, d. h. ob der reale Raum als euklidischer oder als nicht-euklidischer zu betrachten ist, und der Streit ist noch immer nicht zu Ende gebracht. Die Gegner der nicht-euklidischen Geometrie behaupten, erstens dass diese Geometrie von der Erfahrung widerlegt wird, weil uns die Erfahrung noch keine Krümmung des Raumes nach der positiven oder negativen Richtung hin gezeigt hat und zweitens, was von dem rein geometrischen Standpunkte aus viel wichtiger ist, dass der reale Raum als solcher nur euklidisch sein könne, dass die sogenannten nicht-euklidischen Räume diesen Namen nicht verdienen, weil sie nur als specielle Konstruktionen und Gebilde in dem allgemeinen euklidischen Raume möglich sind. Dieser zweite Einwand gegen die nicht-euklidische Geometrie ist nun von dem rein geometrischen Standpunkte aus durchaus berechtigt und trifft den Kern der Sache. Der leere Raum als solcher kann in

* Unter den zahlreichen Werken, die in das Gebiet der absoluten Geometrie einführen, sind zu erwähnen: Frischauf, Absolute Geometrie, 1872 und W. Killing, Einführung in die Grundlagen der Geometrie, II Bde, 1896—8.

seinem Kerne d. h. in seinem Inneren nur ein euklidischer sein, nur seine Grenze ist und muss nicht-euklidisch sein, da sich jeder Raum einer bestimmten Dimension in dem absoluten Unendlichen in den entsprechenden Rieman'schen und, wie wir jetzt hinzufügen müssen, auch in den Lobatschewsky'schen Raum verwandeln müsse, so dass der euklidische Raum thatsächlich an seiner Grenze d. h. in dem unendlich Grossen sich in jene beiden Räume verwandeln müsse (wie wir sehen, entsteht da noch ein Widerspruch: der euklidische Raum wird im Unendlichen einerseits zum geschlossenen Raume Riemann's und andererseits zu dem nicht-geschlossenen Raume Lobatschewsky's, man kann aber, um diesen Widerspruch möglichst zu verdecken, behaupten, dass sich der euklidische und der Lobatschewsky'sche Raum im Unendlichen in den Riemann'schen verwandeln, also beide geschlossen werden, man würde aber nur vergessen, dass der Lobatschewsky'sche Raum zuvor dabei gar nicht da ist, wie es mit dem Euklidischen der Fall ist). Abgesehen von der Grenze aber ist der leere mathematische Raum nur als euklidischer zu denken, und zwar einfach deshalb weil die beiden übrigen Raumformen kein Continuum bilden können. Versuchen wir z. B. den leeren absolut continuirlichen Raum in der Form der Riemann'schen Kugelfläche uns zu denken, so stossen wir dabei auf die Schwierigkeit, dass, wenn wir uns denselben zunächst in der Form einer Theilfläche denken, dann der Innenraum (selbstverständlich nach der convexen Seite hin) desselben notwendigerweise einen ausgefüllten leeren Raum darstellen muss, da sich die krumme zweidimensionale Fläche ohne den dreidimensionalen Raum nicht denken lässt. Liesse sich die krumme Theilfläche ohne den ausgefüllten leeren Raum denken, dann liesse sich offenbar auch die ganze krumme Kugelfläche denken ohne dass das Innere dieser Kugel mit dem leeren continuirlichen Raum erfüllt wäre, was jedoch offenbar unmöglich ist, weil dann das Innere der Kugel mit dem absoluten Nichts erfüllt wäre, und das Nichts keine Ausdehnung hat und haben kann. Der leere das Innere einer Kugel erfüllende Raum ist aber offenbar der dreidimensionale euklidische Raum ohne Krümmung; würde man auch ihm eine Krümmung zuschreiben, dann müsste er die Kugelfläche des vierdimensionalen euklidischen Raumes sein u. s. w. in infinitum, so dass sich der Riemann'sche Raum, möge er eine noch so grosse Zahl von Dimensionen haben, ohne den euklidischen Raum nicht denken lässt. Und dasselbe gilt auch für den Lobatschewsky'schen Raum. Die Pseudosphäre stellt zwar nicht einen geschlossenen Raum wie die Sphäre dar, sie muss aber

schon aus demselben Grunde den euklidischen Raum voraussetzen, aus dem sich die Theilfläche einer Kugelfläche ohne diesen Raum nicht denken lässt. Die (ganze) Pseudosphäre ist aber noch dazu in einem gewissen Sinne ein geschlossenes geometrisches Gebilde und setzt als solche unzweifelhaft den euklidischen Raum voraus: die Pseudosphäre ist analog dem Cylinder eine geschlossen-offene Figur (sie ist eine sogenannte Rotationsfläche) und wie wir uns den Cylinder nicht denken können ohne den leeren Raum der das Innere des Cylinders erfüllt, so können wir uns auch die Pseudosphäre nicht ohne den leeren Raum denken, der das Innere derselben erfüllt, der erfüllende leere Raum ist aber in beiden Fällen notwendigerweise euklidisch.*

So also ist von rein geometrischem Standpunkte aus die euklidische Geometrie ursprünglicher als die nicht-euklidische, weil sich jeder nicht-euklidische Raum nur als Grenze des euklidischen denken lässt. Damit ist aber leider die Streitfrage zwischen den beiden nicht beigelegt. Denn der leere Raum als solcher bildet, wie wir gesehen haben, nicht die einzige Voraussetzung der geltenden Geometrie, vielmehr setzt diese ebensosehr die reale in jenem leeren Raum zerstreute Materie voraus, und wenn auch diese in Betracht gezogen wird, dann werden die Ansprüche der nicht-euklidischen Geometrie vor der euklidischen viel ernster und nachdrücklicher. Es handelt sich dabei nicht mehr um die Frage, welche Beschaffenheit der leere Raum als solcher hat, denn mag seine Beschaffenheit rein euklidisch sein, die Anordnung der Materie als solche kann dabei ganz gut eine nicht-euklidische sein, da sich in dem leeren euklidischen Raume jede mögliche ebene und krumme Anordnung der materiellen Theilchen denken lässt. So wahrscheinlich es nun auch sein mag, dass die Gesetze, die das Zusammensein und Zusammenwirken der materiellen Theilchen bestimmen, möglichst einfach und im ganzen Universum gleichartig sind, in welchem Falle die Anordnung der Materie in dem unendlichen leeren Raume nirgends von der Form dieses Raumes abweichen würde, so ist noch andererseits zu erwägen, dass uns in diesem Falle doch auch gestattet wäre, und zwar sowohl auf Grund des reinen Empirismus wie auch streng rationalistisch, die Notwendigkeit jener Einfachkeit

*. Ähnliche Einwände gegen die Möglichkeit der nicht-euklidischen Raumformen als selbstständiger Räume macht Lotze, nur dass sie bei ihm mehr logisch-begrifflicher Natur sind (vgl. dessen Metaphysik, bes. § 136—7). Lotze's Einwände gegen die Möglichkeit der mehrdimensionalen Räume und sein Beweisversuch für die Dreidimensionalität des Raumes sind gänzlich misslungen.

und Gleichartigkeit der Naturgesetze zu bezweifeln, man könnte dann (mit Mill) ganz gut voraussetzen, dass in verschiedenen Regionen des Universums verschiedene Gesetze herrschen, die die Anordnung jener materiellen Theilchen bestimmen, und dann wären auch verschiedene Raumformen dieser Anordnung ganz gut denkbar. Wenn bisweilen die Vertreter der nicht-euklidischen Geometrie behaupten, dass der Weltraum in verschiedenen Gegenden des Universums verschiedene Krümmung haben könnte, so ist dieser Gedanke dahin zu modificieren, dass es nicht der leere Raum selbst als solcher ist, der diese verschiedenen Krümmungen hat, sondern dass es die in ihm zerstreute Materie ist, die in verschiedenen Regionen in verschiedenen Raumformen angeordnet wäre; und demgemäss ist auch die Behauptung jener Vertreter, dass durch die verschiedene Krümmung des Weltraumes an verschiedenen Stellen desselben die Naturgesetze, die die Materie beherrschen, verschiedenartig werden, dahin zu modificieren, dass umgekehrt durch die Verschiedenheit der Naturgesetze, die in verschiedenen Regionen des Universums die Materie beherrschen, diese Materie verschiedene Raumformen ihrer Anordnung hätte. Und es wäre diese Voraussetzung der Heterogenität der Materie ganz logisch wenn die Unendlichkeit des leeren Raumes vorausgesetzt wird: denn der Unendlichkeit im Gebiete der Quantität würde die Unendlichkeit im Gebiete der Qualität, d. h. die Mannigfaltigkeit und Heterogenität der materiellen Theilchen entsprechen, und wie jene Unendlichkeit im Gebiete der Quantität das Endliche nicht von sich ausschliesst sondern in sich enthält, ebenso würde auch diese Unendlichkeit der Qualität die Homogenität in ihrem Gebiete nicht ausschliessen, diese letztere müsste vielmehr ebenso in einer unendlichen Anzahl von Fällen in dem unendlichen Universum gegeben sein, wie das mit dem Endlichen in Bezug auf das Unendliche der Fall ist, und jede homogene Materie einer bestimmten Region des Universums würde ihrer Anordnung nach eine besondere Raumform darstellen, und unter diesen Formen würden nicht nur die verschiedenen Formen der gekrümmten Räume mit konstanter sondern auch diejenigen mit variabler Krümmung vorkommen, und zwar diese letzteren an den Grenzübergängen einer materiellen Region in die andere. Bedenkt man noch, dass jede dieser verschiedenen Raumformen ihrer Dimensionszahl nach völlig unbestimmt ist, dann wäre der Reichthum der Wirklichkeit sowohl an quantitativen wie an qualitativen Formen wirklich unerschöpflich, und unser dreidimensionaler euklidischer (wenn er wirklich ein solcher ist, denn in diesem Falle sind wir dessen bekanntlich gar nicht sicher) Raum mit sei-

nen so einfachen Naturgesetzen würde nur ein der unzähligen Ausschnitte aus dieser absolut unendlichen räumlich-materiellen Wirklichkeit sein.

Das sind also die Consequenzen, die in Bezug auf die geometrische Struktur der materiellen Welt auf Grund der geltenden Geometrie gezogen werden müssen, und man wird sie sicherlich für allzu phantastisch erklären. Gewiss sind sie das, antworte ich, und ich bin der erste der sie so nennen möchte, aber sie sind nun einmal die Consequenzen der geltenden Geometrie, und es ist nicht hoch genug das Verdienst der nicht-euklidischen Geometrie veranzuschlagen, dass sie uns diese Consequenzen nahegelegt hat. Die nicht-euklidische Geometrie ist wohl die späte aber die natürliche Tochter der alten euklidischen Geometrie: das Grundprincip dieser alten Geometrie liegt in dem Unendlichkeitsbegriff, aus diesem Begriff folgen unmittelbar die krummen geometrischen Gebilde im Raume, und indem die nicht-euklidische Geometrie diese Gebilde zu besonderen Raumformen erhob, hat sie nur eine berechtigte Consequenz aus der euklidischen Geometrie gezogen. Eine Geometrie nun, die mit dem Grundprincip der euklidischen und der nicht-euklidischen Geometrie, dem Unendlichkeitsbegriff, bricht, wie es die unsrige ist, verwirft damit eo ipso die nicht-euklidischen Raumformen vollständig und stellt fest, dass nur der euklidische Raum möglich und denkbar ist. Während also die nicht-euklidische Geometrie die Erweiterung der euklidischen darstellt stellt unsere Geometrie eine Verengerung derselben dar, indem sie nämlich aufhört continuirliche Geometrie zu sein. Der leere Raum der continuirlichen Geometrie ist zwar in der Hauptsache euklidisch, aber das eigentliche Object derselben, das lückenhafte Discretum der in demselben sich befindenden realen Materie, erlaubt auch die nicht-euklidischen Raumformen neben den euklidischen in gleicher Weise; in unserer discreten Geometrie, in welcher der Raum mit der realen Materie ganz zusammenfällt und ein lückenloses Discretum darstellt, hört die Berechtigung der nicht-euklidischen Raumformen vollständig auf, die euklidische Raumform ist die einzig mögliche. Wenn ich sage, dass meine Geometrie eine Verengerung der euklidischen im Gegensatz zu der nicht-euklidischen Geometrie, die die Erweiterung derselben ist, darstellt, so bedeutet das eben, dass die alte euklidische Geometrie, indem sie die Stetigkeit des Raumes voraussetzt, die Ebenheit dieses Raumes nicht vollständig zu begründen vermag, während durch die Voraussetzung der Discretheit des Raumes seine Geradheit resp. Ebenheit von selbst folgt. Will man also die euklidische Raumform sowohl in Bezug auf den leeren Raum wie in

Bezug auf die in ihm sich befindende reale Materie durchaus aufrechterhalten, dann muss man die Stetigkeit des Raumes und die Unendlichkeit der Materie durchaus fallen lassen, in welchem Falle dann aber auch ihre Dualität verschwindet. Unsere Geometrie ist also einzig und allein im Stande die Ebenheit des realen Weltraumes streng zu begründen, und aus den bekannten Thatsachen, dass sich die nichteuklidischen Raumformen ohne die euklidische Raumform als ihre Grundlage begrifflich nicht denken lassen (einerseits ist ihre Krümmung nur durch das Verhältniss der Geraden ausdrückbar und andererseits ist jedes krumme Gebilde nur in einem ebenen Raume von verhältnissmässig höherer Dimension denkbar), können wir nur den bedeutsamen Schluss ziehen, dass die discrete Geometrie in Wahrheit der continuirlichen zu Grunde liegt, was übrigens auch aus unseren Ausführungen über die Unmöglichkeit des räumlichen Continuums klar hervorgeht. Das Parallelenaxiom, welches Euklid nicht beweisen konnte und aus dessen Nichtbeweisbarkeit die nicht-euklidische Geometrie hervorging, ist auf Grund meiner Geometrie streng beweisbar, und indem ich auf meinen diesbezüglichen Beweis in dem Anhang (vgl. Elemente d. n. Geom. I Th. I Ab.) hinweise, schliesse ich diese etwas ausführlichere Besprechung der nicht-euklidischen Geometrie, indem ich hoffe, das Verhältniss der discreten Geometrie zu ihr in klares Licht gestellt zu haben.

Nachdem wir nun so die Einzigmöglichkeit unserer Geometrie nachgewiesen haben, wollen wir nunmehr die Definitionen derjenigen geometrischen Grundbegriffe geben, die von grundlegender Bedeutung für die gesammte Geometrie sind, und das sind in erster Reihe der Begriff der geraden Linie und derjenige der Dimension.

Bekanntlich ist von den vielen Definitionen der geraden Linie, die die geltende Geometrie aufgestellt hat, keine endgiltig anerkannt und angenommen worden. Als die hauptsächlichsten dieser Definitionen erwähnen wir die folgenden. Euklid definiert bekanntlich die Gerade als diejenige Linie „die zwischen allen in ihr befindlichen Punkten auf einerlei Art liegt“ (Elemente, I-es Buch, Def. 4). Was in dieser Definition der Ausdruck „auf einerlei Art“ bedeuten mag, ist nicht zu erkennen. Es ist zwar richtig, wie wir bald sehen werden, dass die Punkte der Geraden nur ein einziges einfaches Verhältniss in Bezug aufeinander haben, man kann dann umgekehrt, wenn die Gerade als fertiges scheinbar continuirliches Gebilde gegeben ist und man ihre primäre punktuelle Struktur gänzlich ausser Acht lässt, sagen, dass sie in Bezug auf die in ihr befindlichen Punkte auf einerlei Art liegt, aber dieser Ausdruck auf einerlei Art

bedeutet gar nichts wenn man nicht anzugeben vermag, worin dieses „auf einerlei Art“ besteht. Trotz der völligen Werthlosigkeit der Euklid'schen Definition der Geraden, so wie sie von Euklid geliefert wird, müssen wir doch anerkennen, dass dieselbe von allen späteren Definitionen allein den wahren Kern der Geraden trifft. Sehr verwandt mit der Euklidischen Definition ist eine der neuesten Definitionen der Geraden (Veronese), wonach die Gerade „ein in seiner Position identisches System von Punkten“ sei. Diese Definition scheint der wahren Definition der Geraden viel näher als die euklidische zu stehen, weil sie zunächst von der Voraussetzung auszugehen scheint, die Gerade wäre ursprünglich aus Punkten zusammengesetzt. Die Definition lautet aber weiter, dass „dieses Punktensystem durch zwei seiner Punkte, die verschieden sind, bestimmt wird und stetig ist“, und durch die Voraussetzung der Stetigkeit wird dann das Fundament der gesammten Definition umgestossen. Ausserdem giebt es auch bei dieser Definition keine Erklärung des Ausdrucks, worin eigentlich die Identität des Punktensystems liegen soll. Oft wird die Gerade als diejenige Linie definiert, die überall eine und dieselbe Richtung hat. Es ist nun richtig, dass die Gerade unter gewisser Bedingung überall eine und dieselbe Richtung hat, aber wenn man dann fragt, was denn eigentlich die Richtung ist, durch die man so die Gerade erklären will, dann bekommt man bekanntlich stets zur Antwort, dass die Richtung dasselbe ist was die Gerade, wodurch der innere Cirkel in dieser Definition offen anerkannt wird. Wir werden weiter unten den genauen Begriff der Richtung geben, und werden dann sehen dass die Richtung zwar mit dem Wesen der Geraden in enger Beziehung steht, dasselbe aber nicht direkt ausdrückt, obgleich ohne den allgemeinen Begriff der Richtung eine Definition der Geraden nicht aufstellbar ist. Als eine der beliebtesten Definitionen der Geraden gilt diejenige, wonach die Gerade der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten ist. Nun ist es richtig, dass die Gerade der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten ist, aber diese Eigenschaft der Geraden zur Definition derselben erheben heisst einen Cirkel in dieser Definition begehen. Denn nur dann könnte man die Gerade als den kürzesten Weg bezeichnen, wenn man einen Maassstab zur Bestimmung der Kürze resp. der Länge der Linien hätte, der verschieden von demjenigen der geraden Linie wäre, während ein solcher doch nicht vorhanden ist, da die Gerade eben *der* Maassstab der Länge aller Linien ist. Ausser diesen Definitionen giebt es noch einige, die in ähnlicher Weise irgend eine secundäre Eigenschaft der Geraden

zum Definiendum derselben machen, und sie alle leiden an denselben Fehlern wie die angeführten, so dass wir auf dieselben nicht einzugehen brauchen. Ebenso brauchen wir nicht auf die vielen anderen Definitionen der Geraden einzugehen, die oft sehr complicierte geometrische Gebilde voraussetzen (Ebene, Kugel etc.), um zur Definition eines so einfachen geometrischen Gebildes wie es die Gerade ist, zu gelangen.*

Die Schwierigkeit einer Definition der Geraden verschwindet vollständig, sobald man die punktuelle Struktur derselben voraussetzt. Die einfachste Gerade, die sich denken lässt, stellen zwei sich miteinander berührende Punkte dar, deren Berührung entweder imaginär oder reell ist. Dieses einfachste geometrische Gebilde stellt eine Gerade einfach deshalb dar, weil ja offenbar dasselbe weder krumm noch gebrochen ist, weil das Krumme aus dem Discretum vollständig ausgeschlossen und die gebrochene Linie aus Geraden zusammengesetzt ist, eine Linie also die keine Zusammensetzung hat offenbar nicht gebrochen ist. Der wahre positive Grund aber, der uns berechtigt, die zwei sich berührenden Punkte als die einfachste Gerade zu bezeichnen, liegt darin, dass das wesentliche Verhältniss, welches zwischen diesen zwei Punkten besteht, in jeder Geraden zwischen den Punkten derselben besteht. In der einfachsten Geraden berührt sich, da in ihr nur zwei Punkte gegeben sind, jeder Punkt nur mit einem Punkte, und in jeder Geraden überhaupt berührt sich jeder nachfolgende Punkt nur mit einem vorhergehenden Punkte so dass in diesem gleichförmigen und einfachen Berührungsverhältniss der Punkte der Geraden miteinander das Wesen der Geraden liegt. Unsere Definition der Geraden lautet also: *die Gerade ist eine solche Reihe (oder ein solches System) von Punkten, in der sich jeder nachfolgende Punkt nur mit einem vorhergehenden Punkte berührt.* Wir müssen nun näher die in dieser Definition gebrauchten Ausdrücke erklären und so die ganze Definition rechtfertigen.

Erstens die Unterscheidung der nachfolgenden von den vorhergehenden Punkten soll erklärt werden. In dieser Unterscheidung liegt nun der Begriff der Richtung eingeschlossen. Die zwei sich berührenden Punkte sind, indem sie sich miteinander berühren, zugleich auch voneinander getrennt, das Berührungsverhältniss ist also

* Ueber die verschiedenen Definitionen der geraden Linie und die Haupteinwände, die dagegen zu erheben sind, vgl. man das schon erwähnte Werk von W. Killing, Einführung in die Grundlagen der Geometrie, II-ter Band, Siebenter Abschnitt, § 3.

mit dem Trennungs- oder Unterscheiduungsverhältniss untrennbar verbunden. Das Trennungsverhältniss enthält nun in sich das Moment der Richtung, denn indem der eine Punkt von dem anderen getrennt ist, sind sie zugleich in Bezug aufeinander in entgegengesetzter Richtung gegeben, der eine Punkt ist links der andere rechts et vice versa voneinander gegeben, der eine Punkt kommt vor resp. nach dem anderen. Die zwei sich berührenden Punkte, die die einfachste Gerade darstellen, enthalten also zwei entgegengesetzte Richtungen in sich; während nun bekanntlich die zwei aufeinander folgenden Zeitpunkte zwei Richtungen darstellen, die völlig und absolut einander entgegengesetzt sind, sind die Richtungen der beiden sich berührenden Raumpunkte wohl einander entgegengesetzt, es ist aber gleichgültig welche Richtung als die positive und welche als die negative zu betrachten ist d. h. welcher Punkt als der Ausgangspunkt zu nehmen ist. Wenn wir also in der Geraden die nachfolgenden von den vorhergehenden Punkten unterscheiden, so ist es dabei willkürlich welchen Endpunkt der Geraden wir dabei zum Ausgangspunkte nehmen, wenn wir einen solchen aber nehmen, dann ist es völlig eindeutig bestimmt, welche Punkte als die vorhergehenden und welche als die nachfolgenden zu gelten haben.

Zweitens soll nun weiter erklärt werden, was der Ausdruck bedeuten soll, dass sich in der Geraden jeder nachfolgende Punkt nur mit einem vorhergehenden Punkte berühren soll, denn hier in dieser Feststellung des nur *einmaligen* Sich-Berührens der aufeinanderfolgenden Punkte der Geraden liegt das Unterscheidende der geraden Linie von den nicht-geraden Linien. Nur ein Blick auf das Punktennetz der Figur 9 (Taf. I) belehrt uns nun dass sich die Gerade ABCD ... von der gebrochenen ABOP..... darin unterscheidet dass, während sich der Punkt O der letzteren offenbar mit zwei ihrer diesem Punkte O vorhergehenden Punkten A und B berührt — und zwar berührt sich der Punkt O mit dem Punkte B reell und mit dem Punkte A imaginär —, in der Geraden ABCD ... offenbar kein Punkt anzutreffen ist, der sich mit mehreren von den diesem Punkte vorhergehenden Punkten d. h. *mehr denn einmal* berührte. Wie man also sieht, besteht ein eindeutiger und völlig bestimmter Unterschied zwischen der geraden und der gebrochenen Linie in dem discreten Raume, während in dem continuirlichen Raume dieser Unterschied einfach unmöglich ist: der Unterschied zwischen der Geraden und der gebrochenen Linie in dem discreten Raume beruht auf dem Unterschiede der reellen und der imaginären

Berührungen in diesem Raume, wenn dieser Unterschied nicht bestände dann wäre thatsächlich kein begriffliches Merkmal da, der die Gerade von der Gebrochenen unterschiede. In dem Falle wären ja alle Berührungen zwischen den Punkten einer und derselben Art, der Punkt O der gebrochenen ABOP . . würde sich in dem obigen Falle nur mit dem Punkte B reell berühren, denn von einer imaginären Berührung mit dem Punkte A könnte dann keine Rede sein, in dem absolut continuirlichen Raume würde die imaginäre Berührungsentfernung AO selbst eine reelle Gerade darstellen, in der sich die (allerdings nur fiktiverweise zu denkenden) Punkte wiederum nur reell berührten. Besteht aber der discrete Raum, dann besteht auch dieser Unterschied zwischen den imaginären und den reellen Berührungen, es besteht dann also eine Vielheit von Berührungen und es besteht dann auch der Unterschied zwischen der geraden und der gebrochenen Linie, und zwar nicht etwa nur der Unterschied zwischen der reellen Geraden und der reellen gebrochenen Linie sondern auch zwischen der imaginären Geraden und der imaginären oder reellen gebrochenen Linie sowie auch der Unterschied zwischen der reellen Geraden und der imaginären gebrochenen Linie, und zwar in einer nach dem Ausgeführten leicht anzugebenden Weise. Wir haben also hier die fundamentale Bedeutung der imaginären Bestandtheile des discreten Raumes von noch einer Seite kennen gelernt, wir haben nachgewiesen, wie nur auf Grund dieser Eigenschaft des discreten Raumes imaginäre Bestandtheile zu enthalten, eine einwandfreie Definition der Geraden möglich ist.

Nachdem wir nun so die wahre Definition der Geraden entdeckt haben, wird es uns nicht schwer sein, die wichtigste der oben angefhürten Definitionen der Geraden, wonach sie eine solche Linie ist in der alle Punkte in einer und derselben Richtung liegen, auf ihre Richtigkeit zu prüfen. Wenn die Richtung der Punkte in einer Geraden sobald eindeutig bestimmt ist, sobald der Ausgangspunkt dazu feststeht, dann ist es für uns, angesichts der von uns geführten Analyse des Richtungsbegriffs, nicht schwer festzustellen, dass diese Definition nur unter der Voraussetzung der unsrigen gilt. Der Pnnkt C in der Geraden ABCD . . . . ist in Bezug auf den Punkt A völlig eindeutig bestimmt, er liegt nach diesem Punkte. Dem analog ist nun der Punkt O ganz ebenso nach dem Punkte A, da er nach dem Punkte B ist, der nach dem Punkte A ist, und doch liegen O und C nicht in einer und derselben Richtung in Bezug auf den Punkt A. Woher dieser Unterschied? Derselbe wird sogleich klar, wenn wir uns dessen erinnern, dass das Rich-

tungsverhältniss von dem Berührungsverhältniss abhängt. Der Punkt O ist nicht in demselben Sinne nach dem Punkte A, in dem es der Punkt C ist — obgleich beide gleichermaassen nach dem Punkte B liegen — einfach deshalb, weil der Punkt O in Bezug auf den Punkt A ein Berührungsverhältniss hat, der dem Punkte C in Bezug auf A durchaus fehlt. Wenn wir also sagen, dass sich der Punkt C in Bezug auf den Punkt A in derselben Richtung befindet, in der sich der Punkt B in Bezug auf diesen Punkt befindet, so bedeutet das nur, dass der Punkt C in Bezug auf den Punkt A kein Berührungsverhältniss hat. Das ist aber noch nicht genügend, denn einerseits hat der Punkt B ein Berührungsverhältniss zu dem Punkte A und doch liegt er in derselben Richtung in Bezug auf A in der der Punkt C in Bezug auf A liegt, und andererseits hat z. B. auch der Punkt M (auf der Geraden AOM oder in der gebrochenen ABOM) kein Berührungsverhältniss zu dem Punkte A und doch liegt er in Bezug auf diesen Punkt in einer anderen Richtung als der Punkt C. Nun, es ist leicht einzusehen, dass der Punkt C in Bezug auf den Punkt A nur deshalb in derselben Richtung mit dem Punkte B liegt, weil A, B und C in einer und derselben Geraden liegen, und ebenso dass der Punkt M nur deshalb in Bezug auf den Punkt A in einer anderen Richtung liegt als die Punkte B und C, weil die Punkte A, O und M auf einer anderen Geraden liegen. Für die Punkte die sich berühren ist das Anderssein des Berührungsverhältnisses auch das Anderssein des Richtungsverhältnisses, für die Punkte die sich nicht berühren ist das Anderssein der Geraden zugleich das Anderssein des Richtungsverhältnisses, da zwei Punkte die voneinander entfernt sind dies entweder unmittelbar sind — so dass indem sie getrennt sind, sie sich zugleich auch berühren — oder mittelbar, durch andere Punkte, in dem ersteren Falle bedeutet also ein anderes Berührungsverhältniss eo ipso ein anderes Richtungsverhältniss, in dem letzteren Falle bedeutet das Getrenntsein durch Punkte, die in einer einzigen Weise miteinander verbunden resp. getrennt sind d. h. die in einer Geraden liegen, das bestimmte Richtungsverhältniss. Wie man also sieht, gilt die Definition, wonach die Gerade eine solche Linie ist, in der alle Punkte in einer und derselben Richtung liegen, für die einfachste Elementargerade deshalb nicht, weil in derselben nicht mehrere Punkte gegeben sind, die in einer und derselben Richtung liegen (die zwei Punkte dieser Geraden liegen in entgegengesetzter Richtung in Bezug aufeinander), für die zusammengesetzte Gerade aber kann diese Definition in primärer Weise nicht mehr gelten, weil sie diese Ge-

rade als solche schon voraussetzt, weil ja in diesem Falle Richtung dasselbe mit der Geraden ist. Unsere obige Definition ist also die einzige zu Recht bestehende.

Haben wir einmal die richtige Definition der Geraden, dann ist es uns nicht schwer nach ihrem Vorbild die richtigen Definitionen der Ebene, des dreidimensionalen Raumes etc. zu liefern. Freilich können diese Definitionen nur dann in dieser Form aufgestellt werden wenn zuvor der Satz feststeht, dass die Ebene aus Geraden, der dreidimensionale Raum aus Ebenen, der vierdimensionale Raum aus dreidimensionalen bestehen müsse, ein Satz, den wir besonders beweisen müssten, und in dem Anhang wird gezeigt werden dass er nur eine einzige Ausnahme hat. Diesem Satze gemäss ist die Ebene als ein System von Geraden zu definieren, in dem sich jede nachfolgende Gerade nur mit einer vorhergehenden Geraden (resp. in dem sich die Punkte jeder nachfolgenden Geraden nur mit Punkten einer vorhergehenden Geraden berühren) berührt, der dreidimensionale Raum als ein System von Ebenen, in dem sich jede nachfolgende Ebene (resp. deren Punkte) nur mit einer vorhergehenden Ebene (resp. ihren Punkten) berührt, der vierdimensionale quadratische Raum als ein System von dreidimensioralen Räumen, in dem sich jeder nachfolgende dreidimensionale Raum (resp. dessen Punkte) nur mit einem vorhergehenden dreidimensionalen Raume (resp. dessen Punkten) berührt u. s. w.

Schon aus diesen Definitionen folgt ein wichtiger Schluss in Bezug auf den Begriff der Dimension. Wir können nämlich aus diesen Definitionen entnehmen, dass die gebrochenen Raumgebilde gar nicht in ebendemselben Sinne als Raumgebilde einer bestimmten Dimension bezeichnet werden können, in welchem dies in Bezug auf die geraden Raumgebilde gilt. Der Raum von einer Dimension ist einzig und allein die Gerade zu nennen, während die gebrochene Linie offenbar den zwei- drei- mehrdimersionalen Raum voraussetzt, um bestehen zu können. Zwar hört damit die gebrochene Linie nicht auf eindimensional zu sein, aber sie ist eindimensional nur in Bezug auf die sie constituirenden Geraden, von denen jede eindimensional ist, sie selbst als solche ist aber durchaus ein zwei- (oder mehr-) dimensionales Gebilde, da sie nur in einem mehrdimensionalen Raume bestehen kann, sie stellt, kurz gesagt, eine Vielheit von eindimensionalen Räumen dar, und eine solche Vielheit ist nur in einem mehrdimensionalen Raume denkbar. Dasselbe gilt nun auch von anderen Räumen höherer Dimension, bis zu dem sechsdimensionalen (wenn nur die vollkommenen ausgebreiteten Räume in Betracht gezogen werden) der als solcher nur ein einziger ist, da

es keinen höheren Raum mehr giebt dessen Bestandtheil er wäre. Was hier in Bezug auf die gebrochenen Raumgebilde ausgeführt, gilt selbstverständlich auch für die krummen Gebilde des continuirlichen Raumes vollständig, da die krummen Gebilde den Grenzwerth der gebrochenen in dem absolut continuirlichen Raume darstellen, und es gilt sogar für die krummen erst recht, da diese in dem discreten Raume nicht einmal gegeben sind.

Nachdem wir so unter den Raumgebilden diejenigen ausgeschieden haben, die einzig und allein Räume einer bestimmten Dimension darstellen können, müssen wir nun diesen Begriff der Dimension näher bestimmen. Wie es nun verschiedene Definitionen der Geraden giebt, ebenso zahlreich sind die Definitionen des Begriffs der Dimension. Die älteste und weitverbreiteste Definition dieses Begriffs lautet, dass die Dimension in der Ausdehnungsrichtung besteht und dass somit unser Raum deshalb drei Dimensionen hat, weil er in dreifacher Weise (in Länge, Breite und Tiefe) ausgedehnt ist. Diese Definition ist so wie sie lautet offenbar unrichtig, denn Richtung der Ausdehnung ist jede Richtung resp. jede Gerade die sich von einem Punkte aus gezogen denken lässt, und die Anzahl dieser Richtungen ist schon in der Ebene eine schlechthin unbestimmte (in dem discreten Raume hängt die Anzahl derselben von der Grösse des Raumes ab.) Die Unbestimmtheit des Begriffs der Ausdehnungsrichtung in dieser Definition hat man seit jeher gefühlt und deshalb war man bestrebt, denselben näher zu bestimmen, was man bekanntlich in der Weise that, dass man nur die aufeinander senkrechten Richtungen für die dimensionalen Ausdehnungsrichtungen erklärte. Wenn die aufeinander senkrechten Geraden für den Maasstab der Dimensionszahl eines Raumes angenommen werden, dann ist diese dadurch zwar eindeutig bestimmt, nur kann leider kein logischer Grund angegeben werden, der jenen Maassstab selbst rechtfertigen könnte. Denn die Behauptung, dass durch die drei senkrecht aufeinander stehenden Geraden (Coordinaten) die Lage eines Punktes im Raume, und durch die zwei senkrecht aufeinander stehende Geraden die Lage eines Punktes in der Ebene eindeutig bestimmt ist, ist richtig, nur bleibt es eben unerklärt, warum dem so ist. Der Wahrheit viel näher ist eine in neuester Zeit besonders viel gebrauchte Definition, die bei der Bestimmung der Dimensionszahl des Raumes von den höherdimensionalen resp. von dem dreidimensionalen Raume ausgeht und die Zahl der Dimensionen der Zahl von Teilungen eines Raumes in einfachere Räume bis zu dem untheilbaren o-dimensionalen Punkte gleichsetzt. Theilen wir einen Körper in

zwei Theile, so wird die Grenze dieser Theilung eine Fläche sein; theilen wir weiter die Fläche in zwei Theile, so wird die Grenze dieser Theilung eine Linie sein; theilen wir weiter die Linie in zwei Theile, so wird die Grenze dieser Theilung ein einfacher weiter nicht theilbarer Punkt sein. Was dieser Definition vorzuwerfen ist, ist erstens dass sie von höheren Räumen ausgehen muss um den Begriff der Dimension aufzustellen, und zweitens dass sie offenbar den (leeren) Raum als discret und getheilt voraussetzt, was er jedoch in der geltenden Geometrie nicht sein soll. Dass die Theilung des Körpers auf die Fläche führt* ist nur dann in stringentem Sinne der Fall, wenn der Körper aus Flächen besteht, und ebenso dass die Theilung der Fläche auf Linie und dieser auf den Punkt führt ist nur dann der Fall, wenn die Fläche aus Linien und die Linie aus Punkten besteht, sonst ist dieser Begriff der Theilung überhaupt ein unverständlicher Gedanke. Wenn dem aber so ist, dann brauchen wir nicht von den höherdimensionalen Räumen auszugehen, um die Räume von der niederen Dimension und den Begriff der Dimensionsanzahl überhaupt zu deducieren, wir können dann direkt von dem Punkte ausgehen und den Begriff der Dimension und der mehrdimensionalen Räume aufstellen.

Und dies ist der Weg den ich hier einschlage und der uns einzig und allein befähigt, den Begriff der Dimension in eindeutiger Weise zu bestimmen. Ein einziger Punkt als solcher stellt überhaupt noch keinen Raum dar, und deshalb bezeichnet man ihn als o-dimensionalen Raum. Zwei Punkte die sich unmittelbar berühren stellen offenbar die Gerade dar, da sie die einfachste Gerade darstellen; drei Punkte die sich alle miteinander unmittelbar berühren werden offenbar die Ebene darstellen, da sie die einfachste Ebene darstellen; vier Punkte die sich alle unmittelbar miteinander berühren werden offenbar den dreidimensionalen Raum darstellen; und überhaupt werden somit n Punkte die sich alle unmittelbar miteinander berühren den n — 1-dimensionalen Raum darstellen. Es wird von den Geometern heutzutage oft die Ebene als diejenige Raumform definiert, die durch drei Punkte bestimmt ist, so wie die Gerade

* Ich erinnere hier an die bekannte Bemerkung Hume's (Treatise on human nature, B. I. p. II. sec. IV) dass die Definitionen der Geometrie ihren Beweisführungen widersprechen, dass die Definitionen die Untheilbarkeit der Fläche, der Linie und des Punktes (resp. in Flächen, Linien und Punkte — selbstverständlich im dimensionalen Sinne) behaupten, während die Beweisführungen die Idee der Untheilbarkeit schlechthin negieren, worin Hume mit Recht den Cardinalfehler der Geometrie erblickt einen Fehler übrigens den unsere Geometrie vollkommen vermeidet.

durch zwei Punkte bestimmt ist, und dem analog soll überhaupt ein Raum von n-Dimensionen durch $n+1$-Punkte bestimmt sein, nur leider muss man bei dieser Bestimmung eines n-dimensionalen Raumes durch $n+1$-Punkte immer hinzufügen, dass die $n+1$-Punkte sich nicht in einem der Räume, deren Anzahl der Dimensionen $< n$ ist, befinden dürfen, eine Beschränkung die offenbar die Vortheile der Sache aufhebt. Dieser Mangel der Bestimmung des n-dimensionalen Raumes durch $n+1$-Punkte, der unvermeidlich in der continuirlichen Geometrie ist, verschwindet vollständig in unserer discreten Geometrie, da wir in dieser die $n+1$-Punkte als sich unmittelbar berührende fassen können. In diesem Falle stellt ja offenbar jeder neue Punkt, der zu den schon gegebenen hinzukommt, wenn man nur die Bedingung stellt, dass er sich mit ihnen allen unmittelbar berühren muss, eine neue Ausdehnungsrichtung des Raumes dar, und *jede solche Ausdehnungsrichtung der unmittelbar sich berührenden Punkte ist die wahre Dimensionsrichtung*. Diese Auffassung der Dimensionsrichtung erklärt also die obige von der continuirlichen Geometrie constatierte aber unerklärte Thatsache, dass der n-dimensionale Raum durch $n+1$-Punkte bestimmt ist, vollständig, in welcher Thatsache sich so recht die punktuelle Struktur des Raumes offenbart. Dieselbe Auffassung stellt aber auch ein für allemal die Möglichkeit der mehrdimensionalen Räume fest und erklärt zugleich, warum alle die vielen Versuche, die Dreidimensionalität des Raumes als die höchstmögliche zu beweisen, fehlschlagen mussten und fehlschlagen müssen.

Die obige Definition gilt in erster Reihe für die unausgebreitete dreieckige Raumform, da ja dieselbe ausschliesslich aus den sich unmittelbar berührenden Punkten besteht. Dieselbe gilt aber im Wesentlichen auch bei der ausgebreiteten Raumform, obgleich mit gewissen Modificationen. Zunächst ist festzustellen dass die Dimensionsanzahl eines ausgebreiteten Raumes durch die Dimensionszahl des einfachten Raumelements desselben vollständig bestimmt ist, da seine Ausbreitung offenbar nicht die Dimensionsanzahl der einfachsten Raumelemente vergrössert selbstverständlich ist dies solange der Fall solange dabei keine neue räumliche Elementargestalt entsteht sondern nur die Menge der bestehenden vermehrt wird). Da sich nun in dem ausgebreiteten Raume alle Punkte nicht unmittelbar miteinander berühren, so wird die Dimensionsanzahl eines solchen Raumes nicht mehr unmittelbar der Zahl der einem einfachen Punkte hinzugefügten mit ihm sich unmittelbar berührenden Punkte entsprechen. Bei dem ungemischten ausgebreiteten Raume wird sie aber offenbar der Zahl der

einander hinzugefügten einfachen Raumelemente (der ersten, zweiten etc. Dimension) entsprechen, bei denen sich, dem Begriffe eines solchen Raumes gemäss, jeder Punkt des einen einfachen Raumes mit je einem des anderen unmittelbar berührt. Bei dem gemischten ausgebreiteten Raume wird sie aber der Zahl dieser einfachen einander hinzugefügten Raumelemente und der Zahl der diesen einfachen Räumen hinzugefügten einfachen Punkten gleich sein, die den ersteren so hinzugefügt werden, dass sie sich mit allen ihren Punkten unmittelbar berühren (Ueber den Begriff des gemischten und des ungemischten ausgebreiteten Raumes vgl. den Anhang). Am einfachsten steht die Sache in dieser Hinsicht mit dem ausgebreiteten dreieckigen Raum, denn dieser Raum wird so viel Dimensionen haben wie viel Dimensionen das entsprechende einfache dreieckige Raumelement hat, und da bekanntlich nur die zweidimensionale dreieckige Raumform einen ausgebreiteten Raum liefert, so wird diese Feststellung nur für den zweidimensionalen ausgebreiteten Raum möglich sein. Für die quadratische ausgebreitete Raumform kann, da die Anzahl der in ihr von einem Punkte gezogenen realen Linien (die offenbar aufeinander senkrecht sind) mit der Anzahl der Dimensionalrichtungen zusammenfällt — was aus der allgemeinen Entstehungsweise dieser Raumform unmitellbar folgt, — die Anzahl der in einem Punkte sich schneidenden Senkrechten für die Dimensionszahl genommen werden, womit zugleich die von der continuirlichen Geometrie constatierte aber unerklärte Thatsache dieser Coincidenz erklärt ist.

Nachdem wir nun so die discrete Geometrie vollständig begründet haben, bleibt uns nur noch ein Einwand gegen dieselbe zu beheben übrig, ein Einwand der nicht geometrischer sondern rein psychologisch-empirischer Natur ist. Wenn nach unserer Geometrie alle die krummen und viele geradlinigen geometrischen Gebilde unmöglich sind, dieselben aber sinnlich ganz ebenso wahrgenommen werden wie diejenigen, die auch nach unserer Geometrie möglich sind, so muss diese empirische Thatsache ihrer sinnlichen Wahrnehmbarkeit erklärt werden. Nun scheint eine Erklärung derselben für uns, die wir keinen Schein in der unmittelbaren Erfahrung zulassen, besonders schwer zu sein, da man ja dieselben offenbar für blossen Schein erklären muss. Ich muss nun besonders betonen, dass die sinnlich wahrgenommenen geometrischen Gebilde die geometrisch unmöglich sind, nicht in dem Sinne für scheinbar zu erklären sind, dass sie als solche in der unmittelbaren Erfahrung nicht gegeben sind, dass sie als solche nicht wahrgenommen werden, dass sie in der unmittelbaren Wahrnehmung nicht wirklich gegeben

sind, sondern nur in dem Sinne dass sie nicht letzte einfache Erfahrungsthatsachen darstellen (so wie etwa die Thatsache des absoluten Werdens eine Erfahrungsthatsache ist, aber nicht die letzte einfache Thatsache darstellt). Der Grund der es macht, dass neben den möglichen geometrischen Gebilden auch unmögliche wahrgenommen werden, liegt darin, *dass der einfache reale Raumpunkt als solcher nicht wahrgenommen wird.* Wären die einfachen realen Raum- resp. Empfindungspunkte wahrnehmbar, was offenbar nur dann der Fall wäre (vgl. S. 185, die Anmerkung zur Seite 271 und gleich unten), wenn jeder einzelne Empfindungspunkt eine besondere Empfindungsqualität darstellte — denn in diesem Falle müsste ja jeder von dem anderen isoliert wahrgenommen werden, da jeder als ein besonderes Etwas in der Wahrnehmung gegeben wäre und folglich durch die Wahrnehmung als solches constatiert werden müsste — dann würde unsere Raumwahrnehmung ein Netz von isoliert wahrgenommenen Punkten darstellen und man würde dann in derselben nur die in einem lückenlosen Punktendiscretum möglichen geometrischen Gebilde wahrnehmen. Da dem aber nicht so ist, so wird ein ganzes System (oder Menge) von Empfindungspunkten, die gleicher Qualität sind, als eine räumlich fürsichseiende Einheit wahrgenommen werden, in der keine discreten Theile unterscheidbar sind, diese räumliche Einheit wird für unsere Wahrnehmung ein Continuum darstellen. Wenn per impossibile auch qualitativ gleiche Empfindungspunkte isoliert wahrgenommen werden könnten, was offenbar deshalb unmöglich ist, weil das — und dies ist der letzte Grund davon — die Wahrnehmung der leeren unausgedehnten nichtseienden Lücken, die zwischen jenen Punkten liegen, erfordern würde, die jedoch als nichtseiende offenbar nicht wahrnehmbar sind (wenn die realen Punkte qualitativ verschieden sind, dann werden sie durch diese ihre qualitative Verschiedenheit als solche voneinander in der Wahrnehmung isoliert, ohne dass dabei die Wahrnehmung jener leeren nichtseienden Lücken erforderlich wäre), dann würde auch für unsere Wahrnehmung das wahrgenommene Discretum das sein, was es an sich ist, d. h. ein Discretum.* Ganz besondere Umstände, die innere Struktur des

* In der Psychologie wird gezeigt werden, wie sich auf Grund der Unwahrnehmbarkeit der einfachen realen Empfindungspunkte die Entstehung des gleichförmigen Eindrucks einer Farbe, die als solche unzweifelhaft zusamengesetzt ist (z. b. des Orange) aus der gleichmässigen Vertheilung der einfachen realen Farbenpunkte zweier (oder mehrerer) Farbenqualitäten in einem räumlichen Punktendiscretum ungezwungen erklären lässt, während auf Grund der geltenden Geometrie solche Erklärungen durchaus unmöglich und das ganze Farbengebiet für die Psychologie noch immer eine terra incognita ist.

Discretums selbst ist es also, die das Discretum in der Wahrnehmung zu einem scheinbaren Continuum macht, aber dass das Discretum eben nicht Continuum sondern Discretum ist, zeigt sich auch in der Wahrnehmung sogleich, wenn qualitativ distinkte Punkte wahrgenommen werden sollen. Es ist nämlich offenbar dass, wenn der Wahrnehmungsraum wirklich ein Continuum wäre (selbstveständlich wird dabei die Identität des Raumes mit der Empfindungsmaterie vorausgesetzt), diese Wahrnehmung distinkter qualitativ gleichen Punktencomplexe nicht möglich wäre, da in einem wahren Continuum keine getrennten Theile möglich sind, qualitativ verschiedene Theile aber offenbar zugleich quantitativ voneinander getrennt sein müssen.*

Wenn nun so die einfachen realen Raumpunkte (denn nur von diesen kann in der Wahrnehmung die Rede sein, die irrealen Punkte als irreale sind eo ipso unwahrnehmbar) nicht wahrgenommen werden und nur Complexe von vielen solchen die untereinander von gleicher von der Qualität anderer sie umgebender Punkte aber verschiedener Qualität sind, distinkt wahrgenommen und als räumliches Continuum in der Wahrnehmung gegeben sind, dann bildet auch die Wahrnehmungsthatsache der unmöglichen geometrischen Gebilde keine Schwierigkeit mehr. Ich will dies an zwei Beispielen zeigen, von denen sich das eine auf die geradlinigen und der andere auf die krummlinigen bezieht, und dann ist es leicht diese Erklärung auch auf alle anderen Fälle auszudehnen. In dem quadratischen Raume (und unser Wahrnehmungsraum ist offenbar quadratisch, da er dreidimensional ist)** ist das gleichseitige Dreieck offenbar eine unmögliche Figur, da in diesem Raume der Winkel von 60° und folglich auch drei gleiche Seiten eines Dreiecks nicht denkbar sind (vgl. darüber den Anhang, I Theil, I Abschnitt) In dem Anhang (I Theil, III Abschnitt) zeige ich nun, dass von einem Schnittpunkte zweier reellen Geraden aus genommen in diesem Punktennetze in jeder zu einer dieser Geraden parallelen Geraden ein Punkt existiert,

* Dass man diese so einfachen Sachen nicht einzusehen vermag, rührt einfach davon her, dass man einerseits jene mathematischen Begriffe des Continuums und Discretums nicht genügend unterscheidet und zweitens dass man zu wenig auf die Realität der Bewusstseinsinhalte achtet, sondern sich nur um die einzig und allein real sein sollenden äusseren „in dem leeren Raume“ bestehenden Dinge kümmert.

** Wenn der Empirismus (der sogenannte Empirismus in der psychologischen Wahrnehmungstheorie ist hier gemeint) mit seiner Behauptung Recht hätte, dass wir die Tiefendimension als solche gar nicht wahrnehmen, sondern nur die Flächen, dann könnten diese Flächen sowohl dreieckig wie quadratisch sein, und dann würde auch unser obiges Beispiel mit dem gleichseitigen Dreiecke nicht mehr der Wirklichkeit der

dessen imaginäre Entfernung von jenem Schnittpunkte eine Imaginäre darstellt, deren Neigungswinkel zu der anderen jener beiden reellen Geraden dem Winkel von 60° am nächsten steht, so dass in verschiedener Entfernung von einem bestimmten Punkte jenes discreten Punktennetzes es eine andere imaginäre Gerade sein wird, die als Fundamentalgerade zur Entstehung der entsprechenden unmöglichen Geraden in unserer Wahrnehmung (auf die gleich anzugebende Art und Weise) dient. In Figur 10 (Taf. I.) ist nun in dem quadratischen Punktennetz eine imaginäre Gerade AC dargestellt, deren Neigung zu der realen Geraden AB dem Winkel von 60° am nächsten zu stehen kommt. Der Unterschied dieser Geraden und der unmöglichen Geraden AM deren Neigung zu der Geraden AB gleich 60° ist wird in der Wahrnehmung offenbar verschwinden, wenn die einfachen die Gerade AM (resp. die Gerade AC) constituirenden Punkte nicht wahrgenommen werden können. Die Gerade. die wir wahrnehmen wird nicht jene geometrische d. h. breitlose Gerade AC sein, sondern wir werden statt dessen eine ganze Menge von qualitativ gleichen Punkten wahrnehmen, die um diese Gerade gelegen sind und deren Grenzpunkte fast gleich weit von ihr abstehen. Keine Gerade die wir sinnlich wahrnehmen kann in ihrer Breite etwa den fünfzigsten Theil eines Millimeters überschreiten und da in ihr dann sicherlich mehr denn zehn einfache Punkte liegen, so wird man, wenn man nur in Betracht zieht, dass die kleinen Unterschiede in den Entfernungen der Grenzpunkte von der Fundamentalgeraden AC nicht wahrgenommen werden können, leicht begreifen, wie in unserer Wahrnehmung statt ihrer die Gerade AM wird erscheinen können, deren Winkelabweichung von 60° in Bezug auf die Gerade AB in der Wahrnehmung infolgedessen durchaus nicht constatiert werden kann.

Analog dieser Erklärung der Wahrnehmung des gleichseitigen Dreiecks in dem quadratischen Raume ist auch die Entstehung der

Wahrnehmung entsprechen, wenn die Flächen dreieckige Struktur hätten. In der Psychologie werden wir nun zeigen wie verfehlt die empiristische Theorie in Bezug auf die Raumwahrnehmung speciell auf die Tiefenwahrnehmung ist, und bemerken hier nur soviel dass auf Grund unseres metaphysischen und psychologischen Hauptprincips von der absoluten Realität der unmittelbaren Erfahrung die Tiefenwahrnehmung notwendigerweise als Wahrnehmungsthatsache existieren müsse, da alles was im Bewusstsein wahrgenommen zu sein scheint, im Bewusstsein und für das Bewusstsein als Wahrnehmungsthatsache auch wirklich gegeben ist. Obgleich also unsere Wahrnehmungsflächen unzweifelhaft quadratisch sind, gebe ich doch in der Figur 11 (Taf. I) die Art und Weise der Entstehung des Quadrats in der dreieckigen Ebene an, in der dasselbe als geometrische Figur unmöglich ist.

Wahrnehmungsthatsache des Kreises, der als krummliniges Gebilde absolut unmöglich ist, ganz gut erklärbar. In der Figur 12 (Taf. I.) ist das quadratische Punktennetz gegeben, und zugleich diejenigen Punkte durch die zwei Kreise bezeichnet, die durch ihre Gesammtheit den Eindruck der Kreislinie in der Wahrnehmung hervorbringen. Diese Menge von Punkten, die in der Wahrnehmung als continuirliche Kreislinie erscheint, besteht offenbar aus Punken, die um einen Punkt herum (den Mittelpunkt O) so in aufeinanderfolgenden Reihen gegeben sind, dass Punkte in einer nnd derselben Reihe annähernd gleich weit von dem Mittelpunkte abstehen. Dieser Unterschied der Entfernungen einzelner Punkte von dem Mittelpunkte wie auch die innere Anordnung der Punkte in jener Punktenmenge werden offenbar in der Wahrnehmung verschwinden, da die einfachen Raumpunkte als solche nicht wahrgenommen werden, so dass es ganz begreiflich ist wie jene Punktenmenge in der Wahrnehmung den Eindruck einer Kreislinie machen wird.

Wie man also sieht, bilden die Wahrnehmungsthatsachen der unmöglichen geometrischen Figuren für die discrete Geometrie keine Schwierigkeit sobald man sich vor Augen hält, dass die letzten Bestandtheile des discreten Raumes, die einfachen Raumpunkte, nicht wahrgenommen werden können, und zwar bilden sie keine solche umsomehr da ja auch die continuirliche Geometrie die Unwahrnehmbarkeit der unendlich kleinen Theile des Continuums resp. des unendlichen Discretums zulässt, freilich ohne einen besonderen Grund für diese Unwahrnehmbarkeit angeben zu können.* Wenn nun die

* Denn den gewöhnlichen Grund, der dafür angeführt wird, zu erwähnen ist es nicht einmal der Mühe werth. Man sagt nämlich gewöhnlich, dass diese unendlich kleinen Theile des Continuums deshalb unwahrnehmbar sind, weil sie zu klein sind. Und doch sobald man sich dessen erinnert, dass Wahrnehmungsobjecte mit den Aussenobjecten nicht identisch sind (vgl. das erste Kapitel des ersten Abschnitts), wird man bemerken, dass sich dieser Grund höchstens auf die äusseren Objecte beziehen könne, die Kleinheit der Wahrnehmungsobjecte als solcher kann doch offenbar kein Grund für die Unwahrgenommenheit derselben sein, da sie ja, mögen sie noch so klein sein, in der Wahrnehmuug gegeben sind. Das Argument, das ich hiemit für die Wahrnehmbarkeit der unendlich kleinen Theile des wahrgenommenen Continuums vorbringe, wenn dasselbe wirklich Continuum wäre, ist dasselbe, das Berkley dafür und für die Wahrnembarkeit der einfachen Raumpunkte (minima sensibilia) gebraucht (vgl. Principles of human knowledge § 124). Und thatsächlich würde dasselbe auch für die Empfindungspunkte gelten, wenn es im Raume neben den realen Punkten nicht irreale Punkte geben würde, aber gerade der Mangel dieses Grundbegriffes der discreten Geometrie bei Berkeley ist der Grund (und dasselbe gilt für Hume, obgleich Hume nur in gewissen Fällen die Wahrnehmbarkeit des einfachen Empfindungspunktes behauptet), der ihn einerseits veranlasst jenes Argument falsch anzuwenden und andererseits daran verhindert, diese Geometrie zu entdecken.

letzten Bestandtheile des Raumes unwahrnehmbar sind ganz abgesehen davon ob der Raum aus einfachen oder aus in's Unendliche theilbaren resp. getheilten unendlich kleinen Theilen besteht,* so hängt es offenbar nur von rein logischen Gründen ab, ob man den Raum discret oder continuirlich fassen wird resp. ob man die Wahrnehmungsthatsachen der unmöglichen geometrischen Figuren für einfach oder für zusammengesetzt (selbstverständlich im logischen Sinne dieses Wortes) erklären wird — und logische Gründe sprechen für seine Discretheit. Wenn der Raum discret ist, dann lässt sich sehr wohl begreifen, warum er nicht als discret wahrgenommen wird und warum er in seinen einzelnen Partien auch discret wahrgenommen werden kann, während im Falle dass er continuirlich ist sowohl die Unwahrnehmbarkeit seiner unendlich kleinen Theile als auch die Thatsache der discreten Wahrnehmung seiner einzelnen Partien schlechthin unerklärbar bleibt (diese letztere Thatsache wäre nur unter der Voraussetzung der Dualität des Wahrnehmungsraumes und der in ihm gegebenen discreten Empfindungsmaterie erklärbar). Während also die Geometrie des Continuirlichen nicht im Stande ist, zwanglos und widerspruchslos zu erklären, warum wir die reine mathematische Gerade, den mathematischen Kreis etc. nicht wahrnehmen können, erklärt die Geometrie des Discreten alles dies in der zwanglosesten Art und Weise, indem sie dabei aber freilich auch viele wahrgenommene geometrische Gebilde ihrer geometrischen Natur entkleidet und für den blossen Schein der Wahrnehmung erklärt.

Am Ende dieser langen Untersuchungen über die geometrische Struktur des Raumes angelangt, bleibt uns nur noch eine Frage zu erheben übrig, die zwar mit den Grundlagen der diskreten Geometrie als solchen nicht in unmittelbarer Verbindung steht, die aber im Rahmen unserer Metaphysik absolut nicht umgangen werden kann. Wenn der Raum discret ist und wenn die räumliche Welt der Vielheit seit Ewigkeit besteht, *dann muss die Anzahl der einfachen Raumpunkte eine absolut bestimmte und unveränderliche sein*. Denn, wie wir in dem vorigen Kapitel bewiesen haben, die

* Wenn es nun feststeht (vgl. die vorige Anmerkung), dass im Falle dass der Wahrnehmungsraum wirklich continuirlich ist, die Wahrnehmung seiner unendlich kleinen Theile eine Notwendigkeit wäre, so ist daraus zu folgern, dass streng genommen für den Wahrnehmungsraum nicht behauptet werden könne, er werde als Continuum wahrgenommen, dass vielmehr für denselben nur gesagt werden kann, derselbe werde als lückenloser Raum wahrgenommen, ohne dass uns die Wahrnehmung darüber belehren würde ob er lückenloses Continuum oder lückenloses Discretum ist.

Veränderung in der Welt wie das zeitliche Werden überhaupt musste einen absoluten Anfang in der Ewigkeit gehabt haben, und da dies aus demselben Princip der Endlichkeit folgt aus dem auch die Discretion des Raumes folgt, so muss, wenn die Welt der Vielheit — die notwendigerweise als solche im Raume (man missverstehe diesen Ausdruck nicht) gegeben werden muss — auch vor dem Anfang der Veränderung bestanden hat, wenn sie nicht selbst zeitlich entstanden ist, notwendigerweise zeitlos seit Ewigkeit von der absoluten Substanz produciert worden sein, und da Zeitlosigkeit mit Unveränderlichkeit identisch ist, so muss die Anzahl der einfachen Raumpunkte jener zeitlosen Welt selbst eine absolut bestimmte und unveränderliche sein, sonst wäre die unveränderliche und in ihrer Existenz absolut notwendige Welt in einem ihrer wesentlichen Momente mit einer Zufälligkeit behaftet was jedoch unmöglich ist. Wenn die discrete endliche Vielheit ewig da ist, so muss sie also ein für allemal festbestimmt sein, die Anzahl ihrer letzten Theile muss eine absolut bestimmte sein; diese Consequenz wäre nur dann nicht notwendig wenn jene Welt der Vielheit selbst zeitlich entstanden wäre, denn in diesem Falle könnte, da ihre Existenz ganz zufällig wäre, auch die Anzahl ihrer letzten Theile eine ganz zufällige sein, d. h. es wäre zufällig, wie viel Theile sich von der absoluten Substanz bei der ersten Entstehung der vielheitlichen Welt abgelöst hätten um Bestandtheile dieser Welt zu werden.

Die Frage, die ich hiermit vorlege, ist völlig neu und scheint eine Ungeheuerlichkeit ersten Ranges zu sein. Zwar haben die Vertreter des Unendlichkeitsbegriffs hie und da den Vertretern der Endlichkeit gegenüber diese Unbestimmtheit der endlichen Anzahl der einfachen Raumpunkte als eine der Instanzen gegen die Möglichkeit des endlichen räumlichen Discretums erhoben, ihnen selbst schien aber die Sache so ungeheurlich, dass sie sie nicht ernst genug nahmen. Die Unbestimmtheit der Anzahl der letzten Raumtheile ist aber — was die Unendlichkeitsvertreter allerdings vergessen haben — nur dann gegen das Endlichkeitsprincip entscheidend, wenn der Raum seit Ewigkeit besteht, und nicht eine zeitliche Schöpfung darstellt; die Unbestimmtheit der Anzahl der letzten Raumtheile ist aber — was die Unendlichkeitsvertreter wiederum vergessen — gar nicht etwas so unmögliches, wie das — und zwar nicht bloss auf den ersten Blick erscheint. Denn nichts weniger und nichts mehr fordert die Bestimmtheit der Anzahl der einfachen Raumpunkte als dass es in der Reihe der natürlichen

Zahlen eine grösste endliche Zahl giebt, die in der Realität nicht überschritten werden könne, dass jeder gegebene reale Raum (und wir haben gesehen, dass viele ganz aussereinander bestehende Räume in der Wirklichkeit möglich sind) höchstens nur diese Zahl von Theilen enthalten kann, dass insbesondere der ewig bestehende Raum nur diese Zahl von Theilen enthalten kann. Und eine solche grösste endliche Zahl in der natürlichen Zahlenreihe scheint die unmöglichste Sache von der Welt zu sein: ist es doch nicht einleuchtend, dass, da jede endliche Zahl eine Synthesis von Zahleinheiten darstellt, dieselbe durch die Hinzufügung einer neuen Einheit vergrössert werden könne, und dass somit über jede endliche Zahl hinaus, mag sie noch so gross sein, eine grössere denkbar ist, dass die Reihe der endlichen Zahlen schlechthin unbestimmt ist, und dass, wenn der Versuch dieselbe im Unendlichen als bestimmt zu denken zu so heillosen Widersprüchen führt, destoweniger ein Versuch, dieselbe im Endlichen als bestimmt und abgeschlossen sich zu denken, auch nur im Entferntesten unternommen werden könnte.

So aussichtslos nun der Versuch, die endliche Zahlenreihe im Endlichen als abgeschlossen sich zu denken, auch erscheinen mag, so ganz hoffnungslos scheint er mir doch nicht zu sein, wenn man sich nur klar vergegenwärtigen will, was damit eigentlich gemeint ist. Wir haben — und das ist das Erste, was hervorzuheben ist — bei der Analyse des Zahlbegriffs gesehen, dass eine allgemeine Idee der natürlichen Zahlenreihe nicht besteht, dass vielmehr die räumliche Zahlreihe von der zeitlichen Zahlreihe streng zu unterscheiden ist, dass von der zeitlichen Zahlreihe allein die absolute Unbestimmtheit behauptet werden kann, dass die räumliche Zahlreihe dagegen als solche stets bestimmt ist. Nun freilich ist diese Bestimmtheit nicht so ohne weiters in dem Sinne zu verstehen, dass der Raum in der Anzahl seiner Theile überhaupt unvermehrbar ist, wir können uns ganz wohl auch die Anzahl der räumlichen Theile vergrössert denken, nur geschieht diese Vergrösserung allerdings in der Zeit, so dass der Raum als solcher begrifflich stets streng bestimmt endlich ist. Und dieses letztere ist die Hauptsache, die bestimmte Endlichkeit der Raumreihe macht jene Deduction der grössten endlichen Zahl der letzten Theile im Raume *im Princip* ganz wohl möglich, da der Raum, sobald er und insofern er unveränderlich ist, stets bestimmt endlich ist, so dass, wenn der Raum ursprünglich gegeben ist d. h. seit Ewigkeit besteht, derselbe ganz wohl der Anzahl seiner letzten Theile nach ganz bestimmt sein müsse. Weit entfernt also davon, dass jene grösste endliche Zahl

der letzten Raumtheile im Princip unmöglich ist, ist sie vielmehr principiell ganz wohl möglich, sobald man die räumliche Zahlreihe von der zeitlichen Zahlreihe streng unterscheidet, und nicht beide in einer allgemeinen abstrakten Idee der Zahlreihe vermengt, wobei dann allerdings jene grösste endliche Zahl absolut unmöglich zu sein scheint.

Ich begnüge mich hier durchaus mit dieser Feststellung der principiellen Möglichkeit der grössten endlichen Zahl in der räumlichen Zahlreihe, ohne die Deduction derselben selbst zu unternehmen, denn sie steht mit dem letzten Wesen des Werdens in seiner zeitlichen und zeitloser Form in engster Beziehung, so dass ich den Versuch einer solchen Deduction erst in dem dritten Abschnitte der Ontologie machen werde. Ich will aber noch einige Momente hervorheben, die geignet sind, jene Deduction auch im Einzelnen als möglich erscheinen zu lassen. Zunächst ist principiell ganz wohl möglich, dass von allen den endlichen Zahlen, die in abstrakto denkbar sind, nicht alle gleicher Weise im Raume realisierbar sind, ganz ebenso wie etwa von allen den unendlich vielen in abstrakto möglichen geometrischen Figuren nur eine ganz beschränkte Zahl als möglich zurückbleibt nachdem man das Princip der Discretion an dieselben angelegt hat. Wie also in der Geometrie das strenge Princip der Endlichkeit viele formell mögliche Formen reell unmöglich gemacht hat, ebenso ist es ganz wohl möglich, dass dasselbe Princip auch unter den Zahlen viele „aussiebt" die reell unmöglich sind. Da aber das Endlichkeitsprincip im Wesentlichen das Zahlprincip selbst ist, so muss in Bezug auf die Zahl das Endlichkeitsprincip besonders determiniert werden, damit man vermittelst desselben diese Aussiebung der Zahlen vornehmen könne. Dass solche Determinationen wirklich bestehen will ich nur an einem Beispiele zeigen, ohne näher daran einzugehen: der Unterschied der geraden und der ungeraden Zahlen ist sicherlich eine solche Determination, da ja dieser Unterschied von so grundlegender Bedeutung für die Eigenschaften der Zahlen ist, und in demselben ist in erster Reihe der Unterschied der unbestimmten und der bestimmten endlichen Zahlenreihe zu suchen, was übrigens schon die alten Pythagoreer eingesehen haben. Es ist selbstverständlich, dass jene Deduction durchaus auf den Ergebnissen der Zahlentheorie beruhen muss, und auf die Weise wird diese Wissenschaft, die bisher in der Mathematik eine höchst untergeordnete Rolle gespielt hat und geradezu als Stiefkind behandelt worden ist, plötzlich von allerhöchster Bedeutung für unsere gesammte Erkenntniss, indem sie berufen ist, einen Knotenpunkt unserer Erkenntniss zu lösen.

Wie es nun mit dieser Deduction der grössten endlichen Zahl im Raume (denn von einer solchen in der Zeit kann keine Rede sein) auch bestellt sein möge, ich muss am Ende noch einmal mit allem Nachdruck betonen, dass von ihrer Möglichkeit die Möglichkeit der discreten Geometrie schliesslich nicht im geringsten abhängig ist, sondern nur die metaphysische Behauptung von der Ewigkeit der (unveränderlichen) Welt. Denn obgleich der Raum seinem Begriffe nach bestimmt endlich ist, so hindert doch gar nichts vorauszusetzen, dass die absolute Substanz den Raum von irgend einer Anzahl der Punkte hervorgebracht hat, wobei sie dann weiter fähig ist, diese Zahl seiner Punkte immer weiter zu vermehren, denn in dem Falle bleibt ja jede in einem bestimmten Augenblicke producierte Punktenmenge ein Raum für sich, der als solcher völlig unabhängig von dem Raume des nächsten Augenblicks ist, wie wir dies früher ausgeführt haben. Ausserdem hindert es nichts vorauszusetzen, dass die absolute Substanz die Welt sowohl in der unausgebreiteten als in der ausgebreiteten Raumform hervorbringen könne, da beide gleichermaassen begrifflich möglich sind, und wenn die Welt der Vielheit keine ursprüngliche Notwendigkeit der Wirklichkeit darstellt auch die unausgebreitete Raumform ihre Eindeutigkeit der ausgebreiteten gegenüber verliert, da die Zahl der Raumpunkte (resp. der Weltatome) nicht mehr konstant ist, die unausgebreitete Raumform wird dann also nur eine neben den ausgebreiteten bestehende Raumform und nimmt keine Ausnahmsstellung unter ihnen mehr ein. Die discrete Geometrie hängt also von der Bestimmung der grössten endlichen Zahl in der Raumreihe gar nicht ab, nur die Ewigkeit der vielheitlichen Welt ist damit in Frage gestellt. Wenn es nun metaphysische Gründe giebt, die die Ewigkeit der Welt zu einer unzweifelhaften Thatsache machen, dann muss jene grösste endliche Zahl eine begriffliche Notwendigkeit darstellen und umgekehrt, wenn es möglich sein sollte, die Notwendigkeit der grössten endlichen Zahl aus dem Begriffe der Zahl selbst zu deducieren, dann wäre damit auch die metaphysische Voraussetzung der ewigen Welt unzweifelhaft. Nun glaube ich allerdings durch genügend starke Gründe diese Voraussetzung festgestellt zu haben, erst aber in dem nächsten Abschnitt werden wir im Stande sein, dieselbe von den letzten Schwierigkeiten, die ihr, auch rein metaphysisch betrachtet, anhaften, zu befreien und sie so endgiltig festzustellen, und wenn sie sich als eine unumgänglich notwendige metaphysische Voraussetzung herausstellen wird, dann muss auch die Deduction der grössten endlichen Zahl möglich sein, sonst wäre eine Antinomie

in dem allgemeinen Begriffe der Welt vorhanden, die doch unmöglich ist. Sollten aber alle Versuche, die grösste endliche Zahl zu deducieren, fehlschlagen — und solche Versuche werden vielleicht äusserst schwierig sein, da die Zahlentheorie eine noch so unvollkommene Wissenschaft ist, und auf dieselbe kommt es doch dabei in erster Reihe an — dann muss jene metaphysische Voraussetzung fallen gelassen werden, denn wenn man sie nicht fallen liesse, dann müsste etwas viel höheres unzweifelhafteres und begrifflich werthvolleres (ich sage begrifflich werthvolleres, denn vom Standpunkte des Gemüths aus ist jene erste Annahme viel werthvoller) fallen gelassen werden, und das ist die discrete Geometrie.* Mit ihrem Fallenlassen aber würden wir wieder in jenes begriffliche Dunkel eintreten, aus dem weder die Mathematik noch die Metaphysik Klarheit zu gewinnen vermag, und das ist die continuirliche Geometrie. Man sieht hieraus, von was für fundamentaler Bedeutung für unsere Erkenntniss die hier vorgelegte Frage ist, die auf den ersten Blick nur als ein reiner metaphysischer Aberwitz erschien.

Drittes Kapitel.

Über die Bewegung.

Bewegung wird seit eher als Änderung des Ortes definiert, und nicht diese Definition wird in Zweifel gesetzt, wenn die Wirklichkeit der Bewegung in Zweifel gesetzt wird, sondern es wird eben das in ihr Ausgedrückte in Zweifel gesetzt. Ihrer Definition nach setzt demnach die Bewegung sowohl die Zeit wie den Raum voraus: als Veränderung ist die Bewegung in der Zeit, als Ortsveränderung ist sie im Raume, da der Ort eben im Raume ist. Freilich ist die Bewegung als Veränderung ganz und voll in der Zeit, nur das was verändert wird, was bewegt wird, ist in dem Raume, so dass der Unterschied zwischen der Veränderung als Bewegung und der Veränderung die nicht Bewegung ist nicht nur in ihrem Object zu suchen ist, sondern derselbe in der Veränderung als

* Und wenn nur etwas damit der Sache geholfen wäre! Denn mit dem Aufgeben der discreten Geometrie würde man ja der grössten endlichen Zahl nicht loswerden. Die continuirliche Geometrie setzt einerseits den leeren absolut continuirlichen Raum und andererseits die discrete aus unendlich vielen Theilen bestehende Materie voraus. Jener erste enthielte zwar die grösste endliche Zahl nicht, da er ja die Zahl überhaupt nicht enthält, diese zweite würde aber die unendliche Zahl enthalten und diese enthält ja die grösste endliche Zahl als ihren Bestandtheil notwendigerweise (vgl. S. 218).

solcher selbst liegen muss. Freilich ist dies nicht so zu verstehen, dass die Veränderung als solche, als Veränderungsact, in dem einen Falle gleichsam eine andere Qualität habe als in dem anderen, sondern so, dass es besondere Bedingungen geben müsse, die die Veränderung das eine Mal zwingen, ihr Object vollständig aufzuheben und das andere Mal bloss dessen Lage zu anderen Objecten zu verändern. Diesen Unterschied zwischen der qualitativen und der Ortsänderung können wir in dem Anfang unserer Untersuchung über die Bewegung nicht angeben, wir müssen vielmehr zunächst die Existenz der Bewegung, die so oft in Zweifel gesetzt worden ist, feststellen und erst nachdem wir dann auch die specielle Natur derselben festgestellt haben, werden wir in der Lage sein, jenes allgemeine Wesen der Bewegung im Unterschied von der qualitativen Veränderung festzustellen.

Ist die Bewegung ein wirklicher Vorgang in den Dingen, d. h. ob wirklich eine Ortsveränderung der Dinge geschieht? Diese Frage über die Wirklichkeit der Bewegung ist von den ähnlichen Fragen über die objektive Existenz des Raumes und der Zeit streng zu unterscheiden, da es auf den ersten Blück scheint dass, da Bewegung sowohl die Zeit wie den Raum voraussetzt, ihre Wirklichkeit von der Wirklichkeit dieser letzteren abhängt. Dem ist aber nicht so. Mag der Raum objectiv reell oder subjectiv ideell sein, mag er, wenn er objectiv reell ist, ein leeres Wesen sein oder mit dem realen Seinsinhalte als dessen Ordnungsform zusammenfallen (und dasselbe gilt für die Zeit), in jedem Falle kann die Frage nach der Wirklichkeit der Bewegung erhoben werden. Wenn man die Wirklichkeit der Bewegung bezweifelt, dann bezweifelt man damit nicht die Wirklichkeit der Zeit und des Raumes, in denen die Bewegung geschieht, sondern man bezweifelt die Möglichkeit der Bewegung als eines wirklichen Vorganges an einem bewegten Objecte, indem man einen klaren Unterschied zwischen Bewegung und Ruhe nicht anzugeben vermag, indem man diesen Unterschied für einen rein relativen erklärt. Dieser Begriff der Relativität der Bewegung soll zunächst nicht bedeuten, dass, wenn sich ein Object bewegt, dabei schlechthin gar nichts in reellem Sinne dieses Wortes geschieht, jede Bewegung bedeutet ja eine räumliche Relationsänderung zweier Objecte und nicht die Wirklichkeit dieser räumlichen Relationsänderung wird in Zweifel gesetzt, sondern es wird nur in Zweifel gesetzt, welchem von den beiden Objecten dieselbe zuzuschreiben ist, man ist eben im Unklaren darüber, welches Object als das bewegte und welches als das ruhende zu betrachten ist.

Wenn sich zwei materielle Punkte A und B (denn schliesslich sind es diese die sich bewegen, da aus ihnen die Objecte bestehen) in gerader Linie aufeinander zu bewegen d. h. sich nähern resp. sich voneinander entfernen, dann kann dieselbe Entfernungsänderung hervorgebracht werden, sowohl wenn sich der Punkt A bewegt und der Punkt B ruht als auch wenn umgekehrt der Punkt A ruht und der Punkt B sich bewegt, als auch wenn sich beide Punkte bewegen. Wie man also sieht, kann eine und dieselbe räumliche Relationsänderung auf dreifache Weise hervorgebracht werden, so dass man dann völlig im Unklaren darüber ist, welcher Punkt als der ruhende und welcher als der bewegte zu betrachten ist, und man gelangt so zu der seltsamen Behauptung, dass Bewegung und Ruhe rein relative Zustände sind, dass jedes Object sowohl als ruhend als als bewegt betrachtet werden kann, dass jene räumliche Relationsänderung ein rein äusserliches Verhältniss an den Dingen ist, dass keinem Dinge als solchem ursprünglich Bewegung und Ruhe als voneinander streng unterschiedene Zustände angehören.

Diese Behauptung von der Relativität der Bewegung und der Ruhe enthält nun schwere innere Widersprüche und schwere innere Missverständnisse. Dieselbe ist für einen kritischen Verstand, der klare Begriffe fordert, eine Ungeheuerlichkeit ersten Ranges und es ist nur zu verwundern wie man solche unmögliche Behauptungen mit einem beispiellosen Leichtsinn als wissenschaftliche Wahrheiten proklamieren kann. Mögen die Schwierigkeiten der Feststellung eines genauen Unterschiedes der Bewegung von der Ruhe noch so gross sein, niemals darf man daraus diese offenbar unrichtige Behauptung als Schluss ziehen. Denn zu behaupten, dass die räumliche Relationsänderung als solche ein wirklicher Vorgang ist — und niemand hat noch dieselbe in Zweifel gesetzt, denn man geht ja von der Thatsache derselben aus, um auf die Relativität der Bewegung zu schliessen — dass aber dabei weder das eine noch das andere Object als ursprünglich bewegt oder ruhend zu betrachten ist, ist offenbar so unrichtig wie nur möglich. Denn jene räumliche Relationsänderung ist doch eine Relationsänderung der beiden Objecte und nicht etwas was zwischen den beiden gleichsam in der Luft schwebte, ohne sie selbst als solche anzugehen, die Objecte selbst als solche sind es, die sich einander nähern oder voneinander entfernen, so dass die Wirklichkeit dieser ihrer Annäherung oder ihres Sich-Entfernens von ihnen selbst bewirkt wird, sie selbst sind es, die sich bewegen resp. ruhen. Es ist doch ein offenkundiger Widerspruch, die Wirklichkeit der räumlichen Relationsänderung, die durch die

Bewegung bewirkt wird, zu behaupten und die Wirklichkeit der Bewegung selbst zu läugnen, was in dem Falle geschieht, wenn man keinen absoluten Unterschied zwischen Bewegung und Ruhe zulässt. Wenn dem nun so ist — und ich weiss nicht wie man so einfache Wahrheiten übersehen kann — dann muss ein realer Unterschied zwischen Bewegung und Ruhe bestehen, es muss in der Wirklichkeit streng der Fall, wenn dieses eine Object sich bewegt und das andere ruht, von den beiden anderen Fällen unterschieden sein, die Bewegung und die Ruhe müssen ursprüngliche den Objecten selbst angehörende Zustände sein.

Und thatsächlich sobald wir näher jene drei Fälle der räumlichen Relationsänderung zweier Punkte betrachten, werden wir leicht objective Merkmale entdecken können, die die Bewegung des einen Punktes von der Ruhe resp. der Bewegung des anderen Punktes unterscheiden. Wenn sich in jenem oben angeführten Beispiele ein Punkt bewegt, so ist die Richtung seiner Bewegung stets der Richtung der Bewegung des anderen Punktes entgegengesetzt, wenn der eine der beiden Punkte dabei ruht. Bewegt sich dabei aber auch der andere Punkt, dann kann diese Bewegung in derselben oder in der entgegengesetzten Richtung erfolgen und man kann dann — selbstverständlich unter der allgemeinen Voraussetzung, die auch für den ersten Fall gilt dass die räumliche Relationsänderung eine und dieselbe ist — klar angeben, ob sich wirklich beide Punkte bewegen: haben die beiden Punkte gleiche Geschwindigkeit dann müssen sie sich in entgegengesetzter Richtung bewegen, bewegen sie sich aber in gleicher Richtung, dann müssen sie verschiedene Geschwindigkeit haben, um in beiden Fällen die gleiche räumliche Relationsänderung zu bewirken. Wie man also sieht, bestehen wirklich objective in der Bewegung selbst liegende Merkmale — Richtung und Geschwindigkeit — die den bewegten Punkt von dem ruhenden unterscheiden und die klar bestimmen, welcher von den beiden Punkten als der bewegte und welcher als der ruhende und ob der eine als ruhender (denn sind beide ruhend dann geschieht eben keine räumliche Relationsänderung* mehr) zu betrachten ist.

Dass man nun jenen kardinalen Widerspruch, der in dem Begriffe der rein relativen Bewegung liegt, nicht einzusehen vermag, und dass man diese objectiven Merkmale, die den Bewegungszustand

* Es geschieht auch keine räumliche Relationsänderung, wenn sich beide mit gleicher Geschwindigkeit und in gleicher Richtung bewegen; dieser Fall unterscheidet sich von dem obigen, in dem beide Punkte ruhen, offenbar dadurch, dass dabei beide Punkte Geschwindigkeit haben, die ihnen wenn sie ruhen fehlt.

ıes materiellen Punktes von seinem Ruhezustande unterscheiden, ıd die somit vollkommen genügen jenen kardinalen Widerspruch ufzuheben, nicht berücksichtigt, liegt an den mannigfachen Missverständnissen, die einerseits den Begriff der relativen Bewegung, der in einem gewissen Sinne ein ganz richtiger Begriff ist, und andererseits unsere subjective Wahrnehmung der objectiven Bewegungen betreffen, und wir wollen nunmehr näher diese Missverständnisse darlegen und ihre Nichtberechtigung nachweisen.

Bewegung und Ruhe sind unzweifelhaft in einem gewissen Sinne relative Begriffe. Erstens sind sie dies in ganz allgemeinem Sinne dieses Ausdrucks, in eben demselben Sinne in dem etwa Weiss und Schwarz, Lust und Unlust etc. also alle die sogenannten Gegensatzbegriffe relative Begriffe sind. Ruhe und Bewegung stehen nämlich in einem positiv-contradictorischen Verhältniss zueinander, die Ruhe lässt sich nur als der der Bewegung und die Bewegung nur als der der Ruhe entgegengesetzte Zustand denken, so etwa wie sich das Schwarze nur als Gegensatz des Weissen et vice versa und die Lust nur als Gegensatz der Unlust et vice versa denken lässt. In diesem ersten Sinne sind Ruhe und Bewegung relative Begriffe insofern inwiefern sie relationsartige Begriffe sind, aber aus diesem ihrem Relationsverhältniss lässt sich offenbar jene Relativität der Bewegung, die den Unterschied der Bewegung und der Ruhe aufhebt, gar nicht deducieren, denn dann müsste mit demselben Rechte der reale Unterschied von weiss und schwarz, Lust und Unlust bezweifelt werden. Aber in einem anderen viel engeren Sinne noch sind Ruhe und Bewegung zwei voneinander abhängige Zustände. Denken wir uns nämlich einen einzigen völlig einsamen materiellen Punkt in der Wirklichkeit, so kann nur dann diesem Punkte die Bewegung zugeschrieben werden, wenn es irgend etwas giebt, was dabei ruhig bleibt und in Bezug auf welches der einsame Punkt seine Relation ändert und da dies nicht etwa der leere Raum sein kann, weil ein solcher nicht möglich ist, so kann es nur ein anderer materieller Punkt sein. Die Bewegung ist also unzweifelhaft auch in dem Sinne ein relativer Begriff, dass ein bewegtes Object sich nur zusammen mit einem ruhenden denken lässt und dass die Bewegung allen und jeden Sinne verliert, wenn die Ruhe nicht als wirklich vorhanden vorausgesetzt wird. Und dieses Verhältniss der Ruhe zur Bewegung ist etwas was in dem Verhältnisse jener einander entgegengesetzten Qualitäten nicht vorkommt, denn die Existenz des Schwarzen ist nicht von der Existenz des Weissen so abhängig, dass stets wenn das Weisse im Bewusstsein

gegeben ist auch das Schwarze darin vorkommt, und dasselbe gilt für Lust und Unlust, während die Bewegung eines reellen Punktes stets von der Ruhe eines anderen abhängig ist.

Während nun aus jener ersten Relation der Bewegung zur Ruhe auf einen rein relativen Unterschied zwischen beiden nicht geschlossen werden konnte, ist es gerade diese zweite Relation auf Grund deren dieser Schluss gezogen wird. Wenn sich die Bewegung eines materiellen Punktes ohne die Ruhe eines anderen materiellen Punktes nicht denken lässt, dann ist eben die Unbestimmtheit, welcher von den beiden als der ruhende und welcher als der bewegte zu betrachten ist, dasjenige was uns zu jenem Schlusse berechtigen soll. Wir haben nun nachgewiesen, dass die Unbestimmtheit gar nicht so gross ist wie sie auf den ersten Blick zu sein scheint, dass es objective Merkmale giebt, die die Bewegung von der Ruhe klar unterscheiden lassen. Dass man dies nun nicht einzusehen vermag, rührt schliesslich nur von einer anderen Verwechselung her, einer Verwechselung, die naheliegend ist, die aber auch leicht aufhebbar ist. Man verwechselt dabei nämlich die objective Bewegung, die als solche durch jene Merkmale vollständig eindeutig bestimmt ist, mit unserer Wahrnehmung derselben, ohne zu bedenken, dass unsere Wahrnehmung nicht die objectiven Dinge als solche enthält. Wie ich in dem ersten Kapitel des ersten Abschnittes ausgeführt habe, ist der Schein der Wahrnehmung auf eine Incongruenz derselben mit den äusseren Objecten zurückzuführen, dass aber sowohl die Wahrnehmung für sich wie die realen Objecte für sich nichts scheinbares in sich enthalten. Und dasselbe gilt auch in Bezug auf die Bewegung. Für meine subjective Wahrnehmung mag es, wenn ich zwei die räumliche Entfernung unter einander ändernde Objecte wahrnehme, ganz gleichgültig sein, welches von den beiden als das bewegte und welches als das ruhende in der Wahrnehmung erscheinen wird, für sie selbst ist das aber gar nicht gleichgültig, das eine von beiden ist ruhend und das andere ist bewegt. Ich kann, wenn ich auf dem Schiff dem Ufer entlang fahre, bald das Schiff bald das Ufer als bewegt resp. ruhend wahrnehmen, daraus folgt aber gar nicht, dass es auch objectiv und an sich ganz gleichgültig ist, welches von beiden als bewegt und welches als ruhend zu betrachten ist. Wenn ich in meiner Wahrnehmung wahrnehme, dass sich das Schiff bewegt und das Ufer stehen bleibt, so ist diese meine Wahrnehmung in dem Augenblicke als Wahrnehmung durchaus richtig und nichts scheinbares; und dasselbe gilt für den anderen

Fall, wenn ich das Ufer als bewegt und das Schiff als ruhend wahrnehme. Meine Wahrnehmung fällt aber nicht mit den äusseren Dingen als solchen zusammen, und die eine von jenen beiden Wahrnehmungsthatsachen muss in Bezug auf diese äusseren Objecte offenbar unrichtig sein, in den Objecten selbst als solchen kann Bewegung und Ruhe nicht so schnell wechseln, wie das für jene Wahrnehmungsobjecte gilt. Scheidet man die Wahrnehmungsobjecte streng von den äusseren Objecten, dann hat man weder Veranlassung eine Relativität der Bewegung und der Ruhe in Bezug auf die Wahrnehmungsobjecte noch eine solche in Bezug auf die äusseren Objecte zu behaupten.

Im Anschluss an diese Ausführungen von der Abhängigkeit der Bewegung von der Ruhe, wollen wir näher das Verhältniss des sich bewegenden zu dem ruhenden Punkte bestimmen. In unserem obigen Beispiele war nur von zwei materiellen Punkten die Rede, von denen der eine als bewegt und der andere als ruhend vorausgesetzt wurde. Es ist nun zu fragen, ob wirklich eine Bewegung unter der Voraussetzung von nur zwei Punkten möglich ist, und auf diese Frage lässt sich die Antwort leicht dahin geben, dass eine solche offenbar unmöglich ist. Dieselbe wäre nur dann möglich, wenn ein leerer Raum da wäre, in dem jene zwei Punkte gegeben wären: dann aber könnte auch ein einziger Punkt gegeben sein, denn der leere Raum als solcher wäre in diesem Falle durch seine unbeweglichen Orte dasjenige was jener eine unbewegte Punkt für den sich bewegenden Punkt ist, er würde eben das Ruhende und Unbewegliche repräsentieren. Ist der leere Raum unmöglich, dann müssen wir offenbar eine ganze Vielheit von materiellen Punkten voraussetzen, damit die Bewegung jenes einen Punktes ermöglicht werde. Denn damit sich der eine Punkt von dem anderen Punkte entfernen könne ist es durchaus notwendig, dass eine Vielheit von Orten da ist, die der sich entfernende Punkt passieren könne, und da der leere Raum eben unmöglich ist, so müssen diese Orte durch reale Punkte erfüllt sein resp. gesetzt werden, d. h. es muss eine Vielheit von realen den realen Raum setzenden Punkten existieren. Wäre der leere Raum möglich, dann wäre, wie oben gesagt, auch die Bewegung eines einzigen materiellen Punktes möglich, denn einerseits repräsentierten die unbeweglichen Orte dieses leeren Raumes (nach den Feststellungen Newton's) die notwendig vorauszusetzende Ruhe und andererseits ist in demselben eo ipso eine Vielheit von Orten gegeben. Bei dem realen Raume nun ist wohl die Vielheit von Orten eo ipso gegeben, aber diese Orte sind als durch reale Punkte

gesetzt nicht unbeweglich, und es fragt sich nun, wie in diesem Falle jene notwendig vorauszusetzende Ruhe zu denken ist. Dass es nun in diesem realen Raume, wenn die Bewegung eines materiellen Punktes in demselben stattfinden soll, notwendigerweise unbewegte reale Punkte, die durch ihre Unbeweglichkeit die Orte und damit den Raum selbst fixieren, geben müsse, ist unzweifelhaft. Denn wollten wir voraussetzen, dass sich in einem und demselben Augenblicke alle realen Punkte in dem realen Raume bewegen können, so hiesse das offenbar, dass der Raum selbst in dem Augenblicke aufgehoben werde; mag dann in dem nächsten Augenblicke wiederum ein Raum gesetzt werden — was unzweifelhaft geschehen kann — so wird doch der gesetzte Raume ein ganz neuer von dem Raume des vorigen Augenblicks toto genere verschiedener sein, unter ihnen bestände keine Gemeinschaft und von einer Bewegung der materiellen Punkte könnte keine Rede sein. Von Bewegung kann nur gesprochen werden, wenn der Raum, in dem die Bewegung geschieht, ein und derselbe ist und bleibt, und es ist nur zu fragen, wann und wie diese Einheit des Raumes, wenn der Raum real ist, möglich ist. Auf diese Frage können wir nun hier noch keine specialisierte Antwort geben, wir können nur soviel feststellen, dass jene Identität des Raumes auch dann gewährleistet ist, wenn in den zwei aufeinanderfolgenden Zeitaugenblicken, in denen die Bewegung geschieht, wenigstens ein realer Punkt in dem Raume unbeweglich bleibt, ohne dass es nöthig wäre, dass dann in dem nächsten Augenblicke der Bewegung es derselbe Punkt ist, der konstant bleibt. Unzweifelhaft ist nur soviel, dass der Raum identisch in der Zeit bleiben müsse, wenn Bewegung in demselben möglich sein solle, und diese Identität ist nur dann gewährleistet, wenn in demselben wenigstens je ein Punkt in einem Bewegungsaugenblicke konstant bleibt. Ob dies nun immer ein und derselbe Punkt ist, ob es ein Punkt ist oder ein ganzes System von Punkten, ob dieses Punktensystem in dem Centrum oder an der Peripherie der Welt vorhanden ist oder irgendwo in der Mitte, alle diese Fragen sind specieller Natur, und man wird auf dieselben nur dann Antwort geben können, wenn uns die innere Struktur der Weltmonaden, die jenen leeren Raum constituieren, bekannt sein wird, was erst in dem zweiten Unterabschnitt dieses Abschnittes geschehen wird, hier begnügen wir uns mit jener allgemeinen Feststellung, dass in dem realen Raume stets wenigstens ein Punkt in der Ruhe sich befinden müsse, wenn Bewegung der übrigen möglich sein solle.

Eine auf den ersten Blick ganz andere in Wahrheit aber mit

dieser Feststellung des einen ruhenden Punktes in unmittelbarer Verbindung stehende Frage, die sich darauf bezieht, ob der ruhende Punkt, der die Bewegung des sich bewegenden Punktes räumlich bedingt, in unmittelbarer räumlicher Nähe zu diesem sich befinden müsse oder nicht, kann ganz wohl auch hier beantwortet werden. Bekanntlich ist es eine der grössten Schwierigkeiten für diejenigen die den Raum mit der Materie identificieren, seit jeher gewesen, eine genaue Definition des Ortes, den die Bewegung verlässt resp. einnimmt, aufzustellen. So hat Descartes bekanntlich den Ort, etwas abweichend von der bekannten Definition des Aristoteles, als die Gränzfläche eines Körpers in Bezug auf die ihn umgebenden Körper definiert, und die Bewegung als die Entfernung eines Körpers aus der Nachbarschaft der ihn umgebenden (resp. unmittelbar berührenden) Körper, die dabei in Ruhe bleiben sollen (vgl. Principia philosophiae, Pars II, 10—13 und 25). Dass nun, wenn sich der eine materielle Punkt bewegen soll, die ihn unmittelbar berührenden Punkte dabei in Ruhe bleiben müssen, diese Behauptung könnte nur auf Grund eines Missverständnisses der oben festgestellten Notwendigkeit, dass jede Bewegung räumlich die Ruhe voraussetzt, aufgestellt werden. Der Ort eines materiellen Punktes ist einerseits durch diesen Punkt selbst als solchen insofern bestimmt, inwiefern dabei eben der Punkt den Ort im Raume repräsentiert; die Lage oder die Stellung dieses Punktes in dem gesammten Raume ist aber allerdings durch andere Punkte bestimmt (auch Descartes macht a. a. O. diesen Unterschied, indem er den „inneren“ und den „äusseren“ Ort unterscheidet) aber nicht nur durch die unmittelbar umgebenden Punkte, sondern durch alle Punkte überhaupt, die den Raum constituieren, so dass, wenn bei der Bewegung eines materiellen Punktes die ihn unmittelbar umgebenden Punkte ruhig bleiben müssten, dann mit demselben Rechte auch alle übrigen Punkte im Raume ruhig bleiben müssten. Ist aber die Lage eines materiellen Punktes durch die Lage aller übrigen Punkte im Raume bestimmt, so ist umgekehrt auch die Lage aller anderen Punkte durch den einen Punkt bestimmt, was sobald eingesehen wird, sobald man sich den Raum wirklich als aus Punkten zusammengesetzt denkt, sobald derselbe wirklich discret ist, man sieht dann eben ein dass, wenn nur ein Punkt als feststehend gegeben ist, die Stelle auch aller anderen Punkte dabei in völlig eindeutiger Weise bestimmt ist, so dass die Ruhe nur eines einzigen Punktes genügt, damit der Raum da ist und mit ihm die Bewegung aller übrigen Punkte.

Nachdem wir so die Wirklichkeit der Bewegung (die Wirk-

lichkeit der Bewegung als solcher im Unterschied von der qualitativen Veränderung haben wir in dem letzten Kapitel des ersten Abschnitts genugsam festgestellt, und brauchen nicht mehr darauf zurückzukommen) und die Abhängigkeit der Bewegung von der Ruhe im Raume festgestellt haben, kommen wir nunmehr zu dem zweiten Bestandstücke der Bewegung, seiner Beziehung zu der Zeit, wir wollen nunmehr die Abhängigkeit der Bewegung von der Ruhe auch in zeitlicher Hinsicht feststellen. Ob die Bewegung continuirlich oder discret ist, das ist die Frage, die wir nunmehr zu erledigen haben. Es ist nun offenbar, dass die Continuität resp. die Discretheit der Bewegung von der Continuität resp. der Discretheit des Raumes und der Zeit abhängt. Sind Raum und Zeit continuirlich, dann muss auch die Bewegung continuirlich sein, sind sie discret dann ist auch die Bewegung discret, und zwar ist es in erster Reihe nur die Discretheit der Zeit, von der die Discretheit der Bewegung abhängt, während die Discretheit des Raumes nur indirekt die Discretheit der Bewegung bedingt. Was bedeutet aber die Discretion bei der Bewegung? Nicht mehr und nicht weniger, als dass die Bewegung von der Ruhe fortwährend unterbrochen wird und dass eine Bewegung, die längere Zeit hindurch dauert (sich nicht auf einen einzigen Bewegungsaugenblick beschränkt) die Ruhe als integrierenden Bestandtheil in sich enthält. Diese Discretion der Bewegung folgt nun unmittelbar aus der Discretion der Zeit. Die Zeit besteht, wie wir in dem ersten Kapitel dieses Unterabschnittes gesehen haben, aus den erfüllten zeitlosen Gegenwarts- und den unerfüllten zeitlichen Veränderungsaugenblicken: dem erfüllten zeitlosen Augenblicke der Zeit entspricht nun bei der Bewegung das Moment der Ruhe und dem unerfüllten das Moment der Bewegung im engeren Sinne d. h. der Bewegungsact als solcher. Bei der qualitativen Veränderung entspricht dem erfüllten Augenblicke die Existenz eines Objectes als solche, dem unerfüllten das Entstehen resp. das Vergehen desselben; dem entsprechend nun entspricht bei der Ortsänderung dem unerfüllten Zeitaugenblicke die Existenz eines Objectes (resp. eines materiellen Punktes) an einem Orte, dem unerfüllten das Setzen desselben an einen Ort resp. das Aufheben desselben von einem Orte. Da nun die Ruhe nichts anderes ist als das Bestehen eines materiellen Punktes an einem Orte, so lässt sich offenbar die Bewegung ohne die Ruhe ebensowenig denken, wie sich die Zeit ohne erfüllte Gegenwartsaugenblicke denken lässt. Uebrigens kann auf die Discretheit der Bewegung auch direkt aus demselben Grunde geschlossen werden, aus dem auch auf die

Discretheit der Zeit geschlossen werden kann (vgl. s. 135), aus der notwendigen Discontinuirlichkeit der Veränderung, denn Bewegung als Veränderung muss offenbar aus einfachen absolut untheilbaren Bewegungsacten bestehen, und dasjenige was diese einfachen Bewegungsacte voneinander trennt muss selbst einfach sein und das sind die Ruheacte.

Dass die Bewegung discreter Natur ist, ist auch indirekt bestätigt, indem sich nachweisen lässt, dass die empirisch gegebene Verschiedenheit der Bewegungsgeschwindigkeiten sich nicht erklären lässt, wenn die Bewegung continuirlich ist. Der hier darzulegende Beweis ist rein empirischer Natur, denn rein abstrakt genommen drückt die Bewegung nur die Änderung des Ortes aus, ohne irgend etwas darüber auszusagen ob diese Änderung selbst in verschiedener Weise erfolgen könne (ohne in sich selbst das Moment der Geschwindigkeit zu enthalten). Es hängt vielmehr durchaus von der Natur des Raumes und der Zeit ab, ob die Geschwindigkeit der Bewegung eine verschiedene sein könne oder nicht. Wenn wir nun nachweisen, dass die Continuität des Raumes und der Zeit die Verschiedenheif der Bewegungsgeschwindigkeit vollkommen ausschliesst, dann werden die betreffenden Erfahrungsthatsachen offenbar einen entscheidenden empirischen Bestätigungsgrund für die Discretheit der Bewegung ausmachen, selbstverständlich unter der Voraussetzung, dass dieselben aus der Discretheit der Bewegung folgen.

Ist nun eine Verschiedenheit der Bewegungsgeschwindigkeit bei der vorausgesetzten Continuität des Raumes und der Zeit möglich? Auf diese Frage antworten wir mit einem entschiedenen Nein. Es sind offenbar bei der Discussion dieser Frage zwei Fälle zu unterscheiden gemäss den beiden Haupttheorien vom Raume und der Zeit, d. h. es ist der Fall wo Raum und Zeit als selbstständige neben den Dingen bestehende Wesen betrachtet werden (Newton und Kant) von dem Fall wo sie als blosse Ordnungsformen der Dinge betrachtet werden (Aristoteles ist der erste bewusste Vertreter dieser Ansicht) zu unterscheiden. Zwei Gesichtspunkte sind es die diese beiden Fälle im Wesentlichen voneinander unterscheiden. Im zweiten Falle kann die Geschwindigkeit nicht oder wenigstens nicht so leicht als ein von dem Raume und der Zeit ganz verschiedenes, in dem bewegten Punkte als solchem liegendes rein dynamisches Moment betrachtet werden wie das in dem ersten Fall, freilich rein formell, möglich ist: im ersten Falle sind nämlich Materie und Raum voneinander verschieden und die Geschwindigkeit scheint somit ein reines inneres

Moment des bewegten materiellen Punktes selbst sein zu können, in dem zweiten Falle ist dagegen der materielle Punkt als solcher zugleich Raumpunkt und man müsste annehmen, dass er mehr als Raumpunkt ist, wenn die Geschwindigkeit ein besonderer von dem Raume unabhängiger Faktor ist. Und zweitens — und was viel wichtiger ist — im ersten Falle scheint bei der Geschiedenheit der Materie von dem Raume auch eine entsprechende Geschiedenheit der Geschwindigkeit von der Zeit ganz möglich zu sein. Wie nämlich die Materie an den verschiedenen Stellen des Raumes von verschiedener Dichtigkeit sein könne (die Dichtigkeit in rein extensivem Sinne genommen). ebenso scheint die Geschwindigkeit an den verschiedenen Stellen der Zeit von ungleicher Grösse sein zu können, eine Verschiedenheit der Geschwindigkeit also möglich. Die Vertreter der Theorie von der selbständigen Existenz des Raumes und der Zeit sind sich dessen ganz wohl bewusst, dass dieselben als reine Continua überall gleichmässig ausgedehnt sein müssen (vgl. die klassischen Definitionen des Raumes und der Zeit, die Newton in seinen „Philosophiae naturalis principia mathematica“ p. 5. giebt) und dass von einer verschiedenen Dichtigkeit des Raumes an verschiedenen Stellen desselben und von einer Verschiedenheit der Geschwindigkeit der Zeit in seinen verschiedenen Abschnitten keine Rede sein könne. Aber gerade deshalb weil Raum und Zeit als Continua überall gleichmässig ausgedehnt sind, sollen dieselben von der Materie verschieden sein, da nur in diesem Falle die Materie im Raume verschieden zerstreut sein kann und die Geschwindigkeit ihrer einzelnen Theile in der Zeit verschieden sein zu können scheint.

Diese letztere Behauptung ist nun — und damit gehen wir in das Problem selbst ein — eine blosse Täuschung. Die verschiedene Dichtigkeit der Materie in dem Raume lässt sich nur deshalb denken, weil die Materie discret und der Raum continuirlich ist, so dass dann nichts hindert, jene discreten Theile der Materie in beliebigen Entfernungen voneinander sich zu denken. Die Bewegung dagegen soll nicht discret sondern selbst continuirlich sein und infolgedessen ist die Verschiedenheit ihrer Geschwindigkeit absolut unmöglich. Das leere Wesen der Zeit kann, mag dasselbe als ruhend oder als fliessend gedacht werden, der Bewegung keine Möglichkeit bieten, in den verschiedenen Theilen ihrer zeitlichen Bahn verschieden zu sein, denn als Continuum ist die Bewegung ebenso absolut homogen wie die übrigen Continua, wie Raum und Zeit. Der bewegte materielle Punkt beschreibt einerseits eine räumliche

und andererseits eine zeitliche Bahn (dieser Ausdruck soll eben andeuten, dass die Zeit ein besonderes von der Bewegung und Veränderung unterschiedenes Wesen ist), derselbe muss folglich jede bestimmte räumliche Strecke in einer bestimmten zeitlichen Strecke durchlaufen, so dass eine und dieselbe räumliche Strecke offenbar nur in einer und derselben zeitlichen Strecke beschrieben werden kann. Denn wenn man das Gegentheil davon voraussetzte, dann würde das nicht mehr und nicht weniger bedeuten, als dass Raum und Zeit nicht überall gleichmässig ausgedehnt sind. Raum und Zeit als ausgedehnte Continua müssen doch in gleicher Weise ausgedehnt sein, d. h. eine und dieselbe räumliche Strecke enthält genau soviel von der continuirlichen Ausdehnung wie die gleiche Strecke in der Zeit von continuirlicher Ausdehnung enthält — da man doch wohl nicht läugnen will, dass ihrer extensiven Grösse nach gleiche Strecken im Raume und in der Zeit vorhanden sind — und dasselbe wird offenbar auch für die Bewegung gelten, wenn dieselbe continuirlich ist. Da nun die Bewegung in nichts anderem besteht als darin, dass ein und derselbe materielle Punkt im Raume und in der Zeit zugleich eine ausgedehnte Strecke beschreibt, so ist es offenbar dass gleichen Raum- und Zeitstrecken stets gleiche Bewegungsstrecken (Bewegung als Continuum ist auch ausgedehnt und hat somit auch Ausdehnungsstrecken) entsprechen, d. h dass eine Verschiedenheit in der Geschwindigkeit der Bewegung absolut ausgeschlossen ist, denn diese Verschiedenheit bedeutet nichts anderes als dass einer und derselben Raumstrecke verschiedene Zeit- und Bewegungsstrecken entsprechen können, was offenbar unmöglich ist. Mag man nun hierbei noch so sehr voraussetzen, dass die Bewegung nicht eine einfache Vereinigung von Raum und Zeit ist, dass die Bewegung etwas ist, was unmittelbar aus dem materiellen Punkte als solchem, aus seinen inneren Kräften entspringt, so hilft das alles doch nicht, denn möge man solche inneren Kräfte im Atom noch so sehr voraussetzen, von ihnen lässt sich in die Bewegung nur so viel umsetzen wie viel das die allgemeine Natur des Raumes und der Zeit zulässt, in denen die Bewegung geschieht. Grösser könnte jene Geschwindigkeit der reinen Bewegung offenbar nicht sein als es die Geschwindigkeit der reinen fliessenden Zeit selbst ist — wenn diese als fliessend gedacht wird — weil dann dieser Ueberschuss offenbar nicht mehr in der reinen Zeit als solcher vorhanden sein könnte, was unmöglich ist, weil ja die Bewegung *in* der Zeit geschieht, und ebenso kann sie nicht grösser als die entsprechende Strecke der leeren ruhenden Zeit sein, weil sie dann wiederum

durch diese nicht bedingt wäre: kleiner kann aber jene Geschwindigkeit der Bewegung offenbar deshalb nicht sein, weil die Bewegung nach der Voraussetzung continuirlich sein soll und sich als continuirliche in derselben Weise ausdehnen muss wie die Zeit selbst.

Viel leichter als es in diesem ersten Falle war, ist die Unmöglichkeit der Geschwindigkeitsverschiedenheit in dem zweiten Falle feststellbar. In diesem zweiten Falle fallen Zeit und Bewegung miteinander zusammen und es ist dann offenbar, dass sich von den inneren Kräften, die die Geschwindigkeit des sich bewegenden materiellen Punktes bestimmen — wenn wir solche auch in diesem Falle zulassen — nur soviel verwirklichen lässt wie viel das die allgemeine Natur der Zeit zulässt, da in diesem Falle Zeit, Bewegung und Geschwindigkeit miteinander zusammenfallen. Wenn nun die Zeit continuirlich ist, so würde eine Verschiedenheit in der Bewegungsgeschwindigkeit offenbar in diesem Falle nicht mehr und nicht weniger bedeuten, als dass die Zeit verschiedene Geschwindigkeit in ihren verschiedenen Abschnitten hätte, was wiederum nichts anderes bedeuten würde, als dass sie nicht überall gleichmässig ausgedehnt ist. Wenn somit die Zeit kein besonderes neben den Veränderungen bestehendes Wesen ist, dann wird die Unmöglichkeit der Geschwindigkeitsverschiedenheit von selbst einleuchtend, und man braucht nur dasselbe Princip, das in diesem Falle entscheidend ist, auch in jenem ersten Falle anzuwenden, um einzusehen, dass die continuirliche Bewegung keine Verschiedenheit in ihrer Geschwindigkeit haben könne.

Wenn wir nun so festgestellt haben, dass die Bewegung, wenn sie continuirlich ist, keine Verschiedenheit ihrer Geschwindigkeit haben könne, müssen wir nun nachweisen, wie diese Verschiedenheit möglich ist, wenn die Bewegung discret ist. Ist die Bewegung discret, dann ist dieselbe, wie wir gesehen haben, stets momentan und jede längere Bewegung besteht aus einer bestimmten Anzahl von diesen absolut einfachen Bewegungen resp. Bewegungsacten und zwar so, dass jede einzelne einfache Bewegung von der Ruhe bedingt, resp. dass jeder einfachen Bewegung die Ruhe vorausgeht. Die Verschiedenheit in der Geschwindigkeit der Bewegung ist nun darin begründet, *dass die zeitliche Grösse der Bewegungsmomente eine stets gleiche ist, während die Ruhemomente verschiedene zeitliche Grösse haben*, jeder Bewegungsact als einfacher Veränderungsact dauert nämlich nur einen einzigen Augenblick, während die Ruhe, da dieselbe ihrem Wesen nach zeitlos ist, in Bezug auf die Dauer von verschiedener Grösse sein kann. Was diese Zeitdauer der zeit-

losen Ruhemomente bedeutet haben wir in dem ersten Kapitel dieses Abschnittes (vgl. S. 164) gesehen: die Umwandlungsfähigkeit des zeitlosen die Ruhe setzenden Actes in den zeitlichen — in welcher Umwandlung, wie wir weiter unten sehen werden, das innere Wesen der Bewegung besteht — ermöglicht den Vergleich der zeitlosen Ruhe mit der Bewegung ihrer zeitlichen Grösse nach, sie ermöglicht den Unterschied des nur einen Augenblick und des mehrere Augenblicke dauernden Ruhezustandes eines bewegten Punktes. Wenn ein materieller Punkt an einem Orte ruhen muss bevor er durch den Bewegungsact an den nächsten gelangt, so kann er, wenn die Bewegung längere Zeit dauert, an jedem Orte entweder nur einen einzigen Augenblick (d. h. gerade so viel wie viel die Dauer des einfachen Bewegungsactes beträgt) oder mehrere solche ruhen. und er kann an jedem Orte in gleicher oder in verschiedener Zeitdauer ruhen. Ruht der sich bewegende Punkt an jedem Orte gleiche Zeit, dann wird seine Bewegungsgeschwindigkeit eine gleichförmige sein, und von der Grösse der Ruhedauer wird es abhängen ob sie grösser oder kleiner ist; ruht der sich bewegende Punkt an verschiedenen Orten nicht eine gleiche Anzahl von Augenblicken, dann wird die Geschwindigkeit seiner Bewegung eine ungleichförmige sein, d. h. ein und derselbe Punkt wird in den verschiedenen Theilen seiner Bahn verschiedene Geschwindigkeit haben.

Es ist nun offenbar – und das ist eine der wichtigsten Consequenzen die aus obigen Ausführungen folgen — dass die Bewegung notwendigerweise *ein Maximum von Geschwindigkeit* besitzen müsse. Ruht der sich bewegende Punkt an jedem Orte seiner Bahn je einen einzigen Augenblick, so wird diese Geschwindigkeit offenbar, ausserdem dass sie selbstverständlich eine gleichförmige ist, ein Maximum darstellen, da jede andere Geschwindigkeit eine langsamere ist, kleinere Ruhepausen aber als es die einfachen sind nicht möglich sind. Diese Consequenz von der maximalen Bewegungsgeschwindigkeit scheint auf den ersten Blick so paradoxal zu sein, und doch lässt sich leicht zeigen, dass dieselbe auch in dem Falle notwendig ist, wenn die Bewegung continuirlich ist. Wenn wir per impossibile auch eine Geschwindigkeitsverschiedenheit bei der vorausgesetzten continuirlichen Zeit zulassen, so ist es doch offenbar, dass diese Geschwindigkeit die Geschwindigkeit der Zeit selbst nicht übertreffen könnte, wenn die Zeit aber als ruhend gedacht wird, dann müsste wiederum, wie oben ausgeführt, die Geschwindigkeit ein Maximum haben, da dieselbe von dem Continuum der ruhenden Zeit bedingt ist. Die maximale Geschwindig-

keit der discreten Bewegung ist aber von dieser maximalen Geschwindigkeit (die zugleich auch die minimale ist) der continuirlichen Bewegung völlig verschieden, wenn in beiden Fällen die Verschiedenheit der Geschwindigkeit als möglich angenommen wird: die maximale Geschwindigkeit der continuirlichen Bewegung würde nämlich ein unendliches Maximum darstellen, welches keine endliche Geschwindigkeit zu erreichen vermag; die maximale Geschwindigkeit der discreten Bewegung dagegen ist selbst endlich und stellt die grösste endliche Geschwindigkeit dar.

Aus den bisherigen Untersuchungen des Bewegungsbegriffs hat sich uns eine zwiefache Abhängigkeit der Bewegung von der Ruhe ergeben: erstens ist die Bewegung von der Ruhe räumlich abhängig, indem die Bewegung der bewegten materiellen Punkte unbewegliche Punkte voraussetzt, die die Identität und Continuität des Raumes, in dem die Bewegung geschieht, bedingen und ermöglichen*; und zweitens ist die Bewegung von der Ruhe auch zeitlich abhängig, indem die Bewegung eines bestimmten Augenblickes die Ruhe in dem vorhergehenden Augenblicke erfordert und nur in der Aufhebung derselben besteht. Wie man hieraus sieht, ist die Bewegung von der Ruhe in zeitlicher Hinsicht viel abhängiger als in der räumlichen, in räumlicher Hinsicht ist sie gleichsam nur einmal, in zeitlicher Hinsicht dagegen ist sie fortwährend von ihr abhängig, die Ruhe, welche räumlich die Bewegung bedingt, braucht sich nicht mit dieser selbst in der Nähe zu befinden, die Ruhe die zeitlich die Bewegung bedingt, befindet sich dagegen in unmittelbarer zeitlicher Nähe zu dieser, geht ihr unmittelbar vorher. Es fragt sich nun nur noch, ob diese Abhängigkeit der Bewegung von der Ruhe eine absolute ist, d. h. ob, wie jede einzelne Bewegung eines bestimmten Augenblicks durch die Ruhe des vorausgehenden bestimmt ist, ob ebenso die Bewegung von der Ruhe überhaupt bedingt ist, ob der Bewegung in der Welt in absolutem Sinne die Ruhe vorausgegangen ist, ob, bevor in der Welt die Bewegung überhaupt möglich wurde, die Welt sich nicht zuvor in dem absoluten Ruhezustande befinden musste. In dem ersten Kapitel dieses Abschnittes haben wir in der That aus dem Wesen der Zeit selbst als solcher darauf

* Selbstverständlich ist diese Identität und Continuität des Raumes nicht so zu verstehen, dass der ganze Raum des einen Augenblicks identisch mit dem Raume des anderen Augenblicks ist (vgl. s. 178) sondern nur so, dass durch die unbeweglichen Raumpunkte die räumliche Lage der beweglichen in beiden Augenblicken eine eindeutig bestimmte ist. Ausführlicher über diesen Sachverhalt wird in dem zweiten Unterabschnitt dieses Abschnittes die Rede sein.

geschlossen, dass die Veränderung (und dasselbe gilt offenbar auch für die Bewegung, da Bewegung Veränderung ist) in der Welt einen absoluten Anfang gehabt hat; wir können nun denselben Schluss auch aus der Natur der Bewegung ziehen. Wenn Bewegung Aufhebung der Ruhe ist und ein Bewegungsact, der nicht durch die Ruhe des durch ihn bewegten materiellen Punktes bedingt wäre, unmöglich, so kann die Bewegung offenbar nicht seit Ewigkeit bestehen, denn jede Bewegung setzt die Ruhe voraus, während die Ruhe umgekehrt die Bewegung gar nicht voraussetzt, da wenn das der Fall wäre die Ruhe notwendigerweise ebenso zeitlich-momentan sein müsste wie die Bewegung, was offenbar nicht der Fall ist. Nur wenn Bewegung die Ruhe und Ruhe die Bewegung gleichermaassen voraussetze, wäre dieser Schluss von dem absoluten Anfang der Bewegung nicht stringent, denn in dem Falle müsste ihre Reihe thatsächlich schlechthin unendlich und anfanglos sein, da keine als die erste als die anfangende gedacht werden könnte. Ganz anders steht aber die Sache, wenn die Bewegung von der Ruhe, die Ruhe dagegen von der Bewegung gar nicht bedingt ist: wäre die Bewegung ewig und anfanglos dann hiesse das offenbar, dass der Ruhe, die einer Bewegung vorausgeht, selbst eine Bewegung vorausgegangen ist u. s. w. in infinitum, was nicht mehr und nicht weniger bedeuten würde, als dass die Ruhe ganz ebenso von der Bewegung wie die Bewegung von der Ruhe bedingt ist, was eben der Voraussetzung widerspricht.

Durch diese Sätze von der zeitlichen Bedingtheit der Bewegung von der Ruhe und dem damit in unmittelbarer Verbindung stehenden Satze von der Instantaneität der Bewegung scheinen wir nunmehr mit einem der bestbegründeten Principien der modernen Mechanik und der gesammten Wissenschaft überhaupt, mit dem Trägheitsprincip nämlich, in direkten Konflikt zu gerathen. Das Trägheitsprincip behauptet bekanntlich, dass ein materieller Punkt im Zustande der Ruhe oder einer bestimmten Bewegung (d. h. der Bewegung mit einer bestimmten Geschwindigkeit) solange verbleibt solange keine äussere Ursache den betreffenden Zustand verändert. Nach diesem Princip sind demnach sowohl die Ruhe wie die Bewegung ihrer Natur nach dauernde Zustände, jeder Körper, der sich in dem Zustande der Ruhe oder Bewegung befindet, verharrt in ihnen solange solange ihn nicht die rein äusseren Umstände nöthigen, dieselben zu ändern (von Ruhe zur Bewegung et vice versa, von einer Bewegung zur anderen hinüberzugehen), die Bewegung soll also danach ganz ebenso ein

continuirlicher Zustand sein wie die Ruhe. Nach unseren obigen Ausführungen aber ist die Bewegung rein momentan, ihrer Natur nach ist die Bewegung also kein dauernder Zustand, ist vielmehr ganz das Gegentheil davon, in demselben Momente in dem dieselbe entsteht in demselben Momente hört sie auch zu sein auf. Für die Ruhe kann zwar nicht behauptet werden, dass sie nicht ein dauernder Zustand ist, vielmehr ist sie dies unzweifelhaft und sogar in einem noch viel engeren Sinne als das gewöhnlich gemeint wird, da sie nicht dauernd in zeitlichem sondern in zeitlosem Sinne ist, aber in strengem metaphysischen Sinne genommen gilt das Trägheitsprincip auch für dieselbe nicht. Dasselbe gilt für die Ruhe nur im Gebiete der mechanischen Natur, da die Ruhe von selbst wohl aufgehoben werden kann, d. h. durch innere Ursache, aber diese Art der Aufhebung durch innere Ursache, da sie das Bewusstsein zu ihrer Bedingung hat (vgl. S. 120—1) im Gebiete der unbewussten Natur nicht vorkommt, so dass hier die Ruhe wirklich ein dauernder Zustand ist, von selbst nicht sondern nur durch äussere Ursachen aufgehoben werden kann. Der die Ruhe setzende zeitlose Negationsact kann nämlich sich selbst als solcher umwandeln: dies thut er im Bewusstsein von selbst und ohne jede äussere Veranlassung, in dem Gebiete der unbewussten Natur dagegen ist jene äussere Veranlassung durchaus nöthig damit er sich in den zeitlichen Bewegungs- und Veränderungsact umwandle. Wie es nun hier bei dem Ruhezustande die besonderen Umstände der Wirklichkeit machen, dass derselbe dem Trägkeitsprincip unterworfen ist, obgleich er dies in metaphysischem Sinne und seinem letzten Wesen nach nicht ist, ebenso sind es nun auch besondere Umstände der Wirklichkeit, die auch den Bewegungszustand, der ursprünglich nicht einmal gleichsam eine Tendenz hat diesem Princip unterworfen zu werden — wie es mit dem Ruhezustande der Fall ist, der ein dauernder Zustand ist — dem Trägheitsprincip unterwerfen. Zwar bleibt die Bewegung metaphysisch genommen immer ein einfacher Bewegungsact, nichts hindert aber vorauszusetzen, dass die Natur der Weltelemente bei der einmal begonnenen Bewegung eines Weltelements die Wiederholung der einfachen Bewegungsacte solange erfordert solange dies nicht durch besondere Umstände verhindert wird, wie ja auch der lange Zeitstrom der Weltveränderungen selbst nur durch die Natur der sich ändernden Weltelemente bestimmt ist (vgl. s. 161). Wir können uns hier nicht auf diese Natur der Weltelemente einlassen, das wird ja der Gegenstand des nächsten Unterabschnittes dieses Abschnittes

ausmachen, hier war es nur soviel nöthig festzustellen, dass die metaphysische Ungiltigkeit des Trägheitsprincips die empirisch-physikalische Giltigkeit desselben gar nicht auszuschliessen braucht, dass das Trägheitsprincip ganz gut eine zusammengesetzte und nicht eine einfache Thatsache zu sein braucht, dass in ihm das letzte Wesen der Bewegung und der Ruhe nicht zum Ausdruck zu kommen braucht. Ohne näher auf die Sache einzugehen will ich nur noch bemerken, dass die Fortsetzung einer einmal begonnenen Bewegung eines materiellen Punktes einfach deshalb notwendig ist, weil dieselbe Relation des materiellen Punktes zu den umgebenden Punkten — und nur diese besondere Relation kann in der unbewussten Natur die Bewegung verursachen — die die eine Bewegung desselben hervorgebracht hat, diese letztere auch in dem nächsten Augenblicke hervorbringen wird, wenn der materielle Punkt zu den ihn in dem neuen Augenblicke umgebenden Punkten dieselbe Relation hat, die er mit den ihn in dem vorigen Augenblicke umgebenden Punkten hatte u. s. w. in indefinitum. Nicht also die Natur der Bewegung selbst als solcher macht das Trägheitsprincip zu einer Notwendigkeit, sondern die Natur des sich bewegenden materiellen Punktes als Gliedes einer beziehungsvollen Welt macht dasselbe zu einer solchen, was eben übersehen wird, wenn die Theorie der discreten Bewegung auf Grund des Trägheitsprincips verworfen wird.

Noch zwei Fragen bleiben uns in Bezug auf die Bewegung übrig. Die eine von ihnen bezieht sich darauf, wie die Bewegung in einem lückenlosen Discretum überhaupt möglich ist, da die Möglichkeit davon so oft geleugnet worden ist, die zweite darauf, wie die Bewegung möglich ist, wenn ihr die Ruhe vorausgeht, wie überhaupt die Bewegung anfangen kann da wo zuvor Ruhe war. Diese zweite Frage steht offenbar mit dem letzten Wesen der Bewegung selbst in unmittelbarer Verbindung, die Antwort auf dieselbe enthält in sich zugleich die Bestimmung des letzten Wesens der Bewegung. Die erste Frage steht mit der zweiten insofern in Verbindung, inwiefern dadurch die Möglichkeit der Bewegung in dem Discretum festgestellt werden soll, die Bewegung aber in zeitlicher Hinsicht nur dann discret ist (und die Ruhe als integrierenden Bestandtheil enthält), wenn der Raum selbst discret ist, in dem die Bewegung geschieht.

Wir fragen also zunächst ob die Bewegung in dem discreten Raume möglich ist? Wenn der leere Raum unmöglich ist und Raum und reale Materie miteinander zusammenfallen, dann scheint die Bewegung als solche absolut unmöglich zu sein. Es scheint nämlich

dass, wenn der Raum lückenlos mit der Materie erfüllt ist, dann ein materieller Punkt überhaupt nicht mehr in der Lage ist, seinen Ort zu verlassen und einen neuen einzunehmen, da jeder andere Ort als solcher schon mit einem materiellen Punkte besetzt ist und somit nicht in der Lage einen neuen aufzunehmen. Dies ist einer der ältesten und wichtigsten Gründe für die Voraussetzung des leeren Raumes, und doch beruht er, was uns nicht schwer ist einzusehen, nur auf einer Verwechselung des absoluten Continuums mit dem lückenlosen Discretum. In dem realen Raume ist wohl jeder Ort mit einem materiellen Punkte besetzt, wenn aber dabei jeder materielle Punkt wirklich als Punkt aufgefasst wird, d. h. wenn der reale Raum discret ist, dann hindert nichts vorauszusetzen, dass in dem Augenblicke in dem ein materieller Punkt einen Ort verlässt und einen neuen einzunehmen im Begriffe steht, der andere materielle Punkt diesen letzteren Ort seinerseits verlässt und einen neuen einzunehmen genöthigt wird u. s. w. so dass dann also die Bewegung durch das gleichzeitige Verlassen der Orte von Seiten vieler Punkte geschieht. Descartes ist der erste Denker, der, indem er Materie und Raum identificierte, die Möglichkeit der Bewegung in dem realen Raume in dieser Weise bestimmte, nur hat er wunderbarerweise dabei den Raum nicht als lückenloses Discretum sondern als absolutes Continuum aufgefasst, was jedoch unmöglich ist, da in einem absoluten Continuum keine getrennten Theile existieren und somit in demselben eine Bewegung einzelner Theile ebensowenig möglich ist wie etwa eine qualitative Unterscheidung derselben (vgl. s. 304). Nur also die Verwechselung des absoluten Continuums mit dem lückenlosen Discretum ist daran Schuld, dass man die Möglichkeit der Bewegung in dem discreten realen Raume nicht einzusehen vermag (Descartes, indem er die Art und Weise der Bewegung in dem realen Raume bestimmte, hat sich um jene principielle Schwierigkeit nicht gekümmert), sobald man aber diesen Unterschied einmal aufgefasst hat, hört die Bewegung auf, in dem realen Raum unmöglich zu sein, wenn man dieselbe auf Descartes' Weise fasst. Und noch eine sehr wichtige Consequenz, die Discartes selbst aus seiner Bestimmung der Bewegung gezogen hat, muss dabei in Betracht gezogen werden, um die Möglichkeit der Bewegung einzusehen. *Jede Bewegung muss nämlich in einer geschlossenen Linie erfolgen.* Diese Regel gilt in dem realen Raum ganz unabhängig davon ob er als unendlicher oder als endlicher (nach oben) vorausgesetzt wird, denn wenn ein materieller Punkt einen neuen Ort nur dann einzunehmen vermag, wenn der Punkt, der diesen Ort einnimmt, denselben

verlässt, so muss dann dasselbe für diesen letzteren vorausgesetzt werden u. s. w. in indefinitum. Wenn nun die Reihe dieser Punkte, die successive einander die Plätze räumen, nicht eine geschlossene wäre und der letzte Punkt in derselben den verlassenen Ort des ersten (die Bewegung anfangenden) nicht einnehmen würde, mag die Anzahl der Punkte in jener Reihe eine unendliche oder eine endliche sein, dann würde einerseits jener Ort des ersten Punktes leer bleiben, was unmöglich ist, und andererseits müsste der letzte Punkt jener Reihe wiederum einen materiellen Punkt von seinem Orte vertreiben, und wenn nun dieser letztere materielle Punkt nicht jenen leeren Ort des ersten Punktes einnehmen würde, müsste er offenbar aus dem realen Raume gleichsam herausfallen, was jedoch unmöglich ist. Setzen wir aber voraus, dass jener leere Ort des ersten Punktes von dem materiellen Punkte einer anderen Bewegungsreihe ausgefüllt wird und dass der materielle Punkt, den der letzte Punkt von seinem Orte vertrieben hat, in den leeren Ort des ersten Punktes einer wiederum anderen Bewegungsreihe hineingeht, so müssen doch — wenn sich dieselben Schwierigkeiten, die für die erste Bewegungsreihe gelten, für diese beiden neuen Reihen nicht theilweise wiederholen sollen — diese beiden Reihen nur Bestandtheile jener ersten Reihe sein, d. h. die Bewegungsreihe muss stets in geschlossener Linie erfolgen. Die geschlossene Linie braucht aber in dem discreten Raume, sobald dessen innere geometrische Struktur bekannt ist, gar nicht regelmässig zu sein, und nur weil Descartes das räumliche Continuum mit dem Discretum verwechselte und um die innere geometrische Struktur des Discretums (seine Corpuscula sollen die verschiedensten geometrischen Gestalten haben, da sie ausgedehnt sein sollen) sich nicht kümmerte, konnte er diese geschlossene Linie für einen Kreis erklären und darauf seine Wirbeltheorie aufbauen.

Nachdem wir nun so die Möglichkeit der Bewegung in dem realen discreten Raume festgestellt haben, müssen wir nun feststellen, wie die Bewegung möglich ist, wenn ihr die Ruhe notwendigerweise vorausgeht. Alle Punkte jener geschlossenen Bewegungsreihe müssen sich, bevor ihre Bewegung anfängt, zuvor in Ruhe befinden und wir fragen nunmehr, wie der eine von ihnen die Bewegung überhaupt anfangen kann, um sie dann allen anderen gleichzeitig mitzutheilen. In dem letzten Kapitel des ersten Abschnittes (vgl. s. 90) haben wir schon ausgeführt, dass die Ortsänderung der realen Punkte (dort war allerdings nur von Empfindungspunkten die Rede, dasselbe gilt aber offenbar auch für alle

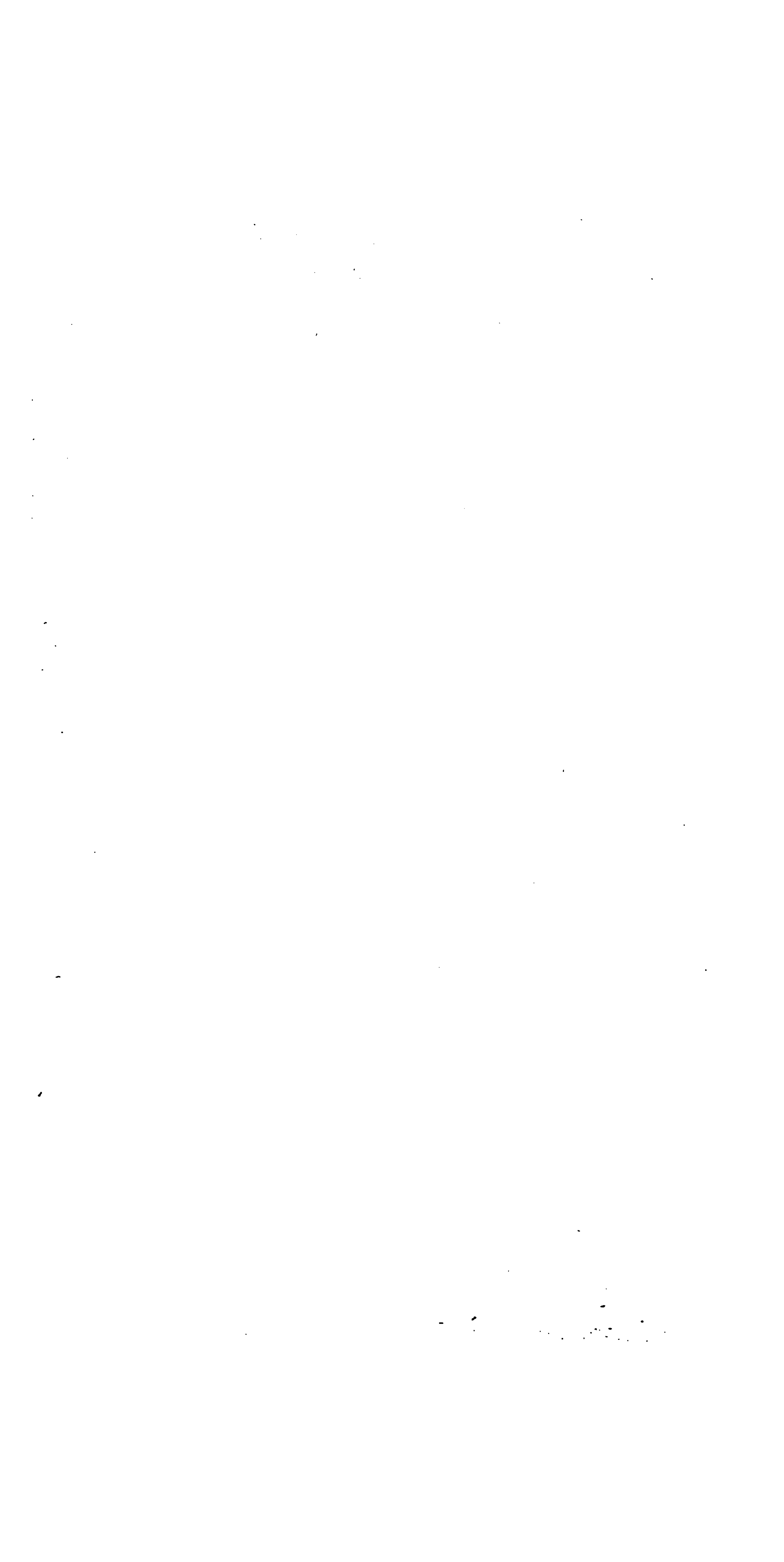
realen Punkte überhaupt) ohne die realen Negationsacte die zwischen denselben liegen unmöglich ist, und wollen nunmehr diesen Gedanken hier streng begründen. Die Notwendigkeit der realen Negationsacte zwischen den realen Punkten wird zur absoluten Notwendigkeit erhoben, wenn sich dieselben notwendigerweise in Ruhe befinden müssen bevor sie in den Bewegungszustand gerathen. Betrachten wir zu diesem Ende die Bewegung der Punkte A, B. C, D. E, F in dem dreieckigen Punktennetz der Figur 13 (Taf. I), die in einer geschlossenen Linie angeordnet sind (Peripherie des regelmässigen Sechsecks), in der sie ihre Bewegung vollführen, wenn der eine von ihnen bewegt wird. Wenn sich diese Punkte im Zustande der Ruhe befinden, so kann ihre Bewegung offenbar metaphysisch genommen nicht durch einen absoluten absolut unmotivierten Zufall entstehen, es muss in der Natur ihrer selbst liegen, wenn sie dieselbe anfangen sollen. Nun kann offenbar dieser Grund in dem einzelnen Punkte gar nicht liegen, da der Punkt als solcher ohne Theile ist und also in seinem Inneren nichts enthält, was jene Bewegung hervorbringen könnte, wenn dies nicht etwa reine Kräfte wären, die jedoch für eine rationale Metaphysik als rein mystische und mythologische Wesen zu verwerfen sind. Man kann die Bewegung des Punktes auch nicht als eine ursprüngliche Eigenschaft desselben auffassen. Nicht nur dass dies jenes logische Princip verbietet, welches nur dasjenige für eine letzte einfache Thatsache resp. Eigenschaft eines Dinges zu erklären erlaubt, was in einem durchsichtigen begrifflichen Zusammenhange mit demjenigen steht, dessen Eigenschaft dasselbe sein soll — was hier nicht der Fall ist, weil man absolut nicht einzusehen vermag wieso und wodurch der einzelne Punkt dazu kommt sich von Natur aus zu bewegen — sondern die discrete Natur der Bewegung als solche verbietet dies schon vollständig. Die discrete Natur der Bewegung bringt es ja einerseits mit sich, dass die Bewegung jedes einzelnen Augenblicks ohne die Ruhe des vorhergehenden Augenblicks gar nicht möglich ist, und dass die Bewegung in der Welt überhaupt ohne die vorausgehende Ruhe der gesammten Welt nicht möglich ist, aus diesen beiden Gründen ist und kann also die Bewegung gar nicht die ursprüngliche Eigenschaft der materiellen Punkte sein, weil sie einerseits in jedem Augenblicke von der Ruhe unterbrochen ist und andererseits dem materiellen Punkte nicht seit Ewigkeit angehören konnte, sondern ihm in einem bestimmten Augenblicke zugekommen ist. Wäre nun jeder einzelne reale Punkt für sich da und ohne jede Beziehung zu anderen Punkten (wäre also die Welt beziehungslos, vgl. damit die Aus-

führungen der s. 91) dann könnte offenbar eine Bewegung desselben absolut nicht entstehen und die Ruhe wäre sein ewiger unaufhebbarer Zustand Die Möglichkeit seiner Bewegung kann also nur noch aus seiner Beziehung zu anderen Punkten entspringen, und wir fragen uns nun wie diese Negationsbeziehung zwischen ihnen zu denken ist, damit die Bewegung möglich werde.

Würden wir nun voraussetzen, dass der Negationsact, der z. B. den Punkt A von dem Punkte B in der obigen Figur trennt, ein rein formaler Act ist, so könnte offenbar wiederum keine Bewegung des Punktes A und seine Versetzung an die Stelle des Punktes B eintreten. Denn ein rein formaler Act hat keinen realen Seinsinhalt und seine Aufhebung bedeutet somit offenbar gar keine wirkliche Veränderung, da das Nichts — und der Negationsact ist ja in diesem Falle ein reines Nichts — gar keine Veränderung erfahren kann. In diesem Falle kann also offenbar die Bewegung des Punktes A nicht erfolgen. Ganz anders steht aber die Sache, wenn der vorausgesetzte Negationsact real ist, denn in diesem Falle wird mit seiner Aufhebung wirklich etwas reelles eine reale Veränderung zu Stande kommen, und dann kann auch die Bewegung des Punktes A erfolgen. Wie erfolgt aber dann diese Bewegung? Durch die Antwort auf diese Frage wird sich uns das letzte Wesen der Bewegung und ihr Unterschied von der qualitativen Änderung offenbaren. Wenn die beiden realen Punkte A und B wirklich durch den realen Negationsact voneinander getrennt sind und als zwei, als getrennte, nur durch ihn bestehen, so werden sie offenbar durch seine Aufhebung nicht mehr so bleiben wie sie sind, sie können dann nicht mehr getrennt, sie können nicht zwei bleiben, sie werden sich also nach der Aufhebung jenes realen Actes zu vereinigen suchen, sie werden also offenbar ihre Orte verlassen müssen. Wenn nun nur eine einzige Art von Negationsacten im Reiche der Wirklichkeit bestünde, wenn nur die quantitativen Negationsacte bestünden, so würden offenbar mit der Aufhebung derselben auch die realen Punkte als solche aufgehoben werden, d. h. sie würden sich alle miteinander vereinigen resp. in die absolute Substanz zurücksinken, und die absolute Aufhebung der realen Negationsacte würde zugleich auch die absolute Aufhebung der realen Punkte bedeuten, dann wäre also im Reiche der Wirklichkeit nur die qualitative Veränderung möglich. Dem ist aber nicht so. Neben den quantitativen Negationsacten bestehen noch auch die qualitativen, und wenn wir die Unaufhebbarkeit der letzteren voraussetzen während der Zeit während der sich die quantitativen verändern, dann wird uns der

rätselhafte Vorgang der Bewegung schliesslich begreiflich und die Bewegung selbst als möglich erkannt werden. Wenn also die Punkte A und B nicht nur von dem quantitativen Negationsacte abhängen, der ihren numerischen Unterschied setzt, sondern zugleich auch von dem qualitativen, der sie von anderen realen Punkten verschiedener Qualität unterscheidet, so wird offenbar die Aufhebung des quantitativen Negationsactes diejenige der realen Punkte nicht mehr nach sich ziehen, wenn der qualitative Negationsact, der diese realen Punkte in ursprünglicher Weise setzt, dabei unaufhebbar ist. Was wird dann also geschehen? Durch die Aufhebung des quantitativen Negationsactes zwischen den Punkten A und B werden diese Punkte offenbar ihre Plätze verlassen müssen — weil sie an denselben nur durch jenen Act erhalten werden — da sie sich aber wegen der Beständigkeit des qualitativen Negationsactes, der sie als reale Qualitäten setzt, nicht vereinigen lassen, so wird ihre Bewegung eben gleichsam die gemeinsame Resultante jener beiden in verschiedener Richtung wirkenden Negationsacte sein: die realen Punkte werden, ohne aufgehoben zu werden, ihre Plätze aufgeben müssen. Da nun die realen Punkte A und B ihre Plätze offenbar nicht gegenseitig austauschen können, weil sie sich durchdringen müssten, was unmöglich ist — ganz abgesehen davon dass diese Durchdringung in Wahrheit ihre absolute Vereinigung bedeuten würde — so müssen sie andere Punkte in ihrer Nachbarschaft veranlassen, ihre Plätze aufzugeben u. s. f. bis die Bewegung all' dieser Punkte nicht auf die oben angegebene Weise geschlossen wird.

Es möchte nun zunächst scheinen, dass dieses Veranlassen der Bewegung anderer Punkte nicht mehr durch die Aufhebung der Negationsacte, die zwischen ihnen sind, zu geschehen braucht, dass alle übrigen Punkte in der geschlossenen Bewegungslinie ausser jenen zwei ersten rein mechanisch in Bewegung versetzt werden können, indem das notwendige Ortverlassen jener ersten die Orte dieser zweiten einfach aufhebt. So etwas voraussetzen hiesse aber, recht zusammengesetzte Thatsachen der sinnlichen Erfahrung für die ursprünglichen einfachen Thatsachen des Seienden zu erklären: es scheint ja nichts begreiflicheres zu sein als dass, wenn ein Körper in Bewegung versetzt wird, die übrigen Körper die er im Raume antrifft ihm einfach deshalb weichen müssen, weil zwei Körper an einem und demselben Raumorte nicht zugleich bestehen können. Für die einfachen materiellen Punkte, von denen hier die Rede ist, leugnen wir diesen letzteren Satz von der Undurchdringlichkeit nicht, aber



ANHANG.

ELEMENTE DER NEUEN GEOMETRIE.

I. Theil.

Geometrie des ein- und zweidimensionalen Raumes.

I. Abschnitt.

Entstehung und Relationen der einfachsten geometrischen Gebilde.

A. DEFINITIONEN.

1. Der *Punkt* ist der letzte einfache untheilbare Raumtheil.

2. *Mittelpunkt* heisst der reale mit Inhalt erfüllte Punkt.

3. *Zwischenpunkt* heisst der irreale die leere nichtseiende Lücke darstellende Punkt.

4. Zwei Punkte (Mittelpunkte) *berühren* sich miteinander, wenn sie von keinem dazwischenliegenden Punkte (Mittelpunkte) getrennt sind.

5. Zwei Punkte (Mittelpunkte) *berühren* sich *unmittelbar* oder *reell*, wenn sie von einem Zwischenpunkte getrennt sind.

6. Zwei Punkte (Mittelpunkte) *berühren* sich *mittelbar* oder *imaginär*, wenn ihre Berührungsentfernung mit dem Zwischenpunkte nicht zusammenfällt.

7. *Unausgebreitet* heisst der Raum, dessen Punkte sich alle unmittelbar miteinander berühren.

8. *Ausgebreitet* heisst der Raum, dessen Punkte sich nicht alle unmittelbar miteinander berühren.

9. *Richtung* heisst das Verhältniss der Folge zweier Punkte in Bezug aufeinander: der eine von ihnen ist *vor* dem anderen und dieser *nach* jenem.

10. *Dimension* ist die primäre (d. h. den Raum bestimmende) Ausdehnungsrichtung der Raumpunkte.

11. *Dimension* des *unausgebreiteten* Raumes ist jede Ausdehnungsrichtung seiner Punkte von einem dieser Punkte aus gerechnet.

12. *Dimension* des *ausgebreiteten* Raumes ist diejenige Ausdehnungsrichtung desselben, die aus der dimensionalen Ausdehnungsrichtung des unausgebreiteten Raumes entsteht, aus dem der ausgebreitete entstanden ist.

13. *Linie* ist ein System (oder eine Reihe) von Punkten, in dem sich je zwei Punkte miteinander berühren.

14. Die *Gerade* oder der eindimensionale Raum ist eine solche Linie, in der sich jeder nachfolgende Punkt nur mit einem vorhergehenden Punkte berührt. *Theilgeraden* heissen Theile der Geraden die in einer und derselben, *Halbgeraden* Theile der Geraden die in entgegengesetzter Richtung in Bezug aufeinander liegen.

15. Die *gebrochene* Linie ist eine solche Linie, in der sich ein nachfolgender Punkt mit zwei oder mehreren vorhergehenden Punkten berührt.

16. Die einfachste Linie oder die *Elementargerade* heisst die Berührungsentfernung zweier sich berührender Punkte.

17. Eine *Elementargerade* heisst *reell* wenn ihre Berührungsentfernung reell ist.

18. Eine *Elementargerade* heisst *imaginär* wenn ihre Berührungsentfernung imaginär ist.

19. Eine *Linie* heisst *reell* wenn sie aus reellen Elementargeraden besteht.

20. Eine *Linie* heisst *imaginär*, wenn sie aus imaginären oder aus imaginären und reellen Berührungsentfernungen besteht.

21. Zwei *Geraden* sind *gleicher Art*, wenn sie aus gleichartigen Elementargeraden bestehen.

22. Zwei *Geraden* sind *verschiedener Art*, wenn sie aus verschiedenartigen Elementargeraden bestehen.

23. Die einfachste Fläche oder *die Elementarebene* heisst der imaginäre leere Zwischenraum, der entweder von *drei* unmittelbar miteinander sich berührenden Punkten, oder von *vier* Punkten eingeschlossen wird, von denen sich successive je zwei reell und von denen sich je zwei imaginär miteinander berühren. Im ersten Falle heisst die Elementarebene das *einfache Dreieck*, im zweiten Falle das *einfache Quadrat*.

24. Die ausgebreitete *Ebene* ist ein System von Geraden, in dem sich jede nachfolgende Gerade nur mit einer vorhergehenden Geraden berührt.

25. *Dreieckig* heisst eine *Ebene*, wenn sie aus einfachen Dreiecken besteht d. h. wenn sie ein Punktensystem darstellt, in dem sich je drei Punkte unmittelbar miteinander berühren oder in dem jeder Punkt von sechs Punkten umgeben ist. *Umgebende Punkte* heissen diejenigen Punkte, die einem Punkte am nächsten liegen.

26. *Quadratisch* heisst eine *Ebene*, wenn sie aus einfachen Quadraten besteht oder ein Punktensystem darstellt in dem jeder Punkt von acht Punkten umgeben ist.

27. Zwei *Geraden begegnen* sich miteinander, entweder wenn sie sich in einem Punkte schneiden oder wenn sie durcheinander hindurchgehen ohne einander zu schneiden.

28. *Winkel* heisst der Richtungsunterschied zweier einander begegnender Geraden. Wenn sich die Geraden in einem Punkte schneiden so heisst dieser Schnittpunkt *Scheitelpunkt* des Winkels; seine Geraden heissen aber in jedem Falle *Schenkel*.

29. Ein *Winkel* heisst *reell*, wenn er aus reellen Geraden besteht.

30. Ein *Winkel* heisst *imaginär*, wenn eine oder die beiden Schenkel desselben imaginäre Geraden sind.

31. *Grundwinkel* heisst der erste reelle Winkel, den zwei reelle Geraden in einer Ebene bilden.

32. Wenn eine Halbgerade eine Gerade so schneidet, dass sie mit den beiden Halbgeraden der letzteren Geraden gleiche Winkel bildet, dann heissen diese Winkel *rechte* und die Halbgerade selbst wird *Senkrechte* genannt.

33. *Stumpf* heisst ein Winkel der grösser als ein rechter ist.

34. *Spitz* heisst ein Winkel der kleiner als ein rechter ist.

35. Zwei *Winkel* sind *gleichartig*, wenn sie aus gleichartigen Geraden bestehen.

36. Zwei *Winkel* sind *ungleichartig*, wenn sie aus ungleichartigen Geraden bestehen.

37. *Einfach in seiner Art* (d. h. in qualitativem Sinne) ist ein Winkel, wenn er sich in einfachere Winkel von derselben Art nicht zerlegen lässt, oder wenn sich zwischen seinen Geraden keine Gerade ziehen lässt, die mit einer von ihnen (oder mit beiden) gleichartig wäre.

38. *Zusammengesetzt in seiner Art* (d. h. in qualitativem Sinne) ist ein Winkel, wenn er sich in mehrere einfache Winkel zerlegen lässt, unter denen es solche von gleicher Art mit ihm giebt (oder die alle solche sind).

39. *Parallel* heissen zwei *Geraden*, wenn sie sich nirgends

begegnen, möge man sie sich fortgesetzt denken wie viel man wolle, die also keinen Winkel einschliessen.

40. *Figur* heisst ein von Geraden eingeschlossener Raum; die Geraden heissen *Seiten* der Figur.

41. *Reell* heisst eine *Figur*, wenn ihre Geraden reell sind.

42. *Imaginär* heisst eine *Figur*, deren Seiten entweder alle imaginäre Geraden sind oder unter denen sich solche befinden.

43. *Unmöglich* heisst eine *sinnlich wahrgenommene Figur*, die sich geometrisch nicht rechtfertigen resp. construieren lässt.

44. *Dreieck* ist eine dreiseitige Figur.

45. *Viereck* ist eine vierseitige Figur.

46. *Vieleck (Polygon)* ist eine vielseitige Figur.

47. *Gleichseitig* ist ein *Dreieck*, wenn seine drei Seiten einander gleich sind

48. *Gleichschenkelig* heisst ein *Dreieck*, dessen zwei Seiten einander gleich sind.

49. *Ungleichseitig* heisst ein *Dreieck*, wenn seine drei Seiten einander ungleich sind.

50. *Rechtwinkelig* heisst ein *Dreieck*, wenn ein von seinen Winkeln ein rechter ist.

51. *Stumpfwinkelig* heisst ein *Dreieck*, welches einen stumpfen Winkel hat.

52. *Spitzwinkelig* heisst ein *Dreieck*, dessen drei Winkel spitze sind.

53. *Rechteck* ist ein *Viereck*, dessen alle vier Winkel rechte sind.

54. *Quadrat* ist ein *Rechteck*, dessen vier Seiten einander gleich sind.

55. *Rhombus* ist ein *Viereck*, dessen vier Seiten einander gleich sind.

56. *Parallelogram* ist jedes *Viereck*, dessen gegenüberliegende Seiten einander gleich sind.

57. *Trapez* ist ein *Viereck*, in dem nur zwei gegenüberlegende Seiten einander parallel sind, die übrigen zwei aber nicht.

58. *Regelmässig* heisst ein *Vieleck*, dessen Seiten und dessen Winkel alle einander gleich sind; *unregelmässig*, wenn dem nicht so ist.

B. AXIOME.

1. Der Raum besteht aus Punkten.
2. Die Anzahl der Raumpunkte ist endlich.
3. Der Punkt ist eine einfache untheilbare quantitative Einheit.

4. Es giebt zwei Punktenarten: realer Mittelpunkt und irrealer
rischenpunkt.

5. Die irrealen Zwischenpunkte stellen die Extension, die
ılen Mittelpunkte das Extendierte im Raume dar.

6. Zwei miteinander sich berührende Punkte sind der Richtung
ch einander entgegengesetzt.

7. N+1-Punkte, die sich unmittelbar miteinander berühren,
llen den n-dimensionalen unausgebreiteten Raum dar.

8. Der ausgebreitete Raum entsteht aus dem unausgebreiteten.

9. Was qualitativ auf gleiche Weise im Raume gesetzt ist,
quantitativ gleich.

C. LEHRSÄTZE.

1. Lehrsatz.

Alle Mittelpunkte sind einander (quantitativ und quali-'iv) gleich.

Dieser Lehrsatz folgt unmittelbar aus den Def. 1 und 2 und
n Axiomen 3 und 9.

2. Lehrsatz.

Alle Zwischenpunkte sind einander (quantitativ und quali-iv) gleich.

Dieser Lehrsatz folgt unmittelbar aus den Def. 1 und 3 und
ı Axiomen 3 und 9.

Anmerkung. Der allgemeine Lehrsatz „alle Punkte sind ein-
ıer gleich", der diese beiden Lehrsätze in sich umfasste, ist
enbar deshalb unrichtig, weil nach Ax. 4 zwei Punktenarten
steben und somit alle Punkte nicht qualitativ einander gleich
d. Nach Ax. 3 ist zwar jeder Punkt eine einfache quantitative
ıheit und somit alle Punkte einander quantitativ gleich, diese
eichkeit ist aber rein arithmetisch-abstrakter Natur, geometrisch
ıommen aber lassen sich Mittelpunkte und Zwischenpunkte nicht
teinander summieren, da sie heterogene geometrische Grössen sind.

3. Lehrsatz

Jede Gerade hat zwei Endpunkte.

Dieser Lehrsatz folgt unmittelbar aus Def. 14 und den Axiomen
und 2.

4. Lehrsatz.

Die reelle Elementargerade stellt den unausgebreiteten ein-nensionalen Raum dar.

Dieser Lehrsatz folgt unmittelbar aus den Defin. 7 und 17 und dem Ax. 7.

5. Lehrsatz.

Jeder innere Punkt einer ausgebreiteten Geraden berührt sich mit zwei Punkten.

Nach Axiom 8 ensteht der ausgebreitete Raum aus dem unausgebreiteten, folglich entsteht die ausgebreitete Gerade, in der es innere Punkte giebt, aus der unausgebreiteten oder der Elementargeraden, in der es nach Def. 16 offenbar keine solche giebt. Die unausgebreitete Gerade stellt nach dem vorigen Lehrsatz den eindimensionalen unausgebreiteten Raum dar und besteht aus zwei sich unmittelbar berührenden Punkten, so dass die ausgebreitete Gerade aus ihr entstehen wird, wenn jedem dieser Punkte ein neuer Punkt hinzugefügt wird, aber so dass er sich nach Def. 14 nur mit einem von ihnen berührt, woraus klar hervorgeht, dass sich jeder innere Punkt der ausgebreiteten Geraden mit zwei Punkten berühren wird oder dass er von zwei Punkten umgeben (Def. 25) sein wird.

Anmerkung. Der obige Lehrsatz ist hier nur in Bezug auf die reelle Gerade deduciert; es ist aber leicht einzusehen, dass er auch für die imaginäre gilt, da sich nach Def. 20 die imaginäre von der reellen Geraden nur darin unterscheidet, dass die Berührungsentfernung ihrer Punkte nicht eine unmittelbare ist.

6. Lehrsatz.

Jede Gerade stellt von einem ihrer Endpunkte aus eine einzige Richtung dar.

Nach Def. 9. ist Richtung das Folgeverhältniss zweier Punkte in Bezug aufeinander, nach Def 14 besteht die Gerade aus Punkten die so aufeinander folgen, dass sich jeder nachfolgende Punkt nur mit einem vorhergehenden Punkte berührt, folglich folgen die Punkte einer Geraden, wenn man einen ihrer Endpunkte zum Ausgangspunkte nimmt, in gleicher Weise aufeinander, sie sind also in einer und derselben Richtung.

Nebensatz.

Jede Gerade stellt von jedem ihrer zwei Endpunkte aus eine besondere der anderen entgegengesetzte Richtung dar.

Dieser Nebensatz folgt unmittelbar aus dem Hauptsatze und dem Lehrsatz 3.

7. Lehrsatz.

Jede Gerade stellt von einem inneren ihrer Punkte aus zwei einander entgegengesetzte Richtungen dar (hat zwei Halbgeraden.)

Nach Lehrsatz 5 berührt sich jeder innere Punkt einer Geraden mit zwei Punkten, nach Axiom 6. stellen zwei sich berührende Punkte in Bezug aufeinander zwei entgegengesetzte Richtungen dar, folglich werden, da jeder innere Punkt Endpunkt der beiden durch ihn getrennten Theile der Geraden ist, nach Lehrsatz 6 aber jede Gerade von einem ihrer Endpunkte aus eine einzige Richtung darstellt, was offenbar auch für jede ihrer Theilgeraden (Def. 14) gilt, die beiden durch einen inneren Punkt voneinander getrennten Theile der Geraden (nicht Theilgeraden, vgl. Def. 14) einander entgegengesetzte Richtungen haben. Da aber nach Def. 14 Theile der Geraden, die in entgegengesetzter Richtung liegen, Halbgeraden sind, so wird folglich jede Gerade zwei Halbgeraden haben.

Anmerkung. Vgl. die Anmerkung zu Lehrsatz 5., die auch hier gilt.

8. Lehrsatz.

Die dreieckige Elementarebene stellt den unausgebreiteten zweidimensionalen Raum dar.

Nach der Def. 24 besteht die dreieckige Elementarebene aus drei sich unmittelbar miteinander berührenden Punkten, nach Axiom 7 stellen offenbar 3 unmittelbar sich berührende Punkte den zweidimensionalen unausgebreiteten Raum dar, folglich stellt die dreieckige Elementarebene den unausgebreitetten zweidimensionalen Raum dar.

Nebensatz.

Die ausgebreitete Ebene besteht ursprünglich aus einfachen Dreiecken

Dieser Nebensatz folgt aus dem obigen Lehrsatz, der Def. 23 (das einfache Dreieck) und Ax. 8.

9. Lehrsatz.

Jeder Punkt in der urspünglichen ausgebreiteten Ebene berührt sich unmittelbar mit sechs Punkten.

Nach dem vorigen Lehrsatz stellen drei sich unmittelbar berührende Punkte den zweidimensionalen unausgebreiteten Raum dar. Es soll also bewiesen werden, dass der einfachste ausgebreitete zweidimensionale Raum dann gegeben ist, wenn sechs Punkte um einen Punkt herum so liegen dass sie sich alle mit diesem Cen-

tralpunkte unmittelbar berühren, und dass demnach in dem zweidimensionalen ausgebreiteten Raum, der unmittelbar aus dem unausgebreiteten zweidimensionalen Raume entsteht, jeder Punkt sich mit sechs Punkten unmittelbar berührt, oder von sechs Punkten umgeben ist.

Die drei Punkte seien A, B, C. (Fig. 1, Taf. II) Wir können uns nun offenbar einen vierten Punkt D so denken dass sich derselbe mit den Punkten B und C unmittelbar, dass sich derselbe mit dem Punkte A dagegen nicht unmittelbar berührt, da wenn er sich mit ihm unmittelbar berühren würde dann nach Axiom 4 der dreidimensionale unausgebreitete Raum entstehen würde, und da erst wenn er sich mit dem Punkte A nicht unmittelbar berührt nach Def. 8 der ausgebreitete Raum entstehen kann. Es fragt sich nun also in welchem Verhältnisse der Punkt D zu dem Punkte A steht? Es sind nun zwei Fälle möglich: entweder berührt sich der Punkt D mit dem Punkte A gar nicht oder er berührt sich mit ihm, und zwar auf eine von der unmittelbaren Berührung ganz verschiedene Art und Weise. Das erste kann nun nicht der Fall sein, weil in dem Falle der Punkt D, was unmittelbar aus Def. 14 einleuchtet, sowohl mit den Punkten A und C wie mit den Punkten A und B in gerader Linie liegen müsste, was offenbar unmöglich ist, da die Gerade AC eine andere Richtung darstellt als die Gerade AB. Es muss also das zweite der Fall sein, der Punkt D muss sich mit dem Punkte A berühren, nur ist diese Berührung nicht die unmittelbare, folglich ist sie nach Def. 6 mittelbar, womit zugleich die Notwendigkeit dieser letzteren Berührungsart deduciert ist, denn wenn man die mittelbare Berührungsart nicht zuliesse dann wäre der Punkt D unmöglich, und doch ist er offenbar möglich, da nichts ausserhalb der Punkte A, B, C liegt was die Setzung des Punktes D verhindern würde.

Ist nun der Punkt D möglich, dann kann — da es ohne weiters einleuchtend ist, dass der Punkt D den ausgebreiteten dreieckigen Raum nicht als solcher abschliessen kann, denn dann müsste sich derselbe mit dem Punkte A sowohl mittelbar als unmittelbar berühren, was jedoch unmöglich ist und dem Begriffe der Berührung widerspricht (vgl. Def. 4) — auf dieselbe Weise der Punkt E gesetzt werden, der sich mit den Punkten D und B ganz ebenso unmittelbar berührt wie sich der Punkt D mit den Punkten B und C unmittelbar berührt. Offenbar wird nun der Punkt E in demselben Verhältniss zu dem Punkte C des Punktensystems BCD stehen in dem der Punkt D mit dem Punkte A des Punktensystems

ABC steht, d. h. er berührt sich mit ihm in mittelbarer Weise. Ob nun der Punkt E der einzige Punkt ist, der ausser dem Punkte D dem unausgebreiteten Punktensystem ABC hinzugefügt, diesen zum ausgebreiteten macht, oder ob es noch andere Punkte giebt die zu dem Ende hinzugefügt werden müssen, ist nunmehr zu untersuchen, und drei Fälle sind dabei zu unterscheiden.

1. Setzen wir zunächst voraus der Punkt E sei genügend, neben dem Punkte D den unausgebreiteten. zweidimensionalen Raum ABC zum geschlossenen ausgebreiteten Raume zu machen, d. h. setzen wir voraus, dass der Centralpunkt der (dreieckigen) Ebene von *vier* Punkten umgeben ist — der Fall, dass er von *drei* Punkten umgeben ist, ist oben ausgeschlossen worden — so wird die Unmöglichkeit davon leicht eingesehen werden können. Wäre der Punkt E (vgl. Figur 2, Taf. II) der vierte die Ebene um den Punkt B abschliessende Punkt, so müsste sich derselbe offenbar ebenso mit dem Punkte A unmittelbar berühren, wie sich derselbe der Voraussetzung nach mit den Punkten B und D unmittelbar berührt. Wie sich nun in dem Punktensystem ABCD, wo sich der Punkt C mit den drei Punkten A,B,D auf dieselbe Weise unmittelbar berührt, die Punkte A und D mittelbar berühren, ebenso müssten sich in dem Punktensystem ABDE dieselben Punkte A und D mittelbar berühren (da sich B und E nach der Voraussetzung unmittelbar berühren). Diese imaginäre Berührung müsste aber in diesem Falle durch die reelle Berührung BE ganz ebenso hindurchgehen wie sie durch die reelle Berührung BC hindurchgeht, was offenbar unmöglich ist, da BC und BE zwei verschiedene Raumstellen darstellen. Der Punkt E kann also die Ebene ABCD nicht zur geschlossenen machen.

2. Setzen wir voraus, dass ein neuer Punkt F zu den Punkten E und B auf dieselbe Weise hinzukommt, wie die Punkte E und D in Bezug auf BD und BC, so ist nun zu untersuchen, ob dieser *fünfte* Punkt die Ebene vervollständigen und geschlossen machen könne, d. h. ob es möglich ist, dass sich der Punkt F mit den Punkten A,B,E (vgl. Fig. 3, Taf. II) unmittelbar berührt? Der Widerspruch der im vorigen Falle entstand, indem sich der Punkt E mit dem Punkte A unmittelbar berühren sollte, besteht hier offenbar weder in Bezug auf den Punkt E noch in Bezug auf den Punkt F. Ein anderer Grund muss es also sein, der diesen Fall ausschliesst, und derselbe kann offenbar wiederum nur in besonderen Berührungsverhältnissen liegen. Und thatsächlich, wenn wir uns die Frage vorlegen, wie und auf welche Weise sich der Punkt E mit dem Punkte A berührt, so werden wir die Sache leicht

entdecken. Hier sind nun, rein abstrakt genommen, zwei Fälle möglich: entweder berührt sich der Punkt E mit dem Punkte A in einer neuen Berührungsart — diese wäre offenbar nach Def. 6 nur eine besondere Art der mittelbaren Berührung (der Begriff einer mannigfachen mittelbaren Berührung ist nichts widersprechendes) — oder er berührt sich mit dem Punkte A in derselben mittelbaren Berührungsart in der sich der Punkt D mit dem Punkte A berührt. Das erste ist nun unmöglich, weil wenn sich der Punkt E mit dem Punkte A in einer neuen Berührungsart berührt nichts hindert vorauszusetzen, dass sich auch der Punkt F mit dem Punkte A in einer neuen Berührungsart berührt u. s. w. in infinitum, so dass in diesem Falle offenbar die Ebene ABCDE nie abgeschlossen werden könnte oder, was dasselbe ist, dass der discrete ausgebreitete Raum eine unendliche Menge von Punkten enthielte, was nach Ax. 2 unmöglich ist. Aber nicht nur dass dieser Fall als solcher unmöglich ist sondern er kommt, näher besehen, hier gar nicht vor. Denn soll der Punkt B von fünf Punkten A, C, D, E, F umgeben sein, so wird sich offenbar, da sich dann der Punkt F mit den Punkten A und B ebenso unmittelbar berühren muss wie sich C mit denselben unmittelbar berührt, der Punkt E mit dem Punkte A in derselben Weise mittelbar berühren wie sich der Punkt D mit A berührt. Es scheint nun dass, wenn sich der Pnnkt E mit dem Punkte A in derselben Weise berührt wie der Punkt D, jene Schwierigkeit, die im Falle dass sie verschieden sind bestünde, nicht mehr besteht. Tiefer besehen aber enthält dieser Fall im Grunde dieselbe Schwierigkeit wie der erste. Denn wenn es begrifflich notwendig ist dass, sobald der Punkt E zu dem Punkte A eine andere Berührungsart als der Punkt D zu dem Punkte A hat, dann eine schlechthin unbestimmte Reihe von neuen Punkten denkbar ist, die in immer neuen Berührungsarten zu dem Punkte A stehen, ebenso ist es logisch notwendig, dass, wenn der Punkt E dieselbe Berührungsart mit dem Punkte A hat wie der Punkt D zu dem Punkte A, eine schlechthin unbestimmte Menge von neuen Punkten denkbar ist, die dieselbe Berührungsart zu dem Punkte A haben. Denn nicht die Verschiedenheit der Berühnungentfernungen ist es eigentlich, die ihre endlose Vielheit hervorbringt, sondern die Vielheit dieser Berührungen als solche ist es, die sich selbst zu einer solchen macht, sobald ich *zwei* mittelbare Berührungen vorausgesetzt habe hat es keinen Grund mehr nur diese zwei sich zu denken und nicht drei, vier, fünf etc. in infinitum, ganz abgesehen davon ob die ersten zwei gleicher oder ungleicher Art miteinander sind. Hieraus folgt

also unzweifelhaft, dass *fünf* Punkte um einen Punkt herum in der dreieckigen Ebene nicht liegen können.

3.) Aus dem allgemeinen Argumente, welches den zweiten Fall ausschliesst, lässt sich nun sehr leicht die Richtigkeit des dritten möglichen Falls, dass es nämlich *sechs* Punkte sind, die um den einen Centralpunkt der (dreieckigen) Ebene herum liegen, deducieren. Wenn es nämlich absolut unmöglich ist die Ebene geschlossen zu machen solange sich die neu hinzutretenden Punkte entweder in gleicher oder in verschiedener Weise mit dem Ausgangspunkte A berühren, wird dies sobald möglich sobald man voraussetzt, dass sich der Punkt E (der zweite dieser Punkte) mit dem Punkte A überhaupt *nicht* mehr berührt. (In diesem Falle entsteht auch diejenige Schwierigkeit nicht, die im Falle dass sich der Punkt D mit dem Punkte A *gar* nicht berührt, entsteht, da in diesem Falle der Punkt E mit den Punkten B und D (vgl. Fig. 4, Taf. II) nicht in einer Geraden liegt, da er sich mit dem Punkte C ganz ebenso mittelbar berührt wie der Punkt D mit dem Punkte A.) Der Punkt E muss also mit den Punkten A und B nach Def. 14 in einer Geraden liegen. Wie nun der Punkt E mit den Punkten A und B so wird auch der Punkt F mit den Punkten C und B und der Punkt G mit den Punkten B und D in Geraden liegen, und da nun offenbar jeder neue Punkt M mit den schon gegebenen Punkten in einer Geraden liegen müsste und somit mit einem dieser sechs Punkte zusammenfallen müsste (so z. B. müsste der Punkt H mit den Punkten B und E in einer Geraden liegen und also mit dem Punkte A zusammenfallen), so folgt daraus die Richtigkeit des Lehrsatzes unzweifelhaft.

1. Nebensatz.

Die Gerade oder der eindimensionale Raum muss das Bestandtheil der Ebene oder des zweidimensionalen Raumes sein.

Dieser Satz folgt unmittelbar aus der Argumentation zum Fall 3) des obigen Lehrsatzes.

2. Nebensatz.

Von den sinnlich wahrgenommenen regelmässigen Polygonen sind als einfache Polygone nur das Dreieck das Quadrat und das Sechseck möglich, alle anderen aber unmöglich.

Dass das einfache punktuale Dreieck möglich ist, das folgt unmittelbar aus Ax. 7, wonach drei unmittelbar sich berührende Punkte den dreidimensionalen unausgebreiteten Raum darstellen. Das Quadrat ist nach der Argumentation zu Fall 1. des vorigen

Lehrsatzes offenbar solange unmöglich solange ein Punkt als in seinem Inneren gegeben betrachtet wird, denn in diesem Falle entsteht der oben bezeichnete Widerspruch; sobald aber dieser innere Punkt verschwindet und die Berührung zwischen den Punkten C und E als dieselbe gefasst wird wie es diejenige zwischen den Punkten A und D ist, verschwindet dieser Widerspruch vollständig, da dann die Berührung AD nur durch die eine Berührung CE hindurchgeht (man kann sich das Quadrat auch aus dem einfachen Rhombus ABCD durch Verschiebung des Punktes C, aber so dass er sich mit dem Punkt A nicht mehr unmittelbar berührt, entstanden denken. Vgl. darüber Lehrsatz 40.). Das Fünfeck ist nun unmöglich ganz abgesehen davon ob sich ein Punkt in seinem Inneren befindet oder nicht, denn in jedem Falle bleiben die zwei aufeinanderfolgenden imaginären Berührungen seiner Punkte einander gleich, und dann entsteht nach der Argumentation zum Fall 2) der progressus in infinitum, der in diesem Falle die gleichen mittelbaren Berührungen betrifft. Die Möglichkeit des Sechsecks ist oben nachgewiesen worden. Bei dem Siebenecke Achtecke und jedem anderen Vielecke, dessen Seitenzahl $>$ 6 ist, tritt nun ebenso der besagte progressus in infinitum ein, nur dass er sich in diesem Falle offenbar zunächst nur auf die verschiedenen mittelbaren Berührungen bezieht (denn sind die zwei nächsten Berührungen des einfachen Polygons, von einem seiner Punkte aus gerechnet, gleich, dann muss dasselbe Fünfeck sein, besteht die zweite nicht, dann ist dasselbe Sechseck, folglich müssen sie bei allen anderen Polygonen voneinander verschieden sein) und bei den Vielecken mit ungerader Seitenzahl auch mit dem progressus in infinitum der gleichen Berührungen kombiniert ist (der aber in diesem Falle nicht in Betracht gezogen zu werden braucht, da schon der erste als solcher genügt, und man von diesem nicht etwa abstrahieren kann, da dann auch der zweite nicht gelten würde).

Anmerkung. Aus den Argumentationen des obigen Lehrsatzes lässt sich die Unmöglichkeit aller anderen regelmässigen Polygone ausser dem Dreieck dem Quadrat dem Sechseck und nur insofern deducieren inwiefern dabei dieselben in dem ausgebreiteten zweidimensionalen Raume überhaupt als einfache Punktualpolygone zu denken sind. Ob sich aber dieselben in dem ausgebreiteten Raume als zusammengesetzte Gebilde denken lassen oder nicht, folgt daraus noch gar nicht.

10. Lehrsatz.

Durch einen Punkt in der ausgebreiteten ursprünglichen Ebene gehen (oder schneiden sich in demselben) drei reelle Ge-

raden hindurch oder von einem Punkte in derselben gehen sechs reelle Halbgeraden aus.

Nach vorigem Lehrsatz sind um den einen Punkt herum in der Ebene sechs Punkte gegeben, und da je zwei von ihnen mit dem Centralpunkte in gerader Linie liegen, so gehen offenbar drei Geraden durch diesen Centralpunkt hindurch, oder es gehen nach Lehrsatz 6 sechs Halbgeraden von ihm aus. Diese Geraden resp. Halbgeraden werden zunächst elementare Geraden resp. Halbgeraden sein (nach Def. 14 und 16.), aber nur ein Blick auf das ausgebreitete ebene Punktennetz der Figur 6. Taf. I. überzeugt uns, dass nur diejenigen Geraden, die die Fortsetzung dieser elementaren Geraden resp. Halbgeraden sind, reell sind, alle anderen aber imaginär, was ganz natürlich ist, da die Entstehung der reellen Geraden dadurch bedingt ist, dass um jeden Punkt herum sechs Punkte gelegen sind, und dabei immer je drei in Geraden liegen.

11. Lehrsatz.

Von einem Punkte in der ausgebreiteten Ebene gehen unbestimmt viele imaginäre Geraden aus.

Ein Blick auf das ebene ausgebreitete Punktennetz der Figur 6 Taf. I überzeugt uns, dass es von dem Punkte A zwischen den zwei reellen Halbgeraden AF und AA″ unbestimmt viele imaginäre Geraden giebt. Denn wenn wir nur die Punkte B′, C′, D′, E′ etc. in Betracht ziehen, so sehen wir schon daraus ein dass, wie sich nach der Argumentation im Lehrsatz 9 der Punkt B′ mit dem Punkte A mittelbar berühren muss, dass sich nach derselben Argumentation auch die übrigen Punkte C′ D′ E′ etc. mit dem Punkte A mittelbar berühren müssen, ganz abgesehen davon, ob diese imaginären Berührungen gleicher oder ungleicher Art mit jener ersten sind. Da nun die Anzahl dieser Punkte offenbar eine unbestimmte ist, so beweist schon die Betrachtung dieser Reihe von Punkten die Richtigkeit des Lehrsatzes.

Anmerkung. Da es offenbar ist, dass die Anzahl der Punkte in der betrachteten Reihe von der Grösse des discreten Raumes abhängt, so will der Ausdruck der unbestimmten Anzahl der imaginären Geraden nur soviel besagen, dass der Unbestimmtheit der Grösse des discreten Raumes die Unbestimmtheit dieser Zahl seiner imaginären Geraden entspricht, nicht aber dass in einem der Grösse resp. der Anzahl seiner Punkte nach bestimmten Raume die Anzahl der imaginären Geraden eine unbestimmte ist, sie ist in demselben vielmehr ganz bestimmt.

12. Lehrsatz.

Alle reellen Elementargeraden sind von gleicher Art.

Dieser Lehrsatz folgt unmittelbar aus Def. 17. und dem allgemeinen Qualitätsaxiom.

Nebensatz.

Alle reellen Geraden sind von gleicher Art.

Dieser Nebensatz folgt aus den Def. 19, 21 und dem obigen Lehrsatz.

13. Lerhsatz.

Es giebt imaginäre Elementargeraden und Geraden verschiedener Art.

Dass es unter den unbestimmt vielen imaginären Elementargeraden, die nach Lehrsatz 11 von einem Punkte A in der ausgebreiteten Ebene ausgehen (vgl. Figur 6 Taf. I), solche von verschiedener Art giebt, dieser Satz muss besonders bewiesen und deduciert werden.

Aus der Argumentation zu Lehrsatz 9 folgt einleuchtend die Notwendigkeit der mittelbaren Berührung zwischen den Punkten A und B′, und es fragt sich nun ob auch alle die anderen Punkte B″, C′, D′, E′, F′ etc., die sich mit dem Punkte A unzweifelhaft ebenso mittelbar berühren, dies auf dieselbe Weise thun wie der Pünkt B′? Nun zeigt eine nähere Betrachtung der mittelbaren Berührung zunächst des Punktes B″ mit dem Punkte A, dass diese Berührung nicht von derselben Art sein könne, wie die Berührung des Punktes B′ mit dem Punkte A. Wenn sich nämlich der Punkt B″ mit dem Punkte A auf dieselbe Art wie der Punkt B′ berühren würde, so hiesse das offenbar, da sich der Punkt B mit dem Punke A′ auf dieselbe Weise mittelbar berührt wie B′ mit A, dass entweder A′ mit A oder B″ mit B′ zusammenfallen müsste, was jedoch unmöglich ist, da B″ ein Punkt ausserhalb B′ und A′ ein Punkt ausserhalb A ist und sein soll. Folglich muss sich der Punkt B″ mit dem Punkte A in einer anderen Art mittelbar berühren als es der Punkt B′ mit A thut. Es ist nun leicht einzusehen, dass sich ebenso der Punkt C′, da er sich mit dem Punkte B ganz ebenso mittelbar (und mit dem Punkte B′ unmittelbar) berührt wie das mit dem Punkte B″ in Bezug auf die Punkte A′ und B' der Fall ist, mit dem Punkte A in derselben Art mittelbar berühren wird, wie das der Punkt B″ thut. Der Punkt C″ dagegen, der sich mit den Punkten B″ und C′ unmittelbar und mit dem Punkte B′ mittelbar und zwar in derselben Weise mittelbar berührt wie der Punkt B′ mit dem Punkte A, wird sich mit dem Punkte A gar

nicht berühren, d. h. er wird nach Def. 14. mit den Punkten A und B′ in einer Geraden liegen. Dass sich der Punkt C″ mit dem Punkte A gar nicht d. h. weder in einer der beiden bisher deducierten mittelbaren Berührungsarten noch in einer neuen Berührungsart berühren kann, lässt sich leicht beweisen. Er wird sich mit dem Punkte A auf eine der beiden bisher deducierten Arten deshalb nicht mittelbar berühren können, weil wenn er dies auf die erste Art thäte, er dann offenbar mit dem Punkte B′ und wenn er es auf die zweite Art thäte, er dann mit einem der beiden Punkte B″ und C′ zusammenfallen müsste. Soll er sich aber mit dem Punkte A in einer neuen von jenen beiden verschiedenen dritten Art mittelbar berühren, dann müsste diese seine mittelbare Berührung offenbar durch eine der unmittelbaren Berührungen B″B′ und C′B′ hindurchgehen, was nichts anderes bedeuten würde, als dass sie sowohl durch die eine als durch die andere zugleich hindurchgehen müsste (da keine dabei irgend einen Vorzug vor der anderen hat), was wiederum nichts anderes bedeutet, als dass sich der Punkt C″ mit dem Punkte A nicht berühren kann.

Wie wir nun hier für die Punkte B″ und C′ einerseits deduciert haben, dass sie sich mit dem Punkte A in einer neuen von der Berührungsart des Punktes B′ mit dem Punkte A verschiedenen Art mittelbar berühren und andererseits für den Punkt C″ dass er sich mit dem Punkte A gar nicht berührt, also mit den Punkten A und B′ in einer imaginären Geraden liegt, ebenso lässt sich auch für alle die übrigen Punkte jenes Punktennetzes beweisen, dass es unter ihnen Punkte giebt, die sich mit dem Punkte A in neuen von den beiden schon deducierten mittelbaren Berührungsarten verschiedenen Arten berühren, und dass es unter ihnen wieder Punkte giebt, die mit dem Punkte A und je einem dieser mit dem Punkte A sich imaginär berührenden Punkten in entsprechenden imaginären Geraden liegen. Es ist nun nöthig die merkwürdige Thatsache festzustellen, dass unter diesen imaginären Geraden diejenige, welche die Fortsetzung der ersten imaginären Elementargeraden darstellt, in dem Punktenfelde zwischen je zwei reellen Geraden nur eine einzige ist, während es von anderen imaginären Geraden stets je zwei in einem solchen Punktenfelde (dem sechsten Theile des ganzen Feldes) giebt, die gleicher Art miteinander sind. Dies folgt unmittelbar aus der Entstehung der ausgebreiteten Ebene, denn bei dieser Entstehung erscheint zunächst nur die erste imaginäre Elementargerade, so dass bei der Hinzufügung weiterer Punkte die imaginäre Gerade, die durch Fortsetzung aus ihr entsteht, offenbar

eine einzige ist, während die Anordnung dieser Punkte zeigt, dass von jeder anderen imaginären Geraden je zwei solche in dem Punktenfelde zwischen zwei reellen Geraden entstehen, womit auch die Zweiheit dieser reellen Geraden selbst zusammenstimmt.

Anmerkung 1. Wegen dieser ihrer Einzigkeit werden wir die erste Imaginäre auch die *Hauptimaginäre* nennen und werden nunmehr, um die verschiedenen Imaginären voneinander unterscheiden zu können, alle Imaginären, die aus imaginären Elementargeraden entstehen welche die Berührungsentfernungen des Punktes A von den Punkten B′ C′ D′ E′ F′ resp. den Punkten B″ B‴ etc. darstellen, die *ersten* Imaginären nennen, und demgemäss die Imaginären AD″, AE″, AF″ resp. AC‴ etc. die *zweiten* Imaginären nennen etc., so dass unter den ersten Imaginären die allererste Imaginäre eben die Hauptimaginäre ist. Die fundamentale Bedeutung der Hauptimaginären für die discrete Geometrie wird sich uns später an vielen Stellen offenbaren.

Anmerkung 2. Eine besondere Eigenthümlichkeit des discreten Raumes liegt darin, dass es in demselben offenbar Geraden giebt, die durcheinander hindurchgehen ohne einander in einem Punkte zu schneiden. Reelle Geraden schneiden sich zwar alle miteinander, aber sowohl unter den imaginären Geraden als solchen als unter den imaginären und reellen giebt es solche die durcheinander hin durchgehen ohne einander zu schneiden (so z. b. die Imaginären AB″ und BA″, die Imaginäre AB′ und die Reelle BA′ sind solche Geraden).

14. Lehrsatz.

Zwei reelle Geraden sind einander gleich, wenn sie aus einer gleichen Anzahl von reellen Elementargeraden bestehen.

Nach Ax. 9 ist es zunächst klar, dass alle reellen Elementargeraden einander quantitativ gleich sind und sodann auch, dass zwei reelle Geraden, die aus einer gleichen Anzahl von solchen bestehen, einander gleich sind.

15. Lehrsatz.

Zwei imaginäre Geraden sind einander gleich wenn sie aus einer gleichen Anzahl von gleichartigen imaginären Elementargeraden bestehen.

Nach Ax. 9 ist es zunächst klar, dass gleichartige imaginäre Elementargeraden quantitativ einander gleich sind und sodann, dass auch zwei imaginäre Geraden, die aus einer gleichen Anzahl von solchen bestehen, einander gleich sind.

16. Lehrsatz.

Die imaginäre Elementargerade ist grösser als die reelle.

Wir wollen diesen Satz zunächst für die allererste oder die Hauptimaginäre resp. deren Elementargerade beweisen. Die imaginäre Berührungsentfernung AB′ (vgl. Fig. 6 Taf. I) ist entweder kleiner, gleich oder grösser als die reelle Elementargerade AB. Kleiner kann sie deshalb nicht sein, weil das hiesse, dass es eine kleinere Berührungsentfernung giebt als es diejenige des einfachen Zwischenpunktes ist, was dem Ax. 3 widerspricht. Gleich kann sie nicht sein deshalb weil das hiesse, dass sich vier Punkte in der zweidimensionalen Ebene unmittelbar miteinander berühren, was dem Ax. 7 widerspricht. Es bleibt also nur das dritte übrig, d. h. die imaginäre Elementargerade AB′ ist grösser als AB, und es ist zugleich einleuchtend, dass dasselbe auch für jede andere imaginäre Elementargerade gilt.

17. Lehrsatz.

Die Elementargerade ist die kürzeste Linie zwischen zwei sich miteinander berührenden Punkten.

Jede andere Linie, die zwischen den zwei sich miteinander berührenden Punkten liegt, ist entweder grösser, gleich oder kleiner als die zwischen ihnen liegende Elementargerade. Kleiner kann sie nun als diese letztere deshalb nicht sein, weil dann zwischen zwei sich miteinander berührenden Punkten ein Entfernungsverhältniss möglich wäre, welches einfacher als dasjenige der Berührung wäre, was jedoch dem Begriffe dieses letzteren (Def. 4) widerspricht. Gleich kann sie mit der Elementargeraden deshalb nicht sein, weil in diesem Falle dieselbe begrifflich mit dieser letzteren zusammenfallen würde und es demnach zwischen zwei sich miteinander berührenden Punkten zwei Berührungsverhältnisse gäbe, was wiederum dem Begriffe der Berührung widerspricht. Es bleibt also nur das Dritte übrig d. h. sie ist grösser als die Elementargerade.

18. Lehrsatz.

Die Gerade ist die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten.

Zwei Punkte, die sich miteinander nicht berühren, sind offenbar durch Punkte getrennt, die miteinander und mit jenen beiden ersten Punkten in gerader Linie liegen, was aus Def. 14 folgt. Die Gerade, durch die sie getrennt sind, muss nun ganz ebenso die kürzeste Linie zwischen denselben sein, wie die Elementargerade die kürzeste Linie zwischen zwei sich miteinander berührenden Punkten ist. Denn wäre eine andere Linie kleiner als die Gerade, so hiesse

das, dass die beiden Punkte an der betreffenden Stelle im Raume durch eine einfachere Linie getrennt werden könnten als es die Gerade ist, was offenbar unmöglich ist und der eindeutigen Struktur des Raumes widersprechen würde; wäre sie der betreffenden Geraden gleich, dann hiesse das, dass an der betreffenden Stelle im Raume zwei Geraden zwei Punkte miteinander verbinden, was wiederum der eindeutigen Struktur des Raumes widerspricht; sie muss also offenbar grösser als die Gerade sein.

19. Lehrsatz.

Geraden, die von einem Punkte ausgehen, stellen verschiedene Richtungen dar

Nach den Lehrsätzen 10 u. 11 gehen von einem Punkte in der Ebene unbestimmt viele Geraden aus. Jede dieser Geraden ist nach Lehrsatz 7 die Halbgerade einer ganzen Geraden, die durch jenen Punkt hindurchgeht. Da nun nach demselben Lehrsatz jede Halbgerade einer Geraden eine der anderen Halbgeraden derselben Geraden entgegengesetzte Richtung darstellt, so muss jede dieser Halbgeraden, die von einem Punkte ausgehen, da jede von ihnen eine Richtung darstellt und von jeder anderen numerisch verschieden ist, offenbar auch eine qualitativ andere Richtung darstellen, jede Gerade also, die von einem Punkte ausgeht, muss eine Richtung für sich darstellen.

Anmerkung. Zwei Geraden, die von einem und demselben Punkte ausgehen, haben offenbar nur dann eine und dieselbe Richtung wenn sie absolut miteinander zusammenfallen, d. h. eine und dieselbe Gerade darstellen: dies folgt unmittelbar aus den Definitionen der Geraden und der Richtung (was seinen Ausdruck auch im Lehrsatz 6 gefunden hat). Dieser Fall entspricht der absoluten Identität im qualitativen Gebiete (weiss ist weiss). Zwei Geraden, die von einem und demselben Punkte ausgehen, haben offenbar dann entgegengesetzte Richtung, wenn sie Halbgeraden einer und derselben Geraden sind (nach Lehrsatz 7). Dieser Fall entspricht der absoluten Verschiedenheit im qualitativen Gebiete (weiss-schwarz). Der Raum von der ersten Dimension enthält nur diese beiden Fälle der absoluten Gleichheit und der absoluten Verschiedenheit. Im zweidimensionalen Raume erscheint nun eine ganze Menge von Geraden, die diese beiden Fälle in sich enthalten, und jede von ihnen stellt eine besondere Richtung dar. Im qualitativen Gebiete entspricht dem die Menge der qualitativen Gegensatzpaare, die analog der grösseren oder der kleineren Verschiedenheit der Richtungen, die von einem

Punkte ausgehen, einander ähnlicher oder unähnlicher sind (was besonders bei den Lichtqualitäten der Fall ist). Freilich bestehen dabei auch gewisse Unterschiede zwischen denselben, die wir in dem zweiten Unterabschnitte des zweiten Abschnittes der Ontologie hervorheben werden. Hier wollten wir nur hervorheben, wie das Discretionsprincip im Gebiete der räumlichen Grundgebilde analog dem Unterschiedsprincip im Gebiete der qualitativen Formen ist, diese Analogie zur Identität zu erheben ist jedoch Sache der Metaphysik.

20. Lehrsatz.

Geraden, welche durcheinander hindurchgehen, stellen verschiedene Richtungen dar.

Dass es solche Geraden in der Ebene giebt, haben wir in der Anmerkung 2 zu Lehrsatz 13 bemerkt. So sind z. B. die Geraden AC'' und A''F (vgl. Fig. 6 Taf. I) zwei solche Geraden, denn sie haben verschiedene Ausgangspunkte A und A''. Dass nun auch solche Geraden verschiedener Richtung sein müssen, folgt daraus, dass jede von ihnen als solche eine besondere Richtung darstellt und folglich, da sie einen gemeinsamen Durchgang haben, verschiedener Richtung sein müssen.

Anmerkung. Ob und was im qualitativen Gebiete diesem Geradenunterschiede entspricht werden wir in dem zweiten Unterabschnitt des zweiten Abschnittes der Ontologie sehen.

21. Lehrsatz.

Zwei Geraden von verschiedener Richtung müssen sich miteinander begegnen.

Stellt nach den beiden vorigen Lehrsätzen jede der Geraden, die eine gemeinsame Stelle im Raume haben, eine besondere von den anderen verschiedene Richtung dar, so folgt daraus zwar nicht umgekehrt, dass alle Geraden verschiedener Richtung eine gemeinsame Stelle im Raume haben müssen, weil ja viele solche gemeinsame Stellen denkbar sind, aber es folgt aus jenen Lehrsätzen doch mit Gewissheit, dass zwei Geraden verschiedener Richtung sich miteinander begegnen müssen. Denn die vielen Ausgangspunkte der vielen Geraden stehen selbst alle, wie bekannt, in geraden Linien so dass von zwei Geraden verschiedener Richtung die eine stets als eine diese verschiedenen Ausgangspunkte vereinigende Linie betrachtet werden könne, so dass zwei Geraden verschiedener Richtung stets sich miteinander begegnen müssen.

22. Lehrsatz.

Zwei parallele Geraden sind von gleicher Richtung.

Nach Def. 39 sind parallele Geraden diejenigen die sich nirgends schneiden, möge man sie sich forgesetzt denken wie viel man wolle. Solche Geraden müssen nun offenbar von gleicher Richtung sein, denn wären sie von verschiedener Richtung, dann müssten sie sich nach dem vorigen Lehrsatz miteinander begegnen, wären also nicht einander parallel, was der Voraussetzung widerspricht.

Nebensatz.

Parallele Geraden sind von gleicher Art.

Nach dem obigen Lehrsatz sind parallele Geraden gleichgerichtet, nach Lehrsatz 6 stellt jede Gerade eine Richtung dar, folglich müssen gleichgerichtete Geraden auch qualitativ gleich sein.

Anmerkung 1. Der umgekehrte Satz, Geraden gleicher Art seien einander parallel, gilt offenbar deshalb nicht, weil wohl eine bestimmte Richtung durch eine qualitativ bestimmte Gerade dargestellt ist, aber umgekehrt eine und dieselbe qualitative Gerade verschiedene Richtungen im Raume haben könne.

Anmerkung 2. Parallele Geraden stellen offenbar den Fall der reinen numerischen Verschiedenheit bei der vollen qualitativen Gleichheit im Raume dar (wie das eine Weisse und das andere Weisse qualitativ gleich und numerisch verschieden sind): zwei parallele Geraden stellen eine und dieselbe Gerade, die aber an zwei ganz voneinander getrennten Stellen im Raume gesetzt ist, so dass, da jede Gerade eine Richtung für sich darstellt, die Richtung der parallelen Geraden qualitativ eine und dieselbe und nur numerisch eine andere ist (vgl. die Anmerkung zu Lehrsatz 19).

23. Lehrsatz.

Zwei Geragen von gleicher Richtung sind einander parallel.

Wären zwei Geraden von gleicher Richtung nicht miteinander parallel so würden sie sich gemäss der Def. 39 miteinander begegnen. Da aber Geraden die einander begegnen nach den Lehrsätzen 19 und 20 verschiedener Richtung sind, so wären sie also nicht gleicher Richtung, was der Voraussetzung widerspricht.

24. Lehrsatz.

Von einem Punkte aus ausserhalb einer Geraden lässt sich nur eine Parallele zu dieser ziehen (resp. giebt es nur eine Parallele in Bezug auf dieselbe).

Der Punkt ausserhalb der Geraden sei M und die Gerade AB (vgl. Fig. 5 Taf. II). Könnten nun von dem Punkte M' zwei Geraden MN und MP' gezogen werden, die mit der Geraden AB parallel sind (d. h. MN || AB und MP || AB), dann hiesse das offenbar, da nach Lehrsatz 22 parallele Geraden gleichgerichtet sind, dass von einem und demselben Punkte zwei Geraden gleicher Richtung ausgehen können, was jedoch nach Lehrsatz 19 unmöglich ist.

25. Lehrsatz.

Wenn zwei Geraden zu einer dritten Geraden parallel sind, so sind sie auch in Bezug aufeinander parallel.

Nach Lehrsatz 22 sind zwei parallele Geraden gleichgerichtet; wenn demnach zwei Geraden zu einer dritten parallel sind, dann sind sie in Bezug auf dieselbe von gleicher Richtung, jede von ihnen stellt also ein anderes Exemplar jener ersten Geraden dar, folglich sind sie also auch untereinander gleich gerichtet, d. h. einander parallel. Es ist leicht einzusehen, dass aus demselben Grunde auch der folgende Nebensatz gilt.

Nebensatz.

Alle Geraden, die in Bezug auf eine Gerade parallel sind, sind auch untereinander parallel.

26. Lehrsatz.

Die einander entsprechenden Punkte zweier Geraden von verschiedener Richtung entfernen sich immer mehr voneinander je weiter und nähern sich immer mehr zueinander je näher sie der gemeinsamen Begegnungsstelle der Geraden sind.

Ein Blick auf das Punktennetz der Figur 6 (Taf. I) zeigt, dass die Punkte z. B. der Geraden AC″ und der Geraden AF desto entfernter voneinander sind, je ferner sie von dem Ausgangspunkte beider sind (der Punkt B′ ist von dem Punkte B um eine, der Punkt C″ vom Punkte C um zwei Einheiten etc. entfernt), was unmittelbar aus der discreten Struktur des Raumes folgt, da der Punkt C″, weil er sich mit dem Punkte A nicht berührt, nicht an der Stelle des Punktes C′ stehen kann, in welchem Falle er als der zweite Punkt der Strecke AB′ sich von dem zweiten Punkte C der Strecke AF gar nicht entfernen würde. Es ist nun leicht einzusehen, dass in ähnlicher Weise der Satz für jedes Geradenpaar bewiesen werden könne und derselbe demnach allgemein gilt. Dass sich dann die Punkte zweier Geraden desto mehr einander

nähern werden je näher sie der gemeinsamen Begegnungsstelle beider liegen, ist eine selbstverständliche Umkehrung dieses Satzes.

27. Lehrsatz.

Wenn die einander entsprechenden Punkte zweier Geraden verschiedenen Abstand voneinander haben, dann müssen die beiden Geraden verschiedener Richtung sein und einander begegnen.

Haben die entsprechenden Punkte zweier Geraden verschiedenen Abstand voneinander, so heisst das offenbar dass sie sich auf der einen Seite voneinander entfernen und auf der anderen einander nähern, und da der Raum auf Grund des Ax. 2 endlich ist, so muss auch diese ihre Annäherung ein Ende haben, d. h. die beiden Geraden müssen sich begegnen.

1. Nebensatz.

Geraden, deren einander entsprechende Punkte überall einen und denselben Abstand voneinander haben, müssen einander parallel sein

Wenn Geraden, deren einander entsprechende Punkte verschiedenen Abstand voneinander haben, einander begegnen, so können offenbar Geraden, die überall einen und denselben Abstand haben, einander nicht begegnen, da sie sich weder voneinander entfernen noch sich einander nähern.

2. Nebensatz.

Die entsprechenden Punkte der parallelen Geraden haben überall einen und denselben Abstand voneinander.

Hätten die parallelen Geraden verschiedenen Abstand voneinander, dann müssten sie sich nach dem obigen Lehrsatz miteinander begegnen, folglich haben sie überall einen und denselben Abstand voneinander.

28. Lehrsatz.

Zwei Geraden schliessen keinen Raum ein.

Es sind offenbar zwei Fälle möglich.

1. Fall. Die beiden Geraden sind von gleicher Richtung.

Da Geraden gleicher Richtung nach Lehrsatz 23 parallel sind, parallele Geraden aber nach Lehrsatz 27, 2 Nebensatz überall einen und denselben Abstand haben und sich demnach miteinander weder in der einen noch in der anderen Richtung begegnen können, so können sie offenbar keinen Raum einschliessen.

2. Fall. Die beiden Geraden sind verschiedener Richtung.

Nach Lehrsatz 26 haben die Geraden verschiedener Richtung offenbar nur eine Begegnungsstelle, da deren Punkte sich nur auf der einen Seite einander nähern und auf der anderen voneinander entfernen, so dass zwei Geraden keinen Raum einschliessen können.

29. Lehrsatz.

Um einen Punkt herum sind in der ursprünglichen Ebene sechs reelle Winkel oder Grundwinkel gegeben.

Nach Lehrsatz 10 gehen von einem Punkte der ursprünglichen Ebene sechs reelle Halbgeraden aus; nach Lehrsatz 19 stellt jede solche Gerade eine besondere Richtung dar; nach der Def. 28. werden je zwei dieser Geraden einen Winkel bilden und nach Def. 31. wird dieser Winkel ein reeller oder ein Grundwinkel sein; folglich sind um einen Punkt herum sechs reelle Winkel oder Grundwinkel in der Ebene gegeben.

Anmerkung. Dieser reelle Grundwinkel der ursprünglichen Ebene ist als Winkeleinheit zu betrachten und wir werden ihn deshalb ziffernmässig mit 1 und, um ihn von dem rechten Winkel, welcher mit R bezeichnet wird, zu unterscheiden, alphabetisch mit P bezeichnen.

Nebensatz.

Der Winkel, den die zwei Halbgeraden einer Geraden (der ebene Winkel) einschliessen, beträgt in der ursprünglichen Ebene 3 P.

Nach dem obigen Lehrsatz sind um den einen Punkt herum in der ursprünglichen Ebene 6 Grundwinkel gegeben, so dass der ganze Winkel 6 P beträgt. Da aber nach der Arg. zu Lehrsatz 9 der vierte von den sechs Punkten, die gesetzt werden müssen, damit der ausgebreitete zweidimensionale Raum um den einen Punkt herum geschlossen werde, mit dem ersten dieser Punkte in gerader Linie stehen müsse, so beträgt offenbar der Richtungsunterschied der beiden elementaren Halbgeraden dieser Geraden 6 P: 2 d. h. gleich 3 P.

30. Lehrsatz.

Um einen Punkt herum sind in der Ebene unbestimmt viele verschiedenartige imaginäre Winkel gegeben.

Nach den Lehrsätzen 11 und 13 gehen von einem Punkte aus in der Ebene unbestimmt viele imaginäre Geraden verschiedener Art und da jede von ihnen nach Lehrsatz 19 eine besondere Richtung darstellt, so bilden je zwei von ihnen nach den Def. 28 und 30 imaginäre Winkel, so dass um einen Punkt herum unbestimmt viele imaginäre Winkel verschiedener Art gegeben sind.

Anmerkung. Unter den unbestimmt vielen verschiedenartigen Winkeln, die um den einen Punkt herum in der ursprünglichen Ebene gegeben sind, können nach den Def. 29, 30, und 35—38 folgende Arten unterschieden werden: 1) einfache; 2) zusammengesetzte; 3) gleichartige; 4) ungleichartige; 5) einfache gleichartige; 6) einfache ungleichartige; 7) zusammengesetzte gleichartige; 8) zusammengesetzte ungleichartige; 9) einfache, die sich in einfachere Winkel, die untereinander gleichartig sind, nicht zerlegen lassen und 10) einfache, die sich in solche untereinander gleichartige Winkel zerlegen lassen.

31. Lehrsatz.

Zwei in ihrer Art einfache gleichartige Winkel, die sich in (andere) einfache untereinander gleichartige Winkel nicht zerlegen lassen, sind einander gleich.

Dieser Lehrsatz folgt aus den Def. 35, 37 und dem Ax. 9. (vgl. Fig. 6 Taf. II).

Nebensatz.

Zwei in ihrer Art einfache gleichartige Winkel, die sich in eine gleiche Zahl von (anderen) einfachen untereinander gleichartigen Winkeln zerlegen lassen, sind einander gleich.

Dieser Nebensatz folgt unmittelbar aus dem obigen Lehrsatz, da die einfachen untereinander gleichartigen Winkel, in die sich ein einfacher Winkel zerlegen lässt, nicht weiter in solche zerlegbar sind und demnach einander gleich sind. (vgl. Fig. 7 Taf. II).

32. Lehrsatz.

Zwei in ihrer Art einfache ungleichartige Winkel, die sich in eine gleiche Zahl von (anderen) einfachen untereinander gleichartigen Winkeln zerlegen lassen, sind einander gleich.

Dieser Lehrsatz folgt aus den Def. 35—37 und dem Ax. 9. (vgl. Fig. 8 Taf. II).

33. Lehrsatz.

Zwei in ihrer Art zusammengesetzte (gleich- oder ungleichartige) Winkel, die sich in eine gleiche Zahl von gleichen einfachen Winkeln zerlegen lassen, sind einander gleich.

Dieser Lehrsatz folgt unmittelbar aus den Def. 35—38 und dem Ax 9. (vgl. die Fig. 9 und 10 Taf. II).

34. Lehrsatz.

Zwei einander schneidende Geraden machen gleiche Scheitelwinkel.

Die zwei Geraden seien AB und CD und ihr Schnittpunkt O (vgl. Fig. 11, Taf. II). Nun wird $\sphericalangle$ AOD = COB sein offenbar deshalb, weil die Schenkel AO und OB einerseits und die Schenkel CO und OD andererseits als Halbgeraden der Geraden AB und CD nach Lehrsatz 7 entgegengesetzte Richtung haben, so dass nach Ax. 9. der Richtungsunterschied von AO und OD gleich demjenigen von CO und OB sein wird.

35. *Lehrsatz.*

Wenn zwei Geraden von einer dritten so geschnitten werden dass die dabei entstehenden 1) correspondierenden Winkel und 2) Wechselwinkel einander gleich sind und 3) die Summe der Gegenwinkel gleich 3 P (resp 2 R) ist, so sind sie einander parallel

Die beiden Geraden seien AB und CD und die sie Schneidende MN, die entsprechenden Schnittpunkte O und O_1 (Fig. 12, Taf II); α und ε, β und ζ, γ und η, δ und ϑ die vier Paare der correspondierenden; α und η, β und ϑ, γ und ε, δ und ζ die vier Paare der Gegen-; α und ϑ, β und η, γ und ζ, δ und ε die vier Paare der Wechselwinkel.

Es sollen also

1) $\alpha=\varepsilon$, $\beta=\zeta$, $\gamma=\eta$, $\delta=\vartheta$

2) $\alpha=\vartheta$, $\beta=\eta$, $\gamma=\zeta$, $\delta=\varepsilon$ und

3) $\alpha+\eta=3$ P, $\beta+\vartheta=3$ P, $\gamma+\varepsilon=3$ P, $\delta+\zeta=3$ P sein.

1) Sind die correspondierenden Winkel z. B. α und ε einander gleich, dann müssen ihre Schenkel AO und O_1C gleiche Richtung haben, weil ihr Richtungsunterschied von einer und derselben Geraden MN ein gleicher ist, und dieselben auf einer und derselben Seite in Bezug auf die letztere gelegen sind so dass die beiden in Bezug auf diese letztere Gerade eine und dieselbe Richtung darstellen und demnach, nach einem allgemeinen Grössenaxiom, auch untereinander die gleiche Richtung darstellen werden. Da aber der Voraussetzung nach AO und CO_1 Halbgeraden der Geraden AB und CD sind, so müssen auch AB und CD gleiche Richtung haben, d. h. nach Lehrsatz 23 einander parallel sein. Dasselbe lässt sich in ähnlicher Weise aus der Gleichheit jedes anderen Paares der correspondierenden Winkel schliessen.

2) Sind die Wechselwinkel z. B. α und ϑ einander gleich, so müssen ihre Schenkel AO und O_1D entgegengesetzte Richtung in Bezug aufeinander haben, da sie mit einer dritten Geraden gleichen Richtungsunterschied haben aber nicht auf einer und derselben Seite

in Bezug auf dieselbe liegen; da sie nun Halbgeraden der Geraden AB und CD sind, so müssen diese Geraden nach den Lehrsätzen 7 und 23 offenbar einander parallel sein. Auf ähnliche Weise lässt sich dasselbe aus jedem anderen Paare der Wechselwinkel deducieren.

3) Ist die Summe z. B. der Gegenwinkel $\delta+\zeta=3P$ dann ist, da nach Lehrsatz 29 Nebensatz $\gamma+\delta=3$ P ist und demnach $\delta+\zeta=\gamma+\delta$ also $\gamma=\zeta$, nach dem ersten Theile dieses Lehrsatzes, da γ und ζ Wechselwinkel sind, AB || CD. Auf ähnliche Weise lässt sich dasselbe aus jedem anderen Paar der Gegenwinkel deducieren.

36. Lehrsatz.

Wenn zwei Geraden einander parallel sind so macht eine dritte sie schneidende 1) die correspondierenden Winkel und 2) die Wechselwinkel einander gleich und 3) die Summe der Gegenwinkel gleich 3 P.

Ist die Gerade AB || CD (vgl. die Figur d. v. L.) dann müssen z. B. die corresp. Winkel α und ε einander gleich sein, weil die Halbgeraden OA und O_1C gleiche Richtung haben. Denn wären diese Winkel nicht einander gleich, dann liesse sich offenbar in dem Punkte O_1 eine Gerade O_1C_1 (resp. C_1D_1) ziehen, deren Richtungsunterschied in Bezug auf die Gerade MN gleich ε' wäre und nach dem vorigen Lehrsatze müssten dann, AO und O_1 C_1 resp. AB und C_1 D_1 einander parallel sein. Da nun nach der Voraussetzung AB || CD resp. C_1 D_1 ist so hiesse das offenbar, dass sich von einem und demselben Punkte O_1 zwei Geraden in Bezug auf eine dritte ausserhalb dieses Punktes liegende Gerade ziehen liessen, was jedoch nach Lehrsatz 24 unmöglich ist.

In ähnlicher Weise lässt sich leicht nach den entsprechenden Beweisen in dem vorigen Lehrsatz (direkt und indirekt) auch der Beweis für die anderen Fälle führen.

37. Lehrsatz.

Die Hauptimaginäre theilt den Grundwinkel in zwei gleiche Theile.

Nach Lehrsatz 13. Anmerkung 1. giebt es in jedem Grundwinkel nur eine Hauptimaginäre. Da nun diese Hauptimaginäre mit den beiden reellen Geraden des Grundwinkels nach den Def. 35, 37 zwei einfache gleichartige Winkel macht, die sich in andere untereinander gleichartige Winkel nicht zerlegen lassen, so sind diese beiden Winkel nach Lehrsatz 31 einander gleich, folglich theilt die Hauptimaginäre den Grundwinkel in zwei gleiche Theile.

38. Lehrsatz.

In der ursprünglichen Ebene fällt die Senkrechte mit der Hauptimaginären zusammen.

Wenn nach dem vorigen Lehrsatz die Hauptimaginäre den Grundwinkel in zwei gleiche Theile theilt, wenn nach Lehrsatz 29 Nebensatz der ebene Winkel 3 P beträgt und wenn nach Def. 32 die Senkrechte diejenige Gerade ist die den ebenen Winkel in zwei gleiche Theile theilt und somit der rechte Winkel $1\frac{1}{2}$ P beträgt, so wird offenbar die Senkrechte mit der Hauptimaginären zusammenfallen und zwar mit derjenigen Hauptimaginären, die den mittleren Grundwinkel der drei Grundwinkel des ebenen Winkels in zwei gleiche Theile theilt.

Nebensatz.

In der ursprünglichen Ebene sind um den einen Punkt herum vier rechte Winkel gegeben.

Fällt nach dem obigen Lehrsatz die Senkrechte mit der Hauptimaginären zusammen, so ist der rechte Winkel offenbar in der ursprünglichen Ebene als solcher möglich und vorhanden. Nun beträgt er offenbar nach der Arg. zum obigen Lehrsatz $1\frac{1}{2}$ P, nach Lehrsatz 29 sind aber um einen Punkt herum 6 P gegeben, folglich sind, da $6\,P : 1\frac{1}{2}\,P = 4$ ist, in der ursprünglichen Ebene um einen Punkt herum 4 R gegeben.

39. Lehrsatz.

Von einem Punkte ausserhalb einer Geraden lässt sich nur eine Senkrechte in Bezug auf dieselbe ziehen (resp. existiert nur eine Senkrechte in Bezug auf dieselbe).

Nach Def. 32 ist die Senkrechte eine solche Gerade welche mit den Halbgeraden einer anderen Geraden gleiche Richtungsunterschiede hat, sie stellt also offenbar eine ganz bestimmte Richtung dar. Liessen sich nun von einem Punkte ausserhalb einer Geraden zwei Senkrechte in Bezug auf dieselbe ziehen, so hiesse das offenbar, dass von einem Punkte zwei Geraden gleicher Richtung ausgehen können, was nach Lehrsatz 19 unmöglich ist. Auf Grund desselben Arguments gilt auch der folgende

Nebensatz.

Von einem Punkte auf einer Geraden lässt sich nur eine Senkrechte in Bezug auf dieselbe ziehen.

40. Lehrsatz.

Die Ebene lässt sich aus einfachen Quadraten zusammensetzen.

Nach Def. 23 ist das einfache Quadrat diejenige Elementarebene in der sich vier Punkte so miteinander berühren, dass sich je zwei von ihnen successive unmittelbar und je zwei von ihnen mittelbar miteinander berühren. Diese quadratische Elementarebene entsteht in der dreieckigen ausgebreiteten Ebene, wenn alle die reellen Geraden, die von den Punkten einer und derselben reellen Geraden ausgehen, so verschoben gedacht werden, dass sie in die Richtung der Hauptimaginären zu stehen kommen, selbstverständlich nur in der Richtung derjenigen Hauptimaginären, die senktrecht auf der reellen Grundgeraden stehen, d. h. sie sind nicht um den halben Grundwinkel dieser Geraden zu sondern von ihr weg verschoben zu denken. Dass diese Verschiebung möglich und dass nur sie möglich ist, folgt aus folgenden Gründen:

1.) Die Verschiebung der reellen Geraden in der Richtung der imaginären ist ganz wohl möglich, da beide als solche räumliche Entfernungsverhältnisse zwischen den Punkten sind, und demnach überhaupt in einer und derselben Richtung sowohl diese wie jene qualitativ bestimmte Gerade möglich und denkbar ist. Freilich wäre diese vorausgesetzte Gleichgültigkeit der Qualität der Geraden in Bezug auf die von ihr repräsentierte Richtung nicht möglich, wenn es nicht zuvor einen Raum geben würde, in dem zwar jede qualitativ bestimmte Gerade eine besondere Richtung darstellt, in dem aber umgekehrt nicht jede einzelne Richtung durch eine einzigartige qualitativ bestimmte Gerade dargestellt ist, in dem vielmehr verschiedene Richtungen durch qualitativ gleichartige Geraden dargestellt sind, worin eben die Gleichgültigkeit der Qualität der Geraden in Bezug auf die von ihr repräsentierte Richtung liegt. Und diese Gleichgültigkeit findet eben in dem dreieckigen ursprünglichen ebenen Raume statt (vgl. die Anmerkung 1 zu Lehrsatz 22 Nebensatz) Wenn nun so eine und dieselbe Gerade verschiedene Richtungen repräsentieren kann, so hindert nichts vorauszusetzen, dass die eine Gerade in die Richtung der anderen Geraden kommen könne, d. h. dass die eine in der Richtung der anderen verschoben werden könne.

2.) Obgleich nun so die Verschiebung der Geraden im Raume im Princip möglich ist und im Princip somit jede Gerade an die Stelle der anderen verschoben gedacht werden könne, wobei selbstverständlich auch alle anderen Geraden ohne Änderung der von der specifischen Qualität der Geraden unabhängigen Raumrelationen entsprechend verschoben werden, so folgt daraus doch noch gar nicht,

dass diese Verschiebung auch für jede Gerade im Einzelnen und in Bezug auf jede Richtung möglich und denkbar ist. Da die imaginären Geraden nur durch die reellen gesetzt und möglich sind, so lassen sich die imaginären Geraden offenbar nur durch die reellen verschieben, und es sind somit bei den imaginären Geraden nur diejenigen Verschiebungen möglich, die durch die Verschiebung der reellen Geraden gleichsam zugelassen werden. Und dann weiter sind nur diejenigen Verschiebungen der reellen Geraden denkbar, bei denen unter ihren Punkten keine unmöglichen Berührungsentfernungen entstehen. So ist z. B. in dem obigen Falle die Verschiebung der reellen Geraden in der Richtung der Hauptimaginären, die um einen halben Grundwinkel von der reellen Grundgeraden entfernt sind, deshalb unmöglich, weil in diesem Falle zwischen ihren unmittelbar sich berührenden Punkten Berührungsentfernungen entstünden (vgl. Fig. 13 Taf. II) die < 1 sind, und diese unmöglich sind. Aus demselben Grunde sind auch die Verschiebungen der reellen Geraden in allen den imaginären Richtungen, die in demjenigen (dem ersten) Grundwinkel liegen, den jede dieser reellen Geraden mit der Grundgeraden einschliesst, unmöglich.

Die principielle Möglichkeit der Verschiebung der verschiedenen Geraden in verschiedenen Richtungen haben wir soeben im Einzelnen schon so weit eingeschränkt, dass bis zu ihrer völligen Aufhebung nicht viel übrig bleibt. Denn es ist aus dem Obigen ersichtlich, dass nur noch die Möglichkeit der Verschiebung der reellen Geraden in der Richtung der imaginären in dem mittleren der drei Grundwinkel, in die der ebene Winkel der Grundgeraden (nach Lehrsatz 29. Nebensatz) zerfällt, übrig geblieben ist, in demjenigen Grundwinkel, dessen Hauptimaginäre von der Grundgeraden um $1\frac{1}{2}$ Grundwinkel absteht. In diesem Falle entstehen nämlich keine schon auf den ersten Blick unmöglichen Berührungen der einander gegenüberliegenden Punkte der einfachen Rhomben, in denen die sich miteinander berührenden Punkte gegeben sind, da die entsprechenden mittelbaren Berührungen, die dabei entstehen, > 1 sind. Je näher nun dabei die Verschiebung der reellen Geraden der Richtung der entsprechenden Hauptimaginären ist, desto mehr nähern sich auch diese mittelbaren Berührungen ihrer Grösse nach einander, bis sie schliesslich, wenn die reellen Geraden in die Richtung der Hauptimaginären zu stehen kommen, einander gleich werden. Dass in diesem Falle nun die einfachen Rhomben zu einfachen Quadraten werden, und dass sie dies wirklich nur dann werden, wenn die reellen Geraden in die Richtung der Hauptimaginären

zu stehen kommen, folgt einfach daraus dass, da durch die Verschiebung der Geraden nur die qualitative Beschaffenheit der Richtungen umgeändert wird und nichts weiter und infolgedessen alle fundamentalen Relationen zwischen denselben unverändert bleiben, die imaginäre Elementargerade den entsprechenden reellen Winkel in jedem einfachen Rhombus (nach Lehrsatz 37) in zwei gleiche Theile theilen wird und dass, da wenn diese imaginären Elementargeraden einander gleich werden sie dann (vgl. weiter unten) auch qualitativ gleich sein werden, die vier reellen Winkel jedes einfachen Rhombus einander gleich sein werden, so dass dieser Rhombus offenbar nach den Def. 54, 55 das einfache Quadrat darstellen wird. Da nun offenbar nach Lehrsatz 36 die Summe der zwei an einer Seite liegenden Winkel des Rhombus gleich 3 P ist, so wird dasselbe auch beim Quadrat der Fall sein, folglich wird ein Winkel desselben $1\frac{1}{2}$ P sein, folglich werden die entsprechenden reellen Geraden nach Lehrsatz 38 in der Richtung der Hauptimaginären liegen. Dass nun, wenn wir uns die reellen Geraden in diesem Falle über die Hauptimaginäre hinaus verschoben denken, dabei dieselben einfachen Rhomben zwischen ihren Punkten entstehen werden wie früher nur in umgekehrter Reihenfolge, ist leicht einzusehen und es werden somit durch diese Verschiebungen keine neuen Punktensysteme gesetzt werden.

Es bleibt nun zu untersuchen, ob wirklich alle die Punktensysteme, die durch die Verschiebung der reellen Geraden in der einen Hälfte des besagten mittleren Grundwinkels entstehen, möglich und denkbar sind, wie das wohl auf den ersten Blick der Fall zu sein scheint. Die Möglichkeit dieser Punktensysteme führt sich offenbar darauf zurück, ob die vielen mittelbaren Berührungen in den entsprechenden einfachen Rhomben möglich sind oder nicht. Nun ist es ohne weiters einleuchtend, dass alle diese vielen Berührungen von einer und derselben Art sind, da sie alle auf dieselbe Weise in dem einfachen Punktensystem jedes Rhombus gesetzt sind, und es fragt sich somit, ob eine und dieselbe mittelbare Berührung verschiedene Grösse haben könne, da jene vielen mittelbaren Berührungen nur quantitativ voneinander verschieden sind. Wie wir nun in dem ersten der obigen Fälle, in dem es einander gegenüberliegende Punkte der einfachen Rhomben gab deren Berührungsentfernung < 1 war, diese letzteren deshalb für unmöglich erklärten, weil unmittelbare Berührungen von verschiedener Grösse nicht möglich sind, ebenso müssen wir die Unmöglichkeit der mittelbaren Berührungen verschiedener Grösse, wenn sie nur von einer und derselben Art sind, für unmöglich erklären, denn Berührung ist ihrem allge

meinen Begriffe nach (vgl. Def. 4) ganz dieselbe, und wenn unmittelbare Berührungen verschiedener Grösse deshalb unmöglich sind, weil dies die unmittelbare Berührung als Berührung (einer bestimmten Art) ausschliesst, so gilt dasselbe offenbar auch in diesem Falle. Derselbe Grund also, der die Verschiebung der reellen Geraden im ersten Falle unmöglich gemacht hat — dass es auch in dem ersten Falle neben den unmittelbaren Berührungen von verschiedener Grösse auch solche giebt, die mittelbar und zwar mittelbar von einer und derselben Art sind soll hier noch besonders hervorgehoben werden, da daraus die Richtigkeit jener unseren Folgerung noch mehr einleuchtet — macht auch in diesem zweiten Falle dieselbe Verschiebung unmöglich.

Es möchte nun auf Grund dieser Ausführungen zunächst scheinen, dass ebenso wie in dem ersten Falle alle die durch Verschiebung entstandenen Punktensysteme unmöglich sind, dass auch in diesem zweiten Falle alle durch Verschiebung entstandenen Punktensysteme unmöglich sind. Dies wäre nun, wie leicht einzusehen ist, nur dann der Fall, wenn die mittelbare Berührung in den einfachen Rhomben in dem zweiten Falle dieselbe wäre mit derjenigen im ersten Falle. Ist sie aber in dem zweiten Falle eine der Art nach verschiedene, dann wird offenbar unter den entsprechenden Punktensystemen nur diejenige möglich sein, in der die beiden mittelbaren Berührungen der einfachen Rhomben ihrer Grösse nach einander gleich sind, d. h. diejenige in der die einfachen Rhomben einfache Quadrate geworden sind. Und thatsächlich ist, wenn man sich die Sache nur näher betrachtet, die mittelbare Berührung in dem zweiten Falle qualitativ eine andere als diejenige in dem ersten, denn sie ist nicht in beiden Fällen auf eine und dieselbe Weise gesetzt. Im ersten Falle geht nämlich die mittelbare Berührung in jedem einfachen Rhombus durch die unmittelbare Berührung hindurch, im zweiten Falle dagegen ist die Struktur des einfachen Rhombus eine solche, dass die eine mittelbare Berührung durch die (numerisch andere) mittelbare Berührung hindurchgeht, folglich sind sie in beiden Fällen nicht auf eine und dieselbe Weise gesetzt und folglich stellen sie nicht eine und dieselbe mittelbare Berührungsart dar. (Im Absch. 3. werden wir noch einen einleuchtenderen Beweis für ihre Verschiedenheit geben). Ist dem aber so, dann ist offenbar jene Verschiebung der reellen Geraden, die in der Richtung der Hauptimaginären welche um $1\frac{1}{2}$ Grundwinkel von der reellen Grundgeraden abstehen geschieht, möglich, und zwar einzig und allein möglich. Da aber in diesem Falle die einfachen Rhomben zu ein-

fachen Quadraten werden, so ist es offenbar, dass die Ebene aus einfachen Quadraten zusammengesetzt werden kann, womit der obige Lehrsatz bewiesen ist.

Anmerkung 1. Die Verschiebung, durch welche die quadratische Ebene aus der dreieckigen entsteht, ist nicht im Sinne der Bewegung sondern einzig und allein in rein logischem Sinne zu verstehen. Aber nicht nur dass diese rein logische Verschiebung völlig unabhängig von der Bewegung ist, sondern die Bewegung selbst ist nur auf Grund derselben möglich. Durch die Bewegung wird nämlich eine reelle Gerade resp. ein bestimmter Theil derselben (ein Segment, schliesslich nur ein Punkt) an die Stelle der anderen reellen Geraden gesetzt, dabei ändern nur die qualitativ gleichen Geraden ihre gegenseitigen Richtungen, wobei offenbar der Raum selbst seiner inneren geometrischen Struktur nach gar keine Änderung erfährt. Da bei der Bewegung nur reelle Geraden verschoben werden, so spielen dabei offenbar die imaginären Richtungen gar keine Rolle. Ganz anders aber ist dies der Fall, wenn die reellen Geraden in der Richtung der imaginären verschoben werden. Diese Verschiebung kann eben nicht mehr durch Bewegung sondern einzig und allein durch qualitative Veränderung d. h. durch absolutes Setzen und Aufheben des Raumes zu Stande kommen. Statt des dreieckigen Raumes kann dann ganz wohl der quadratische gesetzt werden, da die Setzung der realen Punkte in der Richtung der betreffenden Hauptimaginären in dem dreieckigen Raume logisch ganz wohl möglich ist. Während bei der Bewegung der Raum des einen Augenblicks von dem Raume des früheren Augenblicks reell bedingt ist, ist dies bei der qualitativen Setzung des quadratischen Raumes nicht mehr der Fall, der dreieckige Raum muss nur ideell dem quadratischen vorausgehen, aber nicht auch reell.

Anmerkung 2. Da die quadratische Ebene durch Verschiebung aus der dreieckigen entsteht, so bleiben offenbar alle die fundamentalen Relationen zwischen den räumlichen Grundgebilden, welche von der Qualität der Geraden unabhängig sind, auch in der neuen Ebene bestehen, so dass alle die Lehrsätze, in denen diese Relationen ihren Ausdruck finden, auch für diese gelten. Von den bisherigen Lehrsätzen, welche zunächst alle für die dreieckige Ebene gelten, gelten alle auch für die quadratische mit Ausnahme der Lehrsätze 9, 10 und 29; von den nun folgenden werden ebenso alle für beide Ebenen gelten mit Ausnahme einiger, die entweder nur für die eine oder für die andere gelten. Von nun an werden wir demgemäss auch

quadratische Gebilde zum Beweise der Lehrsätze gebrauchen. Besonders herzorzuheben ist es, dass der Lehrsatz 13 für die quadratische Ebene in analogem Sinne gilt wie für die dreieckige, dass jede Imaginäre in der dreieckigen Ebene eine analoge Imaginäre in der quadratischen Ebene hat (vgl. Fig. 13 Taf. II), dass insbesondere der Hauptimaginären in der dreieckigen Ebene die Hauptimaginäre in der quadratischen Ebene entspricht, und dass diese letztere in der quadratischen Ebene dieselbe Rolle spielt wie die entsprechende Hauptimaginäre in der dreieckigen Ebene mit der einzigen Ausnahme, dass vermittelst ihrer nicht eine Zurückentstehung der dreieckigen Ebene aus der quadratischen möglich ist wie das umgekehrt der Fall ist, da es, wie wir später zeigen werden (vgl. Absch. 3.), in der quadratischen Ebene keinen Winkel von der Grösse des Grundwinkels P der dreieckigen Ebene giebt, wie das mit dem $1\frac{1}{2}$ P betragenden Winkel der dreieckigen Ebene in Bezug auf die quadratische der Fall ist, und dass der Mangel eines solchen Winkels die Deduction der dreieckigen Ebene aus der quadratischen zu einer unmöglichen macht. In dieser Thatsache der Unmöglichkeit der Deduction der dreieckigen aus der quadratischen Ebene zeigt sich aber eben, dass die quadratische Ebene wirklich *abgeleitet*, während die dreieckige einzig und allein als *ursprüngliche* gilt und gelten kann.

Anmerkung 3. Dass die quadratische Ebene wirklich und zwar nur auf die oben angegebene Weise aus der dreieckigen entsteht, lässt sich sehr leicht einsehen wenn man den Versuch macht, das einfache Quadrat ganz unabhängig von der dreieckigen Ebene zu deducieren. Man kann nämlich versuchen, das einfache Quadrat direkt auf die Weise zu deducieren, dass man dasselbe als durch die Hinzufügung einer Elementargeraden zu der anderen und zwar so, dass sich jeder Punkt der einen nur mit einem Punkte der anderen unmittelbar und mit dem anderen mittelbar berührt, entstanden denken. Auf diese Weise könnte aber das einfache Quadrat offenbar nur dann entstehen, wenn die Möglichkeit der mittelbaren Berührung schon da wäre, diese Möglichkeit muss also schon anderwärts bekannt sein, damit das einfache Quadrat da ist. Ganz anders verhält sich die Sache bei dem einfachen Rhombus der dreiekigen ausgebreiteten Ebene: die Möglichkeit dieses Rhombus (vgl. Lehrsatz 9, 1.) steht von vorneherein fest und daraus entspringt mit absoluter Gewissheit die Möglichkeit der mittelbaren Berührung. Die Existenz des einfachen Quadrats setzt also die Existenz der mittelbaren Berührung voraus, während umgekehrt die Existenz der mittelbaren Berührung

die Existenz des einfachen Rhombus der dreieckigen ausgebreiteten Ebene voraussetzt. Da nun die mittelbare Berührung ursprünglich einzig und allein durch und in der dreieckigen ausgebreiteten Ebene gesetzt ist, so folgt daraus unzweifelhaft, dass das einfache Quadrat nur dann möglich sein wird, wenn dasselbe auf irgend welche Weise in dieser ursprünglichen Ebene entstehen kann. Dass es nun nur in der oben angegebenen Weise in dieser Ebene entstehen kann ist etwas was aus der inneren geometrischen Struktur dieser letzteren einleuchtet und nicht noch weiter begründet zu werden braucht.

41. Lehrsatz.

In der quadratischen Ebene gehen durch jeden Punkt hindurch zwei reelle Geraden oder es gehen von jedem Punkte in ihr vier reelle Halbgeraden aus.

Nach dem vorigen Lehrsatz entsteht die quadratische Ebene aus der dreieckigen dadurch, dass in dieser die Hauptimaginäre, deren Richtungsunterschied von der reellen Geraden gleich $1\frac{1}{2}$ P beträgt, selbst zur reellen wird. Da nun nach Lehrsatz 29 der ganze Winkel um einen Punkt herum in der dreieckigen Ebene 6 P beträgt, so gehen offenbar von jedem Punkte in der quadratischen Ebene vier reelle Halbgeraden aus oder es gehen durch jeden Punkt in ihr zwei reelle Geraden hindurch.

42. Lehrsatz.

In der quadratischen Ebene sind um einen Punkt herum vier rechte Grundwinkel gegeben.

Da die Hauptimaginäre der dreieckigen Ebene, welche den rechten Winkel mit einer reellen Geraden bildet, in der quadratischen Ebene zur reellen Geraden wird, so ist offenbar der Grundwinkel dieser Ebene gleich $1\frac{1}{2}$ P oder $=$ R. Da nun nach Lehrsatz 29 um einen Punkt herum in der dreieckigen Ebene sechs Grundwinkel gegeben sind, so werden in der quadratischen Ebene offenbar um einen Punkt herum vier entsprechende Grundwinkel gegeben sein.

Anmerkung. In der quadratischen Ebene als solcher ist, wie wir später sehen werden (vgl. Absch. 3.) kein imaginärer Winkel gegeben, dessen Grösse gleich P wäre, und demnach hat der Lehrsatz 29 in dieser Ebene keinen geometrischen Sinn mehr.

43. Lehrsatz.

Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten einander entsprechend gleich sind und der von ihnen eingeschlossene Winkel, so sind auch die dritten Seiten einander gleich.

Es sind offenbar zwei Fälle möglich je nachdem die eingeschlossenen Winkel gleichartig oder ungleichartig sind (mögen sie sonst einfach oder zusammengesetzt sein).

1. Fall. Die Winkel sind gleichartig.

Die zwei Dreiecke seien ABC und A'B'C' (vgl. Fig. 14 Taf. II) und es sei $\angle A = A'$, $AB \simeq A'B'$ $AC \simeq A'C'$. Es ist nun offenbar dass, da $AC \simeq A'C'$ und $\angle A' = A$ ist, der Punkt C' auf dieselbe Weise in Bezug auf den Punkt A' gesetzt ist wie der Punkt C in Bezug auf den Punkt A; dasselbe folgt für die Punke B und B' in Bezug auf die entsprechenden Punkte A und A' aus $\angle A' = A$ und $AB \simeq A'B'$; folglich sind auch die Punkte C' und B' in Bezug aufeinander auf dieselbe Weise gesetzt wie die Punkte C und B in Bezug aufeinander, ihre Entfernungen werden also in beiden Fällen nach Ax. 9. die gleichen sein, d. h. $B'C' = BC$.

2. Fall. Die Winkel sind ungleichartig.

Die zwei Dreiecke seien ABC und A'B'C' (Fig. 15 Taf. II) und es sei $\angle A = B'$, $AB = A'B'$ $AC = B'C'$. Da $\angle A = B'$ $AC = B'C'$ und $\angle A = B'$, $AB = B'A'$ so bedeutet dass offenbar dass der Punkt C' und die Gerade B'C' in quantitativer Hinsicht dasselbe Verhältniss zu dem Punkte B' resp. der Geraden B'A' haben wie der Punkt C in Bezug auf den Punkt A resp. die Gerade AC in Bezug auf die Gerade AB, und ebenso das der Punkt A' resp. die Gerade A'B' in demselben quantitativen Verhältniss zu dem Punkte B' resp. der Geraden B'C' steht wie der Punkt B resp. die Gerade BA zu dem Punkte A resp. der Geraden AC; folglich werden auch die Punkte C' und A' in demselben quantitativen Verhältniss zueinander stehen, wie die Punkte C und B, d. h. es wird $A'C' = BC$ sein.

Anmerkung. Wie man sieht, ist der Beweis in dem zweiten Falle allgemeiner als derjenige in dem ersten, so dass er auch den ersten Fall in sich begreift und somit allgemein gilt. Der erste Beweis ist rein geometrischer Natur, der zweite aber fliesst aus den allgemeinen (qualitativen und) Grössenaxiomen, die sowohl geometrisch wie arithmetisch sind.

44. Lehrsatz.

Wenn in zwei Dreiecken die drei Seiten einander entsprechend gleich sind, so sind dann auch die drei Winkel einander gleich und zwar liegen dabei gleichen Seiten gleiche Winkel und gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber.

Wir wollen zunächst beweisen, dass gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüberliegen. Da es nun die innere Struktur des Raumes mit sich bringt, dass zwei Dreiecke, deren drei Seiten einander gleich und

doch untereinander ungleichartig wären (vgl. Ab. 3), nicht möglich sind sondern nur solche mit gleichartigen Seiten, so sind hier nicht mehr zwei Fälle zu unterscheiden.

Es seien in den zwei Dreiecken ABC und A'B'C' (vgl. Fig. 15. Taf. II) die drei Seiten einander gleich d. h. A'B' ≍ AB, A'C' ≍ AC und B'C' ≍ BC. Es ist nun offenbar dass, da AB ≍ A'B' A'C' ≍ AC und B'C' ≍ BC, die Punkte A' und B' in Bezug auf den Punkt C' auf dieselbe Weise gesetzt sind wie die Punkte A und B in Bezug auf den Punkt C und dass demnach die Geraden A'C' und B'C' auf dieselbe Weise in Bezug aufeinander gesetzt sind wie die Geraden AC und BC in Bezug aufeinander d. h. dass ∠ C = C' ist (diese Winkel liegen den gleichen Seiten AB und A'B' gegenüber). Auf dieselbe Weise lässt sich der Beweis auch für die übrigen Winkel führen indem dabei zunächst von A'C' = AC resp. B'C' = BC ausgegangen wird.

Wenn es nun feststeht, dass gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüberliegen, so ist es offenbar, dass dann gleiche Winkel von gleichen Seiten eingeschlossen sind, und es führt sich somit der Beweis für das Umgekehrte d. h. der Beweis dafür, dass gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüberliegen, auf den Beweis des ersten Falles in dem vorigen Lehrsatz, welcher Beweis in diesem Falle für jedes Seitenpaar und den von ihm eingeschlossenen Winkel zu wiederholen ist.

Anmerkung. Auch in diesem Lehrsatz könnten gewissermaassen die zwei Fälle des vorigen Lehrsatzes unterschieden werden. Da aber, wie wir sehen werden (vgl. Ab. 3. dieses Theils), auch in jenem Fall, wo in den zwei Dreiecken zwei einander entsprechende Seiten ungleichartig sind, dieselben zugleich untereinander gleich sind (so sind in den beiden Dreiecken ABC und A'B'C' der obigen Figur nicht nur die Seiten AC und B'C' und die Seiten BC und A'C' untereinander gleich und ungleichartig, sondern es sind zugleich auch die ungleichartigen Seiten AC und BC untereinander und die ungleichartigen Seiten A'C' und B'C' untereinander gleich), so dass Dreiecke mit ungleichartigen Seiten zugleich solche mit gleichartigen sind. Zwar gilt das offenbar auch für die ungleichartigen Dreiecke des vorigen Lehrsatzes, während aber dort dieselben mit Recht auch als solche mit ungleichartigen Seiten betrachtet werden können, kann dies hier mit viel weniger Recht geschehen, weil ja die dritte Seite dabei stets gleichartig sein muss. Will man aber den Unterschied doch machen, dann ist es leicht den obigen Beweis nach Analogie mit dem zweiten Fall des vorigen Lehrsatzes zu führen.

45. Lehrsatz.

Wenn in zwei Dreiecken die eine Seite des einen der einen Seite des anderen Dreiecks gleich ist und die an der gleichen Seite liegenden Winkel, so sind auch die zwei anderen Seiten einander entsprechend gleich und die dritten Winkel einander gleich.

Die zwei Dreiecke seien ABC und A'B'C' (Fig. 14 Taf. II) und es seien A'B' = AB und ∠ A' = A, ∠ B' = B. Wenn nun diese drei Gleichungen bestehen, so is es einleuchtend, dass der Punkt C', in dem sich die Geraden A'C' und B'C' schneiden, dasselbe quantitative Verhältniss zu den Punkten A' und B' haben wird, wie der Punkt C zu den Punkten A und B, d. h. es wird A'C' = AC und B'C' = BC sein. Steht das fest, dann muss offenbar nach dem vorigen Lehrsatz auch ∠ C' = C sein, da in Dreiecken, in denen die drei Seiten einander entsprechend gleich sind, gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüberliegen.

46. Lehrsatz.

In jedem Dreiecke liegen gleichen Seiten gleiche Winkel und gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber.

Da offenbar in einem Dreiecke entweder zwei oder alle die drei Seiten einander gleich sind und da, wie schon erwähnt, ein Dreieck in dem die drei Seiten miteinander ungleichartig und doch einander gleich wären nicht existiert und demnach in einem gleichseitigen Dreiecke die drei Seiten untereinander gleichartig sein müssen, so ist nur im Falle eines gleichschenkeligen Dreiecks (vgl. Def. 48) der Fall der gleichartigen von demjenigen der ungleichartigen Seiten zu unterscheiden.

1. Fall. Die zwei gleichen Seiten sind gleichartig.

Ist in dem Dreiecke ABC (vgl. Fig. 16 Taf. II) AC ≌ BC dann ist offenbar der Punkt C in Bezug auf den Punkt A auf dieselbe Weise wie in Bezug auf den Punkt B gesetzt, so dass auch die Gerade AB in Bezug auf die Gerade AC auf dieselbe Weise gesetzt sein muss wie in Bezug auf die Gerade BC, und demnach muss ∠ A = B sein. Da sich nun im Falle, dass alle drei Seiten eines Dreiecks einander gleich sind, derselbe Beweis für je zwei von ihnen wiederholen lässt, so gilt offenbar auch der folgende

Nebensatz.

In jedem gleichseitigen Dreieck sind die drei Winkel einander gleich.

2. Fall. Die zwei gleicher Seiten sind ungleichartig.

Ist in dem Dreiecke ABC (Fig. 15 Taf. II) $AC = BC$ dann bedeutet das offenbar, dass der Punkt C in demselben quantitativen Verhältniss zu dem Punkte A wie zu dem Punkte B steht und folglich wird auch die Gerade BC mit der Geraden AB ihrem Richtungsunterschiede nach in demselben quantitativen Verhältniss stehen wie die Gerade AC zu AB, also $\angle A = B$ sein.

Anmerkung. Vgl. die Anmerkung zu Lehrsatz 43, die auch hier gilt.

47. Lehrsatz.

Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten einander entsprechend gleich sind, der Winkel den die gleichen Seiten einschliessen aber in dem einen Dreieck grösser als in dem anderen, so ist auch die dritte Seite in dem einen grösser als in dem anderen.

Die zwei Dreiecke seien ABC und A'B'C' (Fig. 17 Taf. II) und es sei $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ und $\angle A' > A$. Da der Punkt C' dasselbe quantitative Verhältniss zu dem Punkte A' hat wie der Punkt C zu dem Punkte A und ebenso der Punkt B' dasselbe zu dem Punkte A' wie B zu A, so muss, wenn das quantitative Verhältniss der Geraden A'C' und A'B' ihrem Richtungsunterschiede nach ein anderes ist als dasjenige der Geraden AC und AB, auch das quantitative Verhältniss des Punktes C' zu B' ein anderes als dasjenige des Punktes C zu B sein, und zwar wenn jenes erstere grösser auch dieses zweite grösser sein, d. h. wenn $\angle A' > A$ auch $B'C' > BC$ sein.

48. Lehrsatz.

Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten einander entsprechend gleich sind, die dritte Seite aber in dem einen grösser als in dem anderen, so ist auch der ihr gegenüberliegende Winkel, den die gleichen Seiten einschliessen, in dem einen grösser als in dem anderen.

Wenn $B'C' > BC$ (vgl. Fig. 17 Taf. II) ist, dann ist $\angle A'$ entweder $= A$ oder $> A$ oder $< A$. Gleich kann $\angle A'$ dem A deshalb nicht sein, weil nach Lehrsatz 43 dann $B'C' = BC$ wäre, was der Voraussetzung widerspricht. Wäre $\angle A' < A$, dann müsste nach dem vorigen Lehrsatz $B'C' < BC$ sein, was wiederum der Voraussetzung widerspricht. Es bleibt also nur das dritte übrig, d. h. $B'C' > BC$.

49. Lehrsatz

In jedem Dreieck liegt dem grösseren Winkel die grössere Seite gegenüber.

In dem Dreiecke ABC (Fig. 17 Taf. II) ist $\angle B > A$. Da das quantitative Verhältniss der Geraden BC und AB ihrem Richtungsunterschiede nach ein grösseres als dasjenige zwischen AC und AB ist, so muss offenbar auch das quantitative Verhältniss des Punktes C zu dem Punkte A (AC liegt dem $\angle B$ gegenüber) ein grösseres sein als dasjenige des Punktes C zu dem Punkte B, also $AC > BC$ sein.

50. Lehrsatz.

In jedem Dreieck liegt der grösseren Seite der grössere Winkel gegenüber.

In dem Dreiecke ABC (vgl. die Fig. d. v. Lehrs.) ist $AC > BC$. Wären nun die den Seiten AC und BC gegenüberliegenden Winkel B und A einander gleich, dann müssten nach Lehrsatz 45 auch AC und BC einander gleich sein, was der Voraussetzung widerspricht. Wenn aber $\angle B < A$ wäre, dann müsste nach dem vorigen Lehrsatz $AC < BC$ sein, was wiederum der Voraussetzung widerspricht. Also ist $AC > BC$.

51. Lehrsatz.

In jedem Dreieck ist die eine Seite kleiner als die Summe der beiden anderen.

Dieser Lehrsatz folgt unmittelbar aus Lehrsatz 16, wonach die Gerade die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten ist, jede Seite des Dreiecks ist als Gerade kürzer denn die Summe der zwei übrigen Seiten, da diese offenbar die gebrochene Linie darstellen, die zwischen denselben Punkten liegt.

52. Lehrsatz.

In jedem Dreiecke ist die eine Seite grösser als die Differenz der beiden anderen.

Nach dem vorigen Lehrsatz muss in dem Dreiecke ABC (Fig. 17 Taf. II) $AB < BC + AC$ sein oder, was dasselbe ist:

$BC + AC > AB$. Wenn wir von den beiden Seiten dieser Ungleichung dasselbe Glied BC abziehen so wird, nach einem bekannten allgemeinen Grössenaxiom, daraus die Ungleichung $AC > AB - BC$ entstehen, in welcher der obige Lehrsatz für die Seite AC bewiesen ist. Es ist leicht in ähnlicher Weise die Giltigkeit desselben auch für die beiden anderen nachzuweisen.

53. Lehrsatz.

In jedem Dreieck ist der an einer verlängerten Seite

desselben bestehende Aussenwinkel gleich der Summe der beiden inneren ihm gegenüberliegenden Winkel.

Man ziehe in dem Dreiecke ABC (vgl. Fig. 18 Taf. II) die Verlängerung der Seite AB nach D in Betracht und ebenso dass BE || AC ist. Dann ist nach Lehrsatz 36:

$\angle$ CBE = ACB und $\angle$ EBD = CAB also:

$\angle$ CBE + EBD = $\angle$ ACB + CAB

$\angle$ CBD = ACB + CAB.

54. Lehrsatz.

In der ursprünglichen Ebene ist die Summe der drei Winkel im Dreiecke gleich 3 P

Wenn die zu der Seite AB des Dreiecks ABC an dem Eckpunkte C desselben bestehende parallele Gerade MN in Betracht gezogen wird (Fig 19, Taf. II) so ist nach Lehrsatz 36:

$\angle$ MCA = CAB und $\angle$ NCB = ABC. Nach Lehrsatz 30 ist aber $\angle$ MCA + ACB + NCB = 3 P folglich:

$\angle$ CAB + CBA + ACB = 3 P

Nebensatz.

Die Summe der Winkel im Dreiecke beträgt 2 R.

Nach Lehrsatz 38 ist 3 P = 2 R, folglich

$<$ CAB + CBA + ACB = 2 R.

Anmerkung. Dieser Nebensatz gilt offenbar sowohl für die quadratische wie für die dreieckige Ebene da sich in beiden der rechte Winkel befindet. Der Lehrsatz selbst gilt geometrisch genommen nur für die dreieckige Ebene, da sich in der quadratischen der reelle Grundwinkel P derselben nicht befindet, wie dies aus späteren Lehrsätzen (vgl. Ab. 3) hervorgehen wird, so dass jener Lehrsatz für die quadratische Ebene nur im arithmetisch-abstrakten Sinne gelten könnte

55. Lehrsatz.

Zwei parallele Geraden zwischen zwei anderen parallelen Geraden sind einander gleich.

Die parallelen Geraden AC und BD seien zwischen den Parallelen MN und PQ gegeben (Fig. 20 Taf. II). Nun ist es leicht einzusehen, dass der Punkt D auf dieselbe Weise in Bezug auf den Punkt C gesetzt ist wie der Punkt B in Bezug auf den Punkt A. Denn wenn MN || PQ und AC || BD sind, dann müssen, da nach Lehrsatz 22 parallele Geraden gleichgerichtet sind, die Punkte D und C, als Schnittpunkte derselben Geraden deren Schnitpunkte auch A und

B sind, in demselben Verhältnisse in Bezug aufeinander stehen wie diese letzteren Punkte A und B. Ist dem aber so, dann sind die Punkte A und C einerseits und B und D andererseits die einander entsprechenden Punkte der Parallelen MN und PQ und es muss folglich nach Lehrsatz 27 Nebensatz 2 AC = BD sein.

56. Lehrsatz.

Wenn zwei Geraden von parallelen Geraden so geschnitten werden, dass die dabei entstehenden Segmente der einen Geraden untereinander gleich sind, so sind auch die auf der anderen Geraden entstehenden Segmente untereinander gleich.

Es sind offenbar zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die zwei Geraden gleicher oder verschiedener Richtung sind.

1. Fall. Die zwei Geraden sind von verschiedener Richtung.

Die zwei Geraden seien MN und PQ (Fig. 21 Taf. II) und die sie schneidenden Parallelen AA′, BB′, CC′ etc. Zieht man die Geraden A′B″ || AB, B′C″ || BC etc. in Betracht, so ist offenbar nach Lehrsatz 55, A′B″ = AB, B′C″ = BC etc. Da nach der Voraussetzung A′B′ = B′C′ ist und da nach Lehrsatz 36 ∠ B″A′B′ = C″B′C′ und ∠ B″B′A′ = C″C′B′ so muss nach Lehrsatz 44 auch A′B″ = B′C″ sein und da A′B″ = AB und B′C″ = BC so ist auch AB = BC = etc.

2. Fall. Die zwei Geraden sind gleicher Richtung.

Dass in diesem Falle der Lehrsatz gilt, folgt einfach daraus dass dann nach Lehrsatz 55 A′B′ = AB, B′C′ = BC etc. ist und da nach Voraussetzung A′B′ = B′C′ ist so ist auch AB = BC = etc.

57. Lehrsatz.

In jedem Parallelogramm sind die einander gegenüberliegenden Seiten und Winkel einander gleich.

Die zwei Paare der einander gegenüberliegenden Seiten des Parallelogramms ABCD (Fig. 20, Taf. II) lassen sich wechselweise als Parallele zwischen Parallelen betrachten und sind somit nach Lehrsatz 55 einander gleich. Die einander gegenüberliegenden Winkel z. b. A und D sind deshalb einander gleich, weil deren Schenkel Geraden entgegengesetzter Richtung sind (vgl. die Argumentation zu Lehrsatz 35, 2.), und dasselbe gilt für die beiden anderen Winkel B und C.

58. Lehrsatz.

Die Summe der Winkel in einem Polygon ist gleich (n — 2) 3 P oder (2 n — 4) R.

Da jedes Polygon (vgl. Fig. 22 Taf. II) von n Seiten in n — 2 Dreiecke zerlegt ist, die Summe der Winkel in einem Dreiecke aber nach Lehrsatz 54 gleich 3 P oder 2 R ist, so ist offenbar die Summe der Winkel in jedem Polygon gleich (n — 2) 3 P oder (n — 2) 2 R = (2 n — 4) R.

59. Lehrsatz.

In der dreieckigen Ebene sind von den sinnlich wahrgenommenen regelmässigen Polygonen als zusammengesetzte Polygone nur das Dreieck und das Sechseck möglich.

Im Lehrsatz 9 Nebensatz 2 haben wir unter einfachen Polygonen diejenigen Polygone verstanden, die in der dreieckigen ausgebreiteten Ebene entstehen, wenn mehrere Punkte um einen Punkt herum so gelegt werden, dass sie die Ebene zu einer geschlossenen machen. Streng genommen ist in diesem Sinne nur das Sechseck als einfaches Polygon möglich, während das Quadrat nur möglich ist, wenn kein Punkt in seinem Inneren gegeben ist und das Dreieck möglich, weil in demselben eo ipso kein solcher gegeben ist. Wenn nun aber einmal die dreieckige ausgebreitete Ebene gegeben ist, dann können unter einfachen Polygonen nur diejenigen verstanden werden, die sich aus einfacheren nicht zusammensetzen lassen, was nur für das Dreieck und das Quadrat der Fall ist, während das Sechseck ein zusammengesetztes Polygon ist. Da nun nach Lehrsatz 40 die quadratische Ebene eine von der dreieckigen verschiedene Ebene ist, so ist die Betrachtung der Polygone nunmehr in den beiden Ebenen voneinander zu trennen, und wenn wir nunmehr die Möglichkeit der zusammengesetzten Polygone in diesen Ebenen erörtern, so ist unter dem zusammengesetzten Polygon nunmehr der Gegensatz des einfachen Polygons in dem zweiten eben erörterten Sinne zu nehmen.

In diesem Sinne ist nun als einfaches Polygon in der dreieckigen Ebene offenbar nur das Dreieck möglich und es fragt sich nur noch, ob die übrigen sinnlich wahrgenommenen regelmässigen Polygone in dieser Ebene nicht als zusammengesetzte Polygone vorkommen können, d. h. ob aus Dreiecken nicht durch Zusammensetzung regelmässige Polygone hervorgehen könnten, die nicht mehr Dreiecke sind. Wir wollen diese Untersuchung hier wieder ganz allgemein führen, so dass damit die Frage sowohl für die dreieckige wie für die quadratische Ebene gelöst werden wird. Wenn nach dem vorigen Lehrsatz die Summe der Winkel in einem Polygon gleich (n—2) 3 P ist, so wird jeder Winkel in dem regelmässigen Polygon (vgl. Def. 58)

offenbar gleich $\frac{(n-2)\,3\,P}{n}$ sein. Ein Polygon wird offenbar aus denjenigen einfacheren Polygonen zusammengesetzt werden können dessen Winkelsumme < 3 P ist, da $\frac{(n-2)\,3\,P}{n} < 3$ P ist. Nun zeigt eine einfache Berechnung, dass dies nur für zwei Dreiecke, ein Dreieck und ein Quadrat, ein Dreieck und ein Fünfeck der Fall ist (im ersten Falle beträgt der Winkel des Dreiecks P, zwei solche sind also < 3 P, im zweiten Falle beträgt der Winkel des Quadrats $1\frac{1}{2}$ P, die betreffende Winkelsumme ist also wieder < 3 P; im dritten Falle beträgt der Winkel des Fünfecks $1\frac{4}{5}$ P, die betreffende Winkelsumme ist also wieder < 3 P), und es ist also nur die Zusammensetzung der regelmässigen Polygone aus diesen einfacheren Polygonen denkbar. Die Winkelsumme zweier Dreiecke beträgt 2 P, das ist der Winkel des Sechsecks, folglich wird das Sechseck aus Dreiecken zusammensetzbar sein Die Winkelsumme des Dreiecks und des Quadrats beträgt $2\frac{1}{2}$ P und das ist der Winkel des Zwölfecks $\left(\frac{(12-2)\,3\,P}{12} = \frac{30\,P}{12} = 2\frac{1}{2}\,P\right)$, folglich wird das Zwölfeck aus Dreiecken und Quadraten zusammensetzbar sein, wenn der innere Winkel, der bei dieser Zusammensetzung entsteht (vgl. Fig. 23 Taf. II), dem Winkel eines möglichen regelmässigen Polygons entspricht, was thatsächlich der Fall ist $[6\,P - (1\frac{1}{2}\,P + P + 1\frac{1}{2}\,P) = 6\,P - 4\,P = 2\,P]$. Die Winkelsumme des Fünfecks und des Dreiecks beträgt $2\frac{4}{5}$ P und das ist der Winkel des regelmässigen 30-Ecks $\left(\frac{(30-2)\,3\,P}{30} = \frac{28}{10}\,P = 2\frac{4}{5}\,P\right)$, das regelmässige 30-Eck kann aber deshalb nicht aus Dreiecken und Fünfecken zusammengesetzt werden, weil der innere Winkel, der bei dieser Zusammensetzung entsteht, keinem regelmässigen Polygon entspricht $[6\,P - (1\frac{4}{5}\,P + P + 1\frac{4}{5}\,P) = 6\,P - 4\frac{3}{5}\,P = 1\frac{2}{5}\,P]$, so dass dieser dritte Fall nur formell nicht aber auch reell möglich ist. Da aber in der reinen dreieckigen Ebene nur Dreiecke existieren, so ist in derselben auf Grund der bisherigen Feststellungen nur das Sechseck als zusammengesetztes Polygon möglich, alle anderen aber unmöglich. Näher betrachtet ergiebt sich aber, dass nicht nur das Sechseck sondern dass auch das regelmässige Dreieck als zusammengesetztes Polygon in der dreieckigen Ebene existiert, ja dass eine ganze Reihe von solchen grösseren oder kleineren zusammengesetzten Dreiecken und Sechsecken existiert. Dass für diese Zu-

sammensetzung folgende Sätze gelten, dürfte wohl keines besonderen Beweises bedürfen.

1. Satz.

Jede Parallele zu der einen Seite des reellen regelmässigen Dreiecks bildet mit den beiden anderen verlängerten Seiten desselben ein neues regelmässiges Dreieck.

2. Satz.

Die drei regelmässigen Dreiecke an den drei Seiten eines regelmässigen Dreiecks, bilden zusammen mit diesem ein neues regelmässiges Dreieck.

3. Satz.

Die drei regelmässigen an den drei nicht nebeneinander liegenden Seiten des regelmässigen Sechsecks liegenden Dreiecke bilden zusammen mit diesem ein regelmässiges Dreieck.

4. Satz.

Die sechs Parallelen zu den sechs Seiten eines reellen regelmässigen Sechsecks bilden ein neues regelmässiges Sechseck.

5. Satz.

Sechs regelmässige Dreiecke die um einen Punkt herum liegen bilden ein regelmässiges Sechseck.

Anmerkung. Es muss ausdrücklich bemerkt werden, dass die Deduction des ersten zusammengesetzten regelmässigen Sechsecks, wie sie hier geführt worden, einen offenbaren Cirkelschluss darstellen würde, wenn dieselbe nicht auf eine andere direkte Weise möglich wäre, wie diese auch in der That im Lehrsatz 9 dargelegt worden ist.

60. Lehrsatz.

In der (gemischten) dreieckig-quadratischen Ebene sind als zusammengesetzte Polygone nur das Sechseck und das Zwölfeck möglich.

Aus der Arg. zum vorigen Lehrsatz folgt, dass aus Dreiecken und Quadraten die Ebene zusammengesetzt werden kann, wenn diese Dreiecke und Quadrate so angeordnet werden, dass aus ihnen ein regelmässiges Zwölfeck entsteht. Da es nun diese Anordnung mit sich bringt, dass dabei zugleich auch das regelmässige Sechseck entstehen muss (vgl. Fig. 23 Taf. II) so ist damit die Richtigkeit des Lehrsatzes deduciert. Eine nähere Betrachtung dieser Ebene zeigt aber, dass es ausser diesen ersten zusammengesetzten Sechs-

ecken und Zwölfecken keine zusammengesetzteren mehr giebt, und dass es in derselben auch keine zusammengesetzten Dreiecke und Quadrate giebt.

Anmerkung. Dass es in der dreieckig-quadratischen Ebene keine reinen reellen und imaginären Geraden giebt, sondern dass jede Gerade in derselben sowohl reelle wie imaginäre Elementargeraden enthält, folgt unmittelbar aus der Anordnung der einfachen Dreiecke und Quadrate in derselben. Es wäre nicht schwer auf Grund der Geometrie der quadratischen und der dreieckigen Ebene auch die Geometrie dieser gemischten dreieckig-quadratischen Ebene zu deducieren; aus begreiflichen Gründen unterlassen wir hier diese Deduction und handeln nur von der reinen dreieckigen und quadratischen Ebene.

61. Lehrsatz.

In der quadratischen Ebene ist als zusammengesetztes regelmässiges Polygon nur das Quadrat möglich.

Die Winkelsumme der zwei Eckwinkel zweier Quadrate beträgt offenbar 2 R, und da nach Lehrsatz 29 Nebensatz der ebene Winkel 2 R beträgt, so werden die Seiten zweier Quadrate, die nebeneinander gelegt sind, in einer Geraden liegen. Da nun nach Lehrsatz 42 der ganze Winkel in der quadratischen Ebene 4 R beträgt, so werden offenbar um einen Punkt herum vier Quadrate liegen, von denen je zwei mit ihren entsprechenden Seiten Geraden bilden werden, so dass die vier auf diese Weise entstandenen Geraden selbst ein und zwar aus jenen vier einfachen Quadraten zusammengesetztes Quadrat bilden werden. Es ist dann leicht einzusehen, dass in ähnlicher Weise auch weitere zusammengesetzte Quadrate entstehen werden.

2. Abschnitt.

Gleichheit und Flächeninhalt der geometrischen Figuren.

A. DEFINITIONEN.

1. *Gleich (congruent)* heissen zwei geometrische Figuren wenn sie in allen ihren einander entsprechenden Bestandstücken quantitativ auf gleiche Weise gesetzt sind.

2. Der *Flächeninhalt* einer geometrischen Figur heisst die Summe der in ihr enthaltenen Elementarebenen.

3. Die *Höhe* einer geometrischen Figur heisst die von ihrem Gipfel bis zu der Grundlinie gezogene reelle Gerade.

4. Die *Diagonale* einer geometrischen Figur heisst die zwei Eckpunkte derselben verbindende Gerade.

B LEHRSÄTZE

1. Lehrsatz.

Zwei Dreiecke, in denen zwei Seiten einander entsprechend gleich sind und der von ihnen eingeschlossene Winkel, sind mit einander gleich (congruent).

Die zwei Dreiecke seien ABC und A'B'C' (Fig. 14 Taf. II) und es seien A'B' = AB, A'C' = AC und ∠ A' = A. Es ist nun nach den Lehrsätzen 43 und 44 1 Ab. auch C'B' = CB, ∠ C' = C, ∠ B' = B, und da somit alle die drei Winkel und Seiten in den beiden Dreiecken quantitativ auf gleiche Weise gesetzt sind, so ist es offenbar, dass auch der entsprechende Flächenraum in beiden Dreiecken quantitativ auf gleiche Weise gesetzt ist, d. h. die beiden Dreiecke sind miteinander gleich.

2. Lehrsatz.

Zwei Dreiecke, in denen die eine Seite gleich und in denen die an dieser gleichen Seite liegenden Winkel einander gleich sind, sind miteinander gleich.

Die zwei Dreiecke seien ABC und A'B'C' (Fig. 14 Taf. II) und es seien ∠ A' = A, ∠ B' = B und A'B' = AB. Nach Lehrsatz 45 1 Ab ist dann auch ∠ C' = C und A'C' = AC und B'C' = BC, und da somit alle die drei Winkel und Seiten in den beiden Dreiecken quantitativ auf gleiche Weise gesetzt sind, so ist es offenbar, dass auch der entsprechende Flächenraum in beiden Dreiecken ein gleicher ist, und dass somit auch die Dreiecke selbst miteinander gleich sind.

3. Lehrsatz.

Zwei Dreiecke, in denen die drei Seiten einander entsprechend gleich sind, sind miteinander gleich.

Da nach Lehrsatz 44 1 Ab. (vgl. Fig. 14 Taf. II) in diesem Falle auch die drei Winkel einander entsprechend gleich sind, so wird auch der Flächenraum in den beiden Dreiecken ein gleicher sein, und somit auch die Dreiecke selbst.

4. Lehrsatz.

Parallelogramme, die auf einer und derselben Grundgeraden und zwischen denselben Parallelgeraden liegen, sind einander ihrer Fläche nach gleich.

Ist (vgl. Fig. 1 Taf. III) AB || CD, AD || BC und AE || BF dann ist (nach Lehrsatz 43 1) △ ADE ≌ △ CFB, weil AD = BC, AE = BF, ∠ A = B (Lehrsatz 57 1 Absch. und die Arg. zu Lehrsatz 35, 1 1. Ab.). Nun ist:

ABCD = AECB + ADE und ABEF = ACEB + CFB
folglich ABCD = ABFE

5. Lehrsatz.

Parallelogramme auf gleichen Grundgeraden und zwischen denselben Parallelgeraden sind einander flächengleich.

Zieht man (vgl. Fig. 2 Taf. III) die Geraden D'A und C'B in Betracht so ist (nach dem vorigen Lehrsatz):

D'C'AB = D'C'A'B' ebenso
D'C'AB = ABCD also
ABCD = A'B'C'D'.

6. Lehrsatz.

Das Parallelogramm wird von der Diagonale halbiert.

Nach Def. 4 ist die Diagonale offenbar die zwei einander gegenüberliegenden Eckpunkte des Parallelogramms verbindende Gerade. Nun wird offenbar die Diagonale AC in dem Parallelogramm ABCD (vgl. Fig. 3 Taf. III) dasselbe in zwei gleiche Flächentheile theilen, weil die Dreiecke ABC und ACD, die dabei entstehen, drei einander entsprechend gleiche Seiten haben (AC ist gemeinsam, AB ist = CD und AD = BC nach Lehrsatz 57 1 Ab.) und sind folglich nach Lehrsatz 3. einander gleich.

7. Lehrsatz.

Dreiecke, die auf einer und derselben Grundgeraden und zwischen denselben Parallelgeraden liegen, sind einander flächengleich.

Zieht man — wenn ABC und ABF die gegebenen Dreiecke sind — die Geraden (vgl. Fig. 1 Taf. III) AE || BF, AD || BC und EF || AB dann ist nach Lehrsatz 4:

ABCD = ABEF, da aber nach Lehrsatz 6 △ ABC = $\frac{1}{2}$ ABCD und △ ABD = $\frac{1}{2}$ ABEF so ist △ ABC = ABF.

8. Lehrsatz.

Dreiecke auf gleichen Grundgeraden und zwischen denselben Parallelgeraden sind einander flächengleich.

Zieht man in Betracht dass die Dreiecke (vgl. Fig. 2 Taf. III) ABC und A'B'C' die Hälften der Parallelogramme ABCD und A'B'C'D' sind (wenn die Geraden AD' und BC' welche mit den Geraden AB und C'D' das Parallelogram ABC'D' bilden in Betracht gezogen werden) so ist, da nach Lehrsatz 5

ABCD = A'B'C'D', offenbar

△ ABC = A'B'C'.

9. Lehrsatz.

Wenn ein Parallelogramm und ein Dreieck eine und dieselbe Grundgerade haben und beide zwischen denselben Parallelgeraden liegen, dann ist das Parallelogramm seiner Grösse nach das Doppelte des Dreiecks.

Zieht man AC (vgl. Fig. 4 Taf. III) in Betracht, so ist (nach Lehrsatz 7) △ ABE = ABC, nach Lehrsatz 6 ist aber △ ABC = $\frac{1}{2}$ ABCD also ist auch △ ABE = $\frac{1}{2}$ ABCD oder ABCD = 2 △ ABE.

10. Lehrsatz.

Die Fläche des reellen gleichseitigen Dreiecks in der dreieckigen Ebene ist gleich dem Quadrat seiner Seite.

Nehmen wir zum Ausgangspunkte ein einfaches Dreieck (Fig. 5 Taf. III.). Es ist nun offenbar dass, wenn wir zu einer seiner Seiten ein neues einfaches Dreieck hinzufügen resp. einen Punkt, der sich mit seinen zwei Punkten unmittelbar berührt, dann die zwei Punkte, die den zwei freiliegenden Seiten des letzteren hinzuzufügen sind, sowohl mit den entsprechenden Punkten der beiden freiliegenden Seiten des ersten Dreiecks (nach der Arg. zu Lehrsatz 9, 1. Ab.) einerseits wie mit jenem zuerst hinzugefügten Punkte andererseits in geraden Linien stehen müssen, so dass das neue zusammengesetzte gleichseitige Dreieck, dessen Seite = 2 ist, aus 1 + 3 einfachen Dreiecken bestehen wird. Es ist nun leicht einzusehen, dass die zwei Punkte, die den drei Punkten der einen Seite dieses neuen Dreiecks zunächst hinzuzufügen sind, mit diesen drei einfache Dreiecke bilden, und dass die zwei Punkte die den zwei freiliegenden Seiten der letzteren noch hinzuzufügen sind, und die somit noch zwei einfache Dreiecke bilden, mit jenen ersten zwei Punkten einerseits und mit den beiden freiliegenden Seiten des ersten zusammengesetzten Dreiecks andererseits in geraden Linien liegen werden, so dass das neue zusammengesetzte gleichseitige Dreieck, dessen Seite = 3 ist, aus 1 — 3 — 5 einfachen Dreiecken besteht.

Auf diese Weise sieht man ein, dass ein gleichseitiges zusammengesetztes Dreieck, dessen Seite gleich a ist, aus $1+3+5+\ldots\ldots (2a-1) = [(2a-1)+1]\cdot\frac{a}{2} = a^2$ einfachen Dreiecken besteht, d. h. dass sein Flächeninhalt gleich dem Quadrat seiner Seite ist.

Nebensatz.

Die Fläche des reellen Rhombus (der dreieckigen Ebene) ist gleich dem zweifachen Quadrat seiner Seite.

Dieser Nebensatz folgt aus Lehrsatz 6 und dem obigen Lehrsatz.

11. Lehrsatz.

Die Fläche des reellen Parallelogramms ist gleich dem zweifachen Product aus seiner Grund- und seiner Seitenlinie.

Bezeichnen wir die Grundlinie des Parallelogramms mit a und seine Seitenlinie mit b, so wird offenbar ihr Zahlenverhältniss entweder ein ganzes oder ein gebrochenes sein, d. h. entweder $b = ma$ oder $b = ma + c$ sein. Im ersten Falle ist das Parallelogramm in m gleiche Rhomben zerlegt, deren Seite a ist, und da nach dem Nebensatz des vorigen Lehrsatzes die Fläche des reellen Rhombus gleich dem zweifachen Quadrat seiner Seite ist, so wird die Fläche des Parallelogramms in diesem Falle gleich $2ma^2$ sein. Da nun $ma = b$ ist, so wird, wenn wir die Fläche des Parallelogramms mit F bezeichnen, $F = 2ab$ sein. Ist aber $b = ma + c$, dann ist das Parallelogram wiederum in m gleiche Rhomben zerlegt und in ein Parallelogramm dessen eine Seite gleich a und die andere gleich $c = b - ma$ ist. Wenn nun für dieses Restparallelogramm mit der Grundlinie c und der Seitenlinie a (da $c < a$ ist) bewiesen werden kann, dass seine Fläche gleich dem Product 2ac ist, dann lässt sich sehr leicht beweisen, dass entsprechendes auch für das ganze Parallelogramm gilt, denn es ist dann $F = 2ma^2 + 2(b - ma)\,a = = 2ma^2 + 2ab - 2ma^2 = 2ab$. Wenn das Verhältniss von a und c ein ganzzahliges ist, so folgt dies ohne weiters auf Grund des Obigen. Wenn aber das Verhältniss von a und c ein gebrochenes ist, dann muss die Zerlegung des betreffenden Restparallelogramms so weit fortgesetzt werden bis man nicht zu einem Restparallelogramm gelangt, dessen Seiten im ganzzahligen Verhältniss stehen und dass man zu einem solchen gelangen muss, ist es ja ohne weiters klar.

12. Lehrsatz.

Die Fläche eines imaginären Dreiecks mit (einer imaginären

und) zwei reellen Seiten ist gleich dem Product dieser beiden reellen Seiten.

Zieht man in Betracht, dass das imaginäre Dreieck mit zwei reellen Seiten nach Lehrsatz 6 die Hälfte des reellen Parallelogramms ist, bei dem diese zwei Seiten des Dreiecks Grund- und Seitenlinie sind, so ist es nach dem vorigen Lehrsatz offenbar, dass das einfache Product dieser beiden Seiten den Flächeninhalt des Dreiecks darstellen wird.

13. Lehrsatz.

Die Fläche des imaginären Dreiecks mit einer reellen Seite (Grundlinie) ist gleich dem Product aus dieser seiner reellen Grundlinie und seiner Höhe.

In dem Dreieck ABC (Fig. 6 Taf. III) ist die Gerade CE nach Def. 3 seine Höhe. Da nun das Parallelogram ABDF aus den beiden Parallelogramen ECDB und ECFA besteht, nach Lehrsatz 6 aber $\triangle$ ACE $= \frac{1}{2}$ CEAF und $\triangle$ ECB $= \frac{1}{2}$ ECDB ist, so ist $\triangle$ ACE $+$ ECB $= \triangle$ ABC $= \frac{1}{2}$ ABDF, und da EC $=$ DB ist, nach Lehrsatz 12 aber die Fläche des Parallelograms ABDF gleich 2AB. DB ist, so ist die Fläche des Dreiecks ABC offenbar $=$ AB. CE.

Anmerkung 1. Ein Lehrsatz für die Fläche des rein imaginären Dreiecks lässt sich deshalb nicht aufstellen, weil es in demselben keine reelle Gerade giebt, nicht einmal die Höhe. Es lässt sich aber in jedem einzelnen Fall durch geeignete Zerlegung die Fläche desselben genau bestimmen. Ebenso lässt sich kein allgemeiner Lehrsatz für die Fläche des imaginären Parallelogramms, sei es dass nur zwei oder alle vier Seiten desselben imaginär sind, aufstellen, in jedem Falle lässt sich aber dieselbe durch geeignete Zerlegung bestimmen. Noch weniger lässt sich ein allgemeiner Lehrsatz für die Flächen der unregelmässigen imaginären Polygone aufstellen, sondern auch hier führt eine geeignete Zerlegung derselben in Dreiecke und Parallelogramme zum gewünschten Ziele.

Anmerkung 2. In der quadratischen Ebene ist als einfache Flächeneinheit das einfache Quadrat zu betrachten. Aus der Entstehungsweise der quadratischen aus der dreieckigen Ebene ist es ohne weiters klar, dass alle jene geometrischen Figuren der quadratischen Ebene, denen analoge Figuren in der dreieckigen entsprechen, einen entsprechend zweimal kleineren Flächeninhalt haben. Dem gleichseitigen reellen Dreieck der dreieckigen Ebene entspricht kein Gebilde in der quadratischen Ebene, während dem reellen Rhombus der dreieckigen Ebene das reelle Quadrat der quadratischen

(resp. der einfache Rhombus jener dem einfachen Quadrat dieser) entspricht, so dass die Fläche des Quadrats in der quadratischen Ebene nur deshalb gleich dem Quadrat seiner Seite ist, weil die Fläche des reellen Rhombus in der quadratischen Ebene gleich dem zweifachen Quadrat seiner Seite ist. Die Fläche des imaginären Dreiecks mit zwei reellen Seiten wird in der quadratischen Ebene dem halben Product seiner reellen Seiten gleich sein u. s. w.

3. Abschnitt.

Von der Proportionalität der Geraden und von der Ähnlichkeit der geometrischen Figuren.

A. DEFINITIONEN.

1. *Commensurabel* heissen zwei geometrische Grössen, die ein gemeinsames Maass ihrer Grösse haben.

2. *Incommensurabel* heisen zwei geometrische Grössen, die kein gemeinsames Maass ihrer Grösse haben.

3. *Proportional* zueinander sind zwei Grössenpaare, wenn das quantitative Verhältniss der Grössen in dem einen Paare gleich demjenigen in dem anderen Paare ist.

4. *Ähnliche Figuren* heissen solche Figuren, in denen die Winkel einander entsprechend gleich sind und in denen die um die gleichen Winkel liegenden Seiten einander proportional sind.

B. LEHRSÄTZE.

1. Lehrsatz.

Die Segmente einer und derselben Geraden sind stets untereinander commensurabel.

Da nach Def. 14, 1 Ab. jede Gerade einer bestimmten Art offenbar aus einfachen Elementargeraden von derselben Art besteht, nach Ax 9. aber das qualitativ auf dieselbe Weise im Raume Gesetzte auch quantitativ gleich ist, so sind alle Elementargeraden einer und derselben Geraden einander gleich, und da jeder Theil einer solchen Geraden (jedes Segment) aus einer bestimmten Anzahl dieser Elementargeraden besteht, so ist die entsprechende Elementargerade offenbar stets ihr gemeinsames Maass, sie sind also nach Def. 2 miteinander commensurabel.

2. Lehrsatz.

Die imaginäre Elementargerade ist mit der reellen Elementargeraden entweder incommensurabel oder sie ist deren ganze Vielfache.

Zwei Elementargeraden verschiedener Art sind offenbar ihrem quantitativen Verhältnisse nach entweder incommensurabel oder commensurabel und zwar commensurabel entweder nach einem gebrochenen oder nach einem ganzen Zahlenverhältniss. Da jede Elementargerade einer bestimmten Art auf eine andere Weise gesetzt ist als jede andere, so ist es ganz wohl möglich, dass sich unter ihnen solche befinden, die miteinander völlig unvergleichbar sind, d. h. die nicht nur ihrer quantitativen Grösse nach ungleich sondern die zugleich auch eine völlig neue quantitative Grössenart im arithmetischen Sinne dieses Wortes darstellen, wie es andererseits wieder ganz möglich ist, dass sich unter ihnen auch commensurable Grössen befinden d. h. Grössen die im arithmetischen Sinne gleichartig sind und als Grenzfall der letzteren auch solche die einander völlig gleich sind. Wenn nun zwei verschiedenartige Elementargeraden untereinander commensurabel sind, so kann ihr Zahlenverhältniss nicht ein gebrochenes sondern nur ein ganzes sein, wenn die eine von beiden die reelle Elementargerade ist. Denn hätte eine imaginäre Elementargerade ein gebrochenes Zahlenverhältniss zu der reellen Elementargeraden so hiesse das offenbar, dass es eine dritte Elementargerade giebt, die ihr gemeinsames Maass ist und die somit kleiner als die reelle Elementargerade ist, was jedoch nach Lehrsatz 16, 1 Ab. unmöglich ist.

Anmerkung. Dass die arithmetische Unvergleichbarkeit zweier Elementareinheiten mit der geometrischen (d. h. qualitativen) Unvergleichbarkeit dieser Einheiten nicht zusammenfällt, rührt schliesslich davon her, dass dasjenige was qualitativ auf ungleiche Weise gesetzt ist nicht notwendigerweise auch quantitativ ungleich zu sein braucht. Zwar ist eine Elementargerade als solche stets mit der reellen Elementargeraden quantitativ ungleich, aber wenn sie mit ihr commensurabel ist und eine ganze Vielfache derselben darstellt, dann ist sie offenbar mit derjenigen reellen Geraden gleich, die die entsprechende ganze Vielfache der reellen Elementargeraden darstellt, und gerade daraus ersieht man, dass es in dem discreten Raume einerseits nur deshalb incommensurable Elementargeraden giebt, weil es in demselben qualitativ verschiedene Elementargeraden giebt, und andererseits dass die imaginären Elementargeraden nur deshalb mit der reellen Elementargeraden nicht alle incommensurabel sind, weil dasjenige

was qualitativ in verschiedener Weise gesetzt ist, nicht notwendigerweise auch quantitativ ungleich zu sein braucht.

3. Lehrsatz.

Die Elementargeraden der ersten und der zweiten Imaginären sind mit der reellen Elementargeraden incommensurabel.

In dem Punktennetz der Fig. 6. Taf. I sind die Elementargeraden der ersten Imaginären (vgl. die Anmerkung 1 zu Lehrsatz 13 1 Ab.) AB′, AC′, AD′, AE′ etc. AB″, AB‴ etc. Wir betrachten zunächst die Elementargeraden AB′, AC′ AD′ etc. Sie sind offenbar die Seiten der Dreiecke ABB′, ACC′, ADD′ etc. Da die Winkel ∠ B, ∠ C, ∠ D etc. in diesen Dreiecken offenbar 2 P betragen, nach Lehrsatz 54 1 Ab. aber die Summe der drei Winkel im Dreiecke 3 P beträgt, so ist jeder von ihnen grösser als jeder andere Winkel in den entsprechenden Dreiecken. Da nun nach Lehrsatz 49 1 Ab. dem grösseren Winkel im Dreiecke auch die grössere Seite entspricht so ist offenbar AB′ > AB, AC′ > AC, AD′ > AD etc. und da nach Lehrsatz 51 1 Ab. ebenso AB′ < AB + BB′, AC′ < AC + CC′, AD′ < AD + DD′ etc. ist, oder anders geschrieben AB′ > 1 und < 2, AC′ > 2 und < 3, AD′ > 3 und < 4 etc. ist, so ist es offenbar dass, da nach dem vorigen Lehrsatz die imaginäre und die reelle Elementargerade kein gebrochenes Zahlenverhältniss ihrer Grösse haben können, AB′, AC′, AD′ etc. mit der reellen Elementargeraden notwendigerweise incommensurabel sein müssen. Was für die Reihe der imaginären Elementargeraden AB′, AC′, AD′ etc. gilt gilt offenbar aus demselben Grunde auch für die andere Reihe AB″, AB‴ etc. derselben, und damit ist der Lehrsatz bewiesen.

Ähnlich lässt sich der Beweis für die zweiten Imaginären AD″, AE″ etc. AC‴ etc. führen. Aus den Dreiecken ADD″, AEE″ etc. folgt einerseits dass AD″ < 5, AE″ < 6 und aus den Dreiecken AED″, AFE″ etc. andererseits dass AD″ > 4, AE″ > 5 etc. ist, und es gilt somit der Lehrsatz auch für die zweiten Imaginären.

Anmerkung 1. Für die Elementargerade der Hauptimaginären lässt sich ein noch einfacherer Beweis als es der obige ist führen. Die imaginäre Elementargerade AB′ ist nach Lehrsatz 17, 1 Ab. kürzer als die Gebrochene AB + BB′ also < 2, sie ist aber > 1 einfach deshalb weil sie nach Lehrsatz 16 1 Ab. sonst nicht imaginär wäre.

Anmerkung 2. Der erste obige Beweis ist zunächst für die ersten Imaginären der dreieckigen Ebene geführt worden, dass er aber auch für die quadratische Ebene gilt, folgt daraus dass in dieser die entsprechenden Winkel bei B, C, D, etc. R betragen, also

auch in diesem Falle grösser als jeder der beiden anderen sind. Und ähnliches gilt für die zweiten Imaginären. Auch in diesem Falle lässt sich für die Elementargerade der Hauptimaginären ein besonderer Beweis führen, der aber einigermaassen abweichend von dem entsprechenden Beweise der dreieckigen Ebene ist.

4. Lehrsatz.

Wenn zwei Geraden von einer Schaar paralleler Geraden geschnitten werden, so sind die Segmente der einen Geraden proportional mit den Segmenten der anderen Geraden.

Da nach Lehrsatz 1 die Segmente einer und derselben Geraden stets commensurabel sind, so braucht man bei den Geraden MN und PQ (Fig. 21 Taf. II), die von den parallelen Geraden AA', BB' und DD' geschnitten sind, nur die parallele Gerade CC' in Betracht zu ziehen um nach Lehrsatz 56 1 Ab. einzusehen, dass wenn das quantitative Verhältniss von $\frac{A'B'}{B'D'} = \frac{m}{n}$ ist auch das quantitative Verhältniss von $\frac{AB}{BD} = \frac{m}{n}$ ist, also $\frac{A'B'}{B'D'} = \frac{AB}{BD}$.

5. Lehrsatz.

Die Parallele zu der einen Seite des Dreiecks schneidet die beiden anderen Seiten desselben proportional.

Nach dem vorigen Lehrsatz (vgl. Fig. 7 Taf. III) ist offenbar BD : DC = AE : EC.

6. Lehrsatz.

Die zu der einen Seite des Dreiecks Parallele steht mit ihr in demselben Verhältnisse, in dem die entsprechenden Segmente jeder der beiden anderen Seiten untereinander stehen.

Zieht man die Gerade EF ‖ DB in Betracht (vgl. Fig. 7 Taf. III) so ist nach dem vorigen Lersatz AF : FB = AE : EC und, da nach Lehrsatz 55 1 Ab. FB = ED ist, AF : ED = AE : EC. Nun ist (AF + FB) : ED = (AE + EC) : EC, also AB : ED = AC : EC und ebenso AB : ED = BC : DC.

7. Lehrsatz.

Werden zwei Seiten eines Dreiecks von einer Geraden proportional geschnitten, so ist diese Gerade mit der dritten Seite des Dreiecks parallel.

Die Gerade ED soll also die Seiten AC und BC des Dreiecks

ABC (Fig. 7 Taf. III) so schneiden, dass $EC : AC = CD : BC$ ist. Wäre nun ED nicht $\parallel$ AB, so liesse sich offenbar durch den Punkt D eine Gerade DE' denken, die $\parallel$ AB wäre. Dann müsste aber nach dem vorigen Lehrsatz auch die Proportion $E'C : AC = DC : BC$ bestehen. Aus dem Vergleich dieser Proportion mit der vorigen folgt aber dass $EC = E'C$ ist, was in diesem Falle nur dann möglich ist, wenn E mit E' zusammenfällt, womit der Lehrsatz bewiesen ist.

8. Lehrsatz.

Wird in einem Dreieck ein Winkel von einer Geraden halbiert, so schneidet diese die dem Winkel gegenüberliegende Seite so, dass die beiden dabei entstehenden Segmente der letzteren den beiden anderen Seiten proportional sind

Zieht man BE $\parallel$ CD in Betracht — CD halbiert den Winkel ACB im Dreiecke ABC — so ist (vgl. Fig. 8 Taf. III) $\angle$ CBE = BCD = ACD (Lehrsatz 36 1. Ab. und die Voraussetzung) und ebenso $\angle$ BEC = DCA also $\angle$ BEC = CBE und somit (nach Lehrsatz 46 1 Ab) BC = CE. Nun ist (nach Lehrsatz 5.) $AD : DB = AC : CE$, also $AD : DB = AC : CB$.

9. Lehrsatz.

In gleichwinkeligen Dreiecken sind die um die gleichen Winkel liegenden und ebenso die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten einander proportional.

Da die in den Dreiecken um die gleichen Winkel liegenden Seiten zugleich die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten sind, so genügt es die Richtigkeit des Lehrsatzes in dem einen von diesen Fällen zu beweisen, da er dann eo ipso auch für den anderen gilt.

Ist $\angle C = C'$ (Fig. 7 und 9 Taf. III) so ist, wenn in dem Dreiecke ABC das Dreieck ECD in Betracht gezogen wird bei dem $EC = A'C'$ und $\angle E = A'$ ist, dann (nach Lehrsatz 2, 2 Ab.) $\triangle A'B'C' \cong CDE$. Dann ist aber auch $\angle B = D$ und $\angle A = E$ und demnach (nach Lehrsatz 35 1. Ab.) DE $\parallel$ AB, woraus:

$AB : A'B' = BC : B'C' = AC : A'C'$ folgt.

10. Lehrsatz.

Zwei Dreiecke, deren Seiten einander proportional sind, sind gleichwinkelig und somit miteinander ähnlich.

Die zwei Dreiecke seien ABC und A'B'C' (Fig. 7 und 9

Taf. III) und es sei $AB : A'B' = BC : B'C' = AC : A'C'$. Zieht man (in der Fig. 7) das Dreieck ECD in Betracht, bei dem $EC = A'C'$ und $ED \parallel AB$ ist, dann ist nach Lehrsatz 6 $AC : EC = BC : DC = AB : ED$, woraus im Vergleich mit $AB : A'B' = BC : B'C' = AC : A'C'$ auch $ED = A'B'$, $DC = B'C'$ folgt und demnach nach Lehrsatz 3 2 Ab. $\triangle A'B'C' \cong EDC$ ist. Da $ED \parallel AB$ ist so ist nach Lehrsatz 36 1 Ab. $\angle E = A = A'$, $\angle D = B = B'$ und demnach sind die Dreiecke ABC und A'B'C' nach Lehrsatz 9 und Def. 4. miteinander ähnlich.

11. Lehrsatz.

Zwei Dreiecke, die zwei einander entsprechend gleiche Winkel haben, sind miteinander ähnlich.

Wenn in zwei Dreiecken zwei Winkel einander entsprechend gleich sind, so sind dann offenbar nach Lehrsatz 54 1 Ab. auch die dritten Winkel einander gleich. Nach Lehrsatz 9 sind dann aber auch ihre Seiten proportional und demnach sie selbst miteinander ähnlich.

12. Lehrsatz.

Zwei Dreiecke, die einen gleichen Winkel haben und deren diesen Winkel einschliessende Seiten proportional sind, sind miteinander ähnlich.

In den zwei Dreiecken ABC und A'B'C' (Fig. 7 und Taf. III) seien $\angle C = C'$, $AC : A'C' = BC : B'C'$. Zieht man in dem Dreiecke ABC das Dreieck ECD in Betracht, bei dem $EC = A'C'$ und $ED \parallel AB$ ist, dann ist nach Lehrsatz 6 $AC : EC = BC : D$ woraus im Vergleich mit $AC : A'C' = BC : B'C'$ auch $DC = B'$ folgt und demnach nach Lehrsatz 1 2 Ab. $\triangle A'B'C' \cong EDC$ i Da $ED \parallel AB$ ist, so ist nach Lehrsatz 36 1 Ab. $\angle E = A = A'$ $\angle D = B = B'$ und demnach sind die Dreiecke ABC und A'B' nach Lehrsatz 9 miteinander ähnlich.

13. Lehrsatz.

Die zwei um die von dem rechten Winkel ausgehende Senkrekte im rechtwinkeligen Dreieck gelegenen Dreiecke sind mit dem ganzen Dreieck und untereinander ähnlich.

In den beiden Dreiecken ABD und BDC die um die Senkrechte BD des rechtwinkeligen Dreiecks ABC liegen (vgl. Fig. 10 Taf. III) sind die beiden Winkel bei D einander gleich, weil beide rechte sind; ausserdem ist der Winkel C im Dreiecke BDC gleich

dem Winkel bei B im Dreiecke ABD, weil DC $\perp$ BD und BC $\perp$ AB ist (vgl. die Arg. zu Lehrsatz 35), nach Lehrsatz 11 sind sie also miteinander ähnlich. Ebenso sind die Dreiecke ABD und ABC einerseits und BDC und ABC andererseits miteinander ähnlich, da die rechten Winkel bei D in beiden Fällen als rechte gleich dem Winkel B im Dreieck ABC sind, und ausserdem $\angle$ A im ersten und $\angle$ C im zweiten Falle den beiden entsprechenden Dreiecken gemeinsam ist.

1. Nebensatz.

Die vom rechten Winkel ausgehende und auf der Hypotenuse senkrecht stehende Gerade des rechtwinkeligen Dreiecks ist die mittlere Proportionale zwischen den beiden Segmenten der Hypotenuse.

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABD und BDC folgt:

$$AD : BD = BD : DC.$$

2. Nebensatz.

Die *eine Kathete des rechtwinkeligen* Dreiecks *ist die mittlere Proportionale zwischen der Hypotenuse und dem ihr zugekehrten Segmente der letzteren, welches durch die vom rechten Winkel ausgehende auf der Hypotenuse senkrecht stehende Gerade entsteht.*

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABD und ABC einerseits folgt AC : AB = AB : AD und ebenso aus der Ähnlichkeit der Dreiecke BDC und ABC andererseits folgt AC : BC = BC : DC.

14. Lehrsatz.

In jedem rechtwinkeligen Dreieck *ist das Quadrat der Hypotenuse gleich der Quadratensumme der Katheten.*

Nach dem Nebensatz 2 des vorigen Lehrsatzes ist AC : AB = AB : AD und AC : BC = BC : DC, daraus folgt

$$AB^2 = AC.AD \text{ und } BC^2 = AC.DC \text{ also}$$

$$AB^2 + BC^2 = AC\,(AD + DC) = AC^2 \text{ also } AC^2 = AB^2 + BC^2$$

Anmerkung 1. Es ist leicht einzusehen, dass in dem obigen Lehrsatze nicht von den Quadraten als Flächen über den Seiten des rechtwinkeligen Dreiecks (der Pythagoreische Lehrsatz) die Rede ist, sondern von den Quadraten dieser Seiten selbst, d. h. von dem Verhältniss der Geraden, die die Quadrate der entsprechenden Seiten darstellen. Infolgedessen ermöglicht dieser Satz die nähere Darstellung und Berechnung des numerischen Verhältnisses der imaginären Geraden untereinander und mit den reellen Geraden. Wir wollen hier

diese Berechnung ausführen und damit unsere Sätze über die Verhältnisse der Imaginären untereinander und mit den reellen Geraden auch zahlenmässig bestätigen.

Diese Berechnung werden wir zuerst für die dreieckige Ebene als die ursprünglichere und dann für die quadratische vornehmen, wobei selbstverständlich in erster Reihe das Verhältniss der imaginären Elementargeraden mit der reellen Elementargeraden in Betracht zu ziehen ist. Nun zeigt eine nähere Betrachtung des dreieckigen Punktennetzes auf der Fig. 11 Taf. III dass die Elementargerade OM der Hauptimaginären OO′, die das Punktenfeld OO_8 $O'O'_8$ in zwei gleiche Theile theilt (Lehrsatz 13 und 37 1 Ab.), aus dem rechtwinkeligen Dreieck OMO_2 berechnet werden kann, denn es ist $OM = \sqrt{OO_2^2 - MO_2^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$. Haben wir nun einmal die Elementargerade der Hauptimaginären bestimmt, so zeigt nur ein Blick auf jenes Punktenfeld, dass die Elementargeraden derjenigen ersten Imaginären (die ersten Imaginären sind OM_1, OM_2, OM_3, OM_4 etc. resp. OM'_1, OM'_2, OM'_3, OM'_4, etc.) welche die an geraden Stellen stehenden Punkte M'_1, M'_3, M'_5, etc. der Geraden $O_1M'_8$ mit dem Ausgangspunkte O verbinden, aus den rechtwinkeligen Dreiecken OO_2M', $OO_3M'_3$, $OO_4M'_5$ etc. berechnet werden können, also aus rechtwinkeligen Dreiecken, deren Hypothenuse die zu berechnende imaginäre Elementargerade selbst ist. Dagegen können die imaginären Elementargeraden, welche die an ungeraden Stellen stehenden Punkte M'_2, M'_4 etc. der Geraden $O_1M'_8$ mit dem Ausgangspunkte O verbinden, nur aus rechtwinkeligen Dreiecken ON'_4O_5, ON'_8 O_7 etc. berechnet werden, in denen die imaginäre Hypotenuse das Zweifache der zu berechnenden imaginären Elementargeraden darstellt. Und dasselbe gilt für die zweiten Imaginären ON_1, ON_2, ON_3 etc. (resp. ON'_1, ON'_2, ON'_3 etc.) und ebenso für die dritten u. s. w. Wenn wir nun diese Berechnungen ausführen und sie durch die Hinzufügung der entsprechenden Werthe der reellen Geraden ergänzen, so werden wir foldendes einfache Schema erhalten, in dem jede Zahl durch ihre Stelle die Grösse der entsprechenden imaginären Elementargeraden und Geraden in dem dreieckigen Punktennetze darstellt

$\sqrt{0}$	$\sqrt{1}$	$\sqrt{4}$	$\sqrt{9}$	$\sqrt{16}$	$\sqrt{25}$	$\sqrt{36}$
$\sqrt{1}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{21}$	$\sqrt{31}$	$\sqrt{43}$
$\sqrt{4}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{12}$	$\sqrt{19}$	$\sqrt{28}$	$\sqrt{39}$	$\sqrt{52}$
$\sqrt{9}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{19}$	$\sqrt{27}$	$\sqrt{37}$	$\sqrt{49}$	$\sqrt{63}$
$\sqrt{16}$	$\sqrt{21}$	$\sqrt{28}$	$\sqrt{37}$	$\sqrt{48}$	$\sqrt{61}$	$\sqrt{76}$
$\sqrt{25}$	$\sqrt{31}$	$\sqrt{39}$	$\sqrt{49}$	$\sqrt{61}$	$\sqrt{75}$	$\sqrt{91}$
$\sqrt{36}$	$\sqrt{43}$	$\sqrt{52}$	$\sqrt{63}$	$\sqrt{76}$	$\sqrt{91}$	$\sqrt{108}$

$\sqrt{0}$	$\sqrt{1}$	$\sqrt{4}$	$\sqrt{9}$	$\sqrt{16}$	$\sqrt{25}$	$\sqrt{36}$
$\sqrt{1}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{17}$	$\sqrt{26}$	$\sqrt{37}$
$\sqrt{4}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{20}$	$\sqrt{29}$	$\sqrt{40}$
$\sqrt{9}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{18}$	$\sqrt{25}$	$\sqrt{34}$	$\sqrt{45}$
$\sqrt{16}$	$\sqrt{17}$	$\sqrt{20}$	$\sqrt{25}$	$\sqrt{32}$	$\sqrt{41}$	$\sqrt{52}$
$\sqrt{25}$	$\sqrt{26}$	$\sqrt{29}$	$\sqrt{34}$	$\sqrt{41}$	$\sqrt{50}$	$\sqrt{61}$
$\sqrt{36}$	$\sqrt{37}$	$\sqrt{40}$	$\sqrt{45}$	$\sqrt{52}$	$\sqrt{61}$	$\sqrt{72}$

Nur ein Blick auf diese beiden Zahlentabellen (die zweite Zahlentabelle enthält die Berechnung der Imaginären in der quadratischen Ebene, eine Berechnung die ohne weiters verständlich ist) überzeugt uns, dass die Mehrheit der imaginären Elementargeraden in Bezug auf die reelle Elemmentargerade incommensurabel ist, dass es aber auch imaginäre Elementargeraden giebt, die mit der reellen Geraden commensurabel sind (so ist in der ersten Tabelle $\sqrt{49} = 7$, in der zweiten $\sqrt{25} = 5$). Da die unter der Quadratwurzel stehenden Zahlen ganze Zahlen sind, so stellt die Quadratwurzel, wenn sie rational ist, eine ganze Zahl, so dass damit unser Lehrsatz 2 bestätigt ist. Aus dem Vergleich der entsprechenden Zahlenreihen kann man sich sehr leicht auch von der Richtigkeit des Lehrsatzes 3 überzeugen. Und schliesslich lassen sich aus dem Vergleich der Zahlen in den zwei Zahlentabellen noch folgende Sätze deducieren:

1. Satz.

Wenn zwei imaginäre Elementargeraden mit der reellen Elementargeraden incommensurabel sind, so sind sie auch miteinander incommensurabel.

2. Satz.

Wenn zwei Elementargeraden miteinander incommensurabel sind, so sind auch ihre Geraden untereinander incommensurabel

Auf Grund der Bestimmungen des Verhältnisses der imaginären und reellen Elementargeraden miteinander können wir leicht die für die discrete Geometrie so fundamentale Frage entscheiden, ob es in der quadratischen Ebene den Winkel P und ein gleichseitiges Dreieck giebt.

Wir wollen, um diese Frage gründlich lösen zu können, das Vorhandensein der Winkel P und R sowohl in der dreieckigen wie in der quadratischen Ebene untersuchen, und in dieser Beziehung lassen sich folgende Sätze aufstellen.

1. Satz.

Zwischen je zwei gleichartigen (reellen oder imaginären) Geraden ist in der dreieckigen Ebene der Winkel P möglich, der Winkel R dagegen unmöglich.

2. Satz.

Zwischen zwei ungleichartigen Geraden ist in der dreieckigen Ebene der Winkel P unmöglich, der Winkel R nur dann möglich, wenn die eine von beiden reell ist.

3. Satz.

Zwischen je zwei gleichartigen Geraden ist in der quadratischen Ebene der Winkel R möglich, der Winkel P dagegen unmöglich.

4. Satz.

Zwischen zwei ungleichartigen Geraden ist in der quadratischen Ebene weder der Winkel R noch der Winkel P möglich.

Die zwei ersten Sätze, die für die dreieckige Ebene gelten, lassen sich sehr leicht auf Grund der inneren Struktur derselben und auf Grund der Lehrsätze 29, 31 und 37 I Ab. deducieren.

Die beiden anderen Sätze, die für die quadratische Ebene gelten, müssen eingehender auf ihre Wahrheit untersucht werden. Dass der erste dieser Sätze, insofern er den Winkel R betrifft, richtig ist, folgt unmittelbar aus der inneren Struktur der quadratischen Ebene und dem Lehrsatz 29 I Ab. und braucht nicht besonders deduciert zu werden. Dass derselbe Satz, insofern er den Winkel P betrifft, nicht so leicht deduciert werden kann, ist ohne weiters klar. Um diese zweite Hälfte desselben zu deducieren müssen wir eine besondere Methode anwenden. Wenn zwischen zwei gleichartigen Geraden der quadratischen Ebene der Winkel P möglich wäre, dann müsste offenbar, sobald von diesen qualitativ gleichen Geraden quantitativ gleiche Stücke in Betracht gezogen werden, die dritte Gerade, die die Grenzpunkte dieser letzteren verbindet, nach den Lehrsätzen 46 und 54 I Ab. mit ihnen quantitativ gleich sein und demnach ein gleichseitiges Dreieck bilden. Da es nun, wie man sich leicht überzeugen kann (vgl. Fig. 12 und 13 Taf. III), die innere Struktur der quadratischen Ebene mit sich bringt, dass diese dritte Gerade (resp. die dritte Seite des gleichseitigen Dreiecks) entweder die reelle oder die hauptimaginäre Gerade ist, so muss diese dritte Seite mit den beiden anderen stets ungleichartig sein (da ja im Falle, dass die beiden ersten Geraden die Hauptimaginären darstellen die dritte reell et vice versa ist), und die Lösung der Frage, ob in der quadratischen Ebene der Winkel P zwischen zwei gleichartigen Geraden möglich ist, sich demnach auf die Lösung der Frage von der Möglichkeit eines gleichseitigen Dreiecks, dessen zwei Seiten gleichartig und die dritte ungleichartig ist, zurückführt. Bei der Lösung dieser letzteren Frage müssen nun die beiden obigen Fälle streng voneinander unterschieden werden.

Wir betrachten nun zunächst den Fall, in dem die dritte Seite des gleichseitigen Dreiecks reell ist. Wenn diese letztere mit a, die beiden ersten mit b und c bezeichnet werden, die Senkrechte von a

dem Schnittpunkte der gleichartigen Seiten auf die dritte reelle mit d, dann folgt aus den entsprechenden rechtwinkeligen Dreiecken (Fig. 12. Taf. III.) nach dem obigen Lehrsatz: $b = c = d^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$, woraus wenn $b = a$ sein soll $d = a\sqrt{3}$ folgt, eine Gleichung die keine rationale Lösung zulässt, und demnach, da d und a ganze Zahlen sein müssen, a nicht $=$ b sein kann.

Wenn die dritte Seite des gleichseitigen Dreiecks imaginär ist, dann folgt, wenn wir diese dritte Seite mit a und die beiden anderen mit b und c bezeichnen, und wenn wir die entsprechenden rechtwinkeligen Dreiecke in Betracht ziehen und in ihnen die entsprechenden Katheten mit $d-m$ bezeichnen (vgl. die Fig. 13 Taf. III): $a^2 = 2\,m^2$, $b^2 = c^2 = d^2 + (d-m)^2$, woraus wenn $b = a$ sein soll $d = \frac{m}{2} \pm \frac{m}{2}\sqrt{3}$ folgt, eine Gleichung die keine rationale Lösung zulässt und demnach, da d und m ganze Zahlen sein müssen (resp. sind), a nicht $=$ b sein kann.

Diese Methode, die wir zum Beweis des vorigen Satzes benutzt haben, können wir nicht vollkommen bei dem Beweise des letzten der obigen vier Sätze gebrauchen. Dieselbe kann wohl vollkommen angewandt werden, wenn die eine der beiden ungleichartigen Geraden reell ist, denn in diesem Falle haben wir eigentlich nur den ersten der beiden obigen Fälle vor uns, da die reelle Gerade dann die dritte Seite des gleichseitig sein sollenden Dreiecks darstellt, dessen zwei übrige Seiten die imaginären Geraden darstellen, und da ein solches gleichseitiges Dreieck unmöglich ist, so ist auch der Winkel P zwischen einer reellen und einer imaginären Geraden in der quadratischen Ebene unmöglich. Ganz anders steht aber die Sache, wenn die beiden ungleichartigen Geraden imaginär sind. Hier sind dann zwei Fälle zu unterscheiden, von denen in dem einen die betreffende Methode angewandt und in dem anderen nicht angewandt werden kann. Es ist nach den obigen Ausführungen klar, dass die Methode nur dann angewandt werden kann, wenn sich an den entsprechenden ungleichartigen Geraden quantitativ gleiche Stücke finden lassen, was bei incommensurablen imaginären Geraden, deren Elementargeraden ungleich sind, offenbar nicht der Fall ist, wie dies aus der Gleichung $(m\sqrt{a})^2 = (n\sqrt{b})^2$, woraus $m = n\sqrt{\frac{a}{b}}$ folgt, wo a und b ganze Nicht-quadratzahlen sind, was dagegen sowohl bei den untereinander commensurablen Geraden,

deren Elementargeraden gleich sind (z. B. die Elementargerade, deren Grösse $\sqrt{65}$ ist, befindet sich in der quadratischen Ebene zweimal, da $65 = 8^2 + 1^2$ und $65 = 7^2 + 4^2$ ist) wie bei den commensurablen Geraden mit ungleichen Elementargeraden der Fall ist (so z. b. ist $13\sqrt{25} = 5\sqrt{169}$, so dass ein Stück der imaginären Geraden, deren Elementargerade $\sqrt{25}$ ist und das 13 dieser Elementargeraden enthält, gleich dem Stücke der imaginären Geraden, deren Elementargerade $\sqrt{169}$ und das 5 dieser Elemetargeraden enthält, ist.)

In dem Falle nun, wo die imaginären ungleichartigen Geraden quantitativ gleiche Segmente enthalten, lässt sich die obige Methode anwenden und sie liefert in diesem Falle ebenso ein negatives Resultat wie in den beiden obigen. Bezeichnet man die drei Seiten des entsprechenden gleichseitig sein sollenden Dreiecks mit a, b, c und die entsprechenden Katheten der rechtwinkeligen Dreiecke (vgl. Fig 13 Taf. III) mit m, n, d, e, $e - n$, $d - m$, so lassen sich dabei offenbar folgende Gleichungen aufstellen: $a^2 = m^2 + n^2$, $b^2 = d^2 + (e - n)^2$, $c^2 = e^2 + (d - m)^2$, woraus wenn $a^2 = b^2 = c^2$ gesetzt wird, $e = \frac{n}{2} \pm \frac{m}{2}\sqrt{3}$ und $d = \frac{m}{2} \pm \frac{n}{2}\sqrt{3}$ folgt, Gleichungen, die keine rationale Lösung zulassen und demnach, da m, n, d und e ganze Zahlen sein müssen, auch nicht $a = b = c$ sein kann. Wenn $m = n$ gesetzt wird dann ist auch $d = e$ und dann haben wir den zweiten der obigen Fälle vor uns, so dass die Unmöglichkeit des gleichseitigen Dreiecks mit den drei ungleichartigen Seiten die Unmöglichkeit eines solchen mit zwei gleichartigen und der dritten ungleichartigen in sich begreift.

Es bleibt uns also nur noch der Fall übrig, in dem die ungleichartigen Imaginären untereinander incommensurabel sind. Dass zwischen solchen Geraden der Winkel P unmöglich ist lässt sich nur einsehen wenn man erstens in Betracht zieht, dass in dem rechtwinkelige Dreiecke, in dem die eine derselben Hypotenuse und die ander eine Kathete ist, das Verhältniss der beiden Katheten desselben ei irrationales sein müsste, wenn der betreffende Winkel zwischen d beiden Geraden P betrüge. In der dreieckigen Ebene nämlich i das Verhältniss der entsprechenden Katheten, wenn der eine Wink des rechtwinkeligen Dreiecks P beträgt, wie man sich leicht üb zeugen kann, ein irrationales, und dasselbe müsste demnach au für die quadratische Ebene (vgl. Lehrsatz 40, 1 Ab.) gelten. N zeigt aber ein aufmerksamer Blick auf die letztere, dass zwei im ginäre ungleichartige Geraden wenn nicht direkt so doch in ih Verlängerung stets — worüber man sich auch rechnerisch überzeug

kann — ein entsprechendes rechtwinkeliges Dreieck bilden (vgl. *Fig.* 14 Taf. III) in dem aber das entsprechende Verhältniss der Katheten stets ein rationales und demnach der Winkel P zwischen zwei ungleichartigen Imaginären nie vorhanden ist.* Es ist zugleich einleuchtend, dass dieser Fall auch die beiden vorigen in sich begreift und demnach allgemein gilt.

Obgleich nun so in der quadratischen Ebene zwischen zwei irgend welchen Geraden der Winkel P nicht besteht, so lässt sich doch leicht zeigen, dass von einem bestimmten Schnittpunkte zweier Geraden (der selbstverständlich zugleich Schnittpunkt zweier reellen Geraden ist) aus gerechnet in jeder bestimmten Entfernung von demselben resp. in einer zu einer der beiden Geraden Parallelen ein Punkt existiert, dessen imaginäre Entfernung von jenem Schnittpunkte eine Imaginäre darstellt, deren Winkel mit der anderen jener beiden Geraden dem Winkel P am nächsten ist. Diese Imaginäre wird stets die entsprechende Seite jenes entsprechenden ungleichseitigen Dreiecks sein, dessen Seitenunterschied am kleinsten ist, d. h. der dem gleichseitigen Dreieck am nächsten steht. So z. B. ist die imaginäre Gerade AC in der Fig. 10 Taf. I als die Seite des entsprechenden ungleichseitigen gleichschenkeligen Dreiecks (wenn die eine jener Geraden reell ist, dann ist das entsprechende ungleichseitige Dreieck, wie wir früher sahen, gleichschenkelig) $= \sqrt{12^2+7^2} = \sqrt{193} = 13.92$, und sie unterscheidet sich sehr wenig von der dritten ungleichen Seite desselben welche $7+7=14$ beträgt. Jede andere imaginäre Gerade z. b. $\sqrt{12^2+6^2}$, $\sqrt{12^2+5^2}$, $\sqrt{12^2+8^2}$, etc.... unterscheidet sich mehr von den entsprechenden Geraden $6+6=12$, $5+5=10$, $8+8=16$ etc. was auch aus der Gleichung $\sqrt{12^2+m^2} = 2\,m$, woraus $m = 4\sqrt{3}$, hervorgeht.

Dass ein gleichseitiges Dreieck in dem die drei Seiten alle untereinander ungleichartig wären in der dreieckigen Ebene unmöglich ist folgt einfach daraus, dass in derselben der Winkel P zwischen zwei ungleichartigen Geraden nicht besteht; dass dasselbe aber ebenso in der quadratischen Ebene unmöglich ist haben wir theils direkt bewiesen, indem wir aus der Unmöglichkeit eines solchen Dreiecks die Unmöglichkeit des Winkels P deducierten theils

* Die obige Figur zeigt zugleich, wie man den Winkel zweier durch einander hindurchgehenden Geraden bestimmen kann. Die Elementargerade $\sqrt{10}$ geht durch die andere Elementargerade von derselben Art und Gröse hindurch ohne sich mit ihr in einem Punkte zu schneiden; die zu ihr Parallele dritte Elementargerade derselben Art schneidet aber die zweite in einem Punkte, so dass der Winkel zwischen diesen gleich dem Winkel zwischen jenen ersten zwei ist.

indirekt aus der Unmöglichkeit des Winkels P zwischen zwei ungleichartigen Geraden umgekehrt auf die Unmöglichkeit desselben schliessen. Ebenso folgt aus unseren obigen Ausführungen dass in der quadratischen Ebene ein gleichseitiges Dreieck in dem zwei Seiten untereinander gleichartig und die dritte mit ihnen ungleichartig wäre nicht möglich ist, und wir müssen nunmehr hinzufügen, dass in der dreieckigen Ebene ein solches gleichseitiges Dreieck einfach deshalb nicht existiert, weil der Winkel P in derselben nur zwischen zwei gleichartigen Geraden möglich ist, in welchem Falle dann also die dritte Seite des entsprechenden gleichseitigen Dreiecks stets gleicher Art mit den beiden anderen ist.

Anmerkung 2. Aus der Berechnung der verschiedenen imaginären Elementargeraden, die in der vorigen Anmerkung vorgenommen worden ist, geht hervor, dass es unter ihnen sowohl solche giebt die quantitativ gleich wie solche die quantitativ ungleich oder auch (und das ist die überwiegende Mehrzahl) incommensurabel sind. Daraus folgt, dass aus der quantitativen Gleichheit zweier Elementargeraden auf ihre qualitative Gleichheit resp. Gleichartigkeit nicht wohl aber aus ihrer quantitativen Ungleichheit auf ihre qualitative Ungleichheit resp. Ungleichartigkeit (vgl. die Anmerkung zu Lehrsatz 2. dieses Abschnitts) geschlossen werden kann. Dieses letztere gilt in erster Reihe für die incommensurablen Elementargeraden, und daraus folgt unzweifelhaft, dass die Elementargerade der Hauptimaginären in der quadratischen Ebene eine von der Elementargeraden der Hauptimaginären in der dreieckigen Ebene qualitativ verschiedene Berührungsart darstellen muss, da die Grösse der ersteren $\sqrt{2}$ und die der letzteren $\sqrt{3}$ ist.

II. Theil.

Geometrie des dreidimensionalen Raumes.

A. DEFINITIONEN.

1. Der einfache dreidimensionale Raum oder der *Elementar-rper* heisst der völlig imaginäre leere Zwischenraum, der ent-der von *vier* unmittelbar miteinander sich berührenden Punkten er von *acht* Punkten eingeschlossen wird, von denen sich jeder nkt mit drei Punkten unmittelbar und mit vier Punkten mittelbar ührt. Im ersten Falle heisst der Elementarkörper das *einfache traeder*, im zweiten Falle der *einfache Würfel* (Hexaeder).

2. Der *ausgebreitete dreidimensionale Raum* ist ein System ı quadratischen (resp. octaedrischen) Ebenen, in dem sich die nkte jeder nachfolgenden Ebene nur mit den Punkten einer hergehenden Ebene berühren.

3. Die *gebrochene Fläche* ist ein System von Linien, in dem h die Punkte einer nachfolgenden Linie mit den Punkten zweier er mehrerer vorhergehenden Linien berühren. Wenn die die iche constituirenden Linien Geraden sind, so heisst die Fläche *fach* und wenn sie selbst gebrochen sind, *mehrfach* gebrochen.

4. *Reell* heisst eine *Fläche*, wenn sie aus reellen; *imaginär*, nn sie aus imaginären oder aus imaginären und reellen Li-n besteht.

5. *Flächenwinkel* heisst der Richtungsunterschied zweier ein-der begegnender Ebenen.

6. *Reell* heisst ein *Flächenwinkel*, wenn seine Ebenen reell; *aginär*, wenn eine oder beide imaginär sind.

7. *Körperlicher Winkel* oder *Ecke* heisst der Richtungs-terschied dreier oder mehrerer von einem Punkte ausgehenden enen.

8. *Reell* heisst ein *Körperwinkel*, wenn seine Ebenen reell; *imaginär*, wenn sie imaginär sind oder wenn es unter ihnen imaginäre giebt.

9. *Körperlicher Grundwinkel* oder *Grundecke* heisst der Richtungsunterschied der drei ersten von einem Punkte ausgehenden reellen Ebenen.

10. Eine *Gerade* ist *senkrecht* in Bezug auf eine Ebene wenn sie senkrecht in Bezug auf alle durch ihren Fusspunkt hindurchgehenden Geraden dieser Ebene ist. *Fusspunkt* heisst der Durchschnittspunkt der Geraden mit der Ebene.

11. Eine *Gerade* ist *parallel* (gleichgerichtet) in Bezug auf eine andere Gerade wenn sie mit ihr in derselben Ebene liegt und ihr nirgends begegnet.

12. Eine *Gerade* ist *parallel* in Bezug auf eine Ebene, wenn sie sich mit dieser nirgends begegnet, möge man sich beide fortgesetzt denken wie viel man wolle.

13. *Parallel* heissen *Ebenen* die sich nirgends begegnen, möge man sie sich fortgesetzt denken wie viel man wolle.

14. *Körper* heisst der von Ebenen eingeschlossene dreidimensionale Raum.

15. *Reell* heisst ein *Körper*, wenn seine Ebenen reell; *imaginär*, wenn sie imaginär sind oder wenn es unter ihnen imaginäre giebt.

16. *Gleich (congruent)* heissen *Körper*, die von einer gleichen Anzahl congruenter ebenen Figuren begrenzt sind.

17. *Ähnlich* heissen *Körper*, die von gleich vielen ähnlichen ebenen Figuren begrenzt sind.

18. *Pyramide* heisst ein *Körper*, der von Ebenen begrenzt ist, die von einer Ebene aus an einem ausserhalb derselben befindlichen Punkte zusammengestellt sind.

19. *Prisma* heisst ein Körper, der von Ebenen so begrenzt ist, dass zwei von ihnen, die einander gegenüberliegend sind, miteinander und einander parallel sind, die übrigen aber Parallelogramme sind.

20. *Würfel* (Hexaeder) heisst ein von sechs gleichen Quadraten begrenzter Körper.

B. LEHRSÄTZE.

1. Lehrsatz.

Der dreieckige ausgebreitete Raum von drei Dimensionen ist unmöglich.

Dass der dreieckige unausgebreitete Raum von drei Dimensionen möglich ist, folgt unmittelbar aus Ax. 7. Da nun nach Ax. 8 der ausgebreitete Raum aus dem unausgebreiteten entsteht, so muss die Möglichkeit des dreieckigen ausgebreiteten Raumes von drei Dimensionen aus dem dreieckigen unausgebreiteten Raume von drei Dimensionen deduciert werden, so wie die Möglichkeit des zweidimensionalen dreieckigen ausgebreiteten Raumes aus dem zweidimensionalen unausgebreiteten Raume deduciert worden ist (vgl. Lehrsatz 9, I Th. 1. Ab.). Es ist nun offenbar, dass der Punkt E, der den vier sich unmittelbar berührenden Punkten A, B, C, D (vgl. Fig. 15 Taf. III) hinzugefügt wird, nur dann mit ihnen den dreidimensionalen ausgebreiteten Raum bilden wird, wenn er sich mit drei von ihnen unmittelbar berührt, da wenn er sich mit allen vier unmittelbar berühren würde, er dann nach Ax. 7 in die vierte Dimension hinein gehörte, und wenn er sich bloss mit zwei von ihnen berührte, in die zweite gehören würde. Aus dem letzteren folgt schon dass die (ausgebreitete) Ebene nicht Bestandtheil des ausgebreiteten dreieckigen dreidimensionalen Raumes sein kann, weil der erste Punkt, der dem unausgebreiteten dreidimensionalen Raume hinzugefügt wird, mit irgend welchen drei Punkten desselben nicht in einer (ausgebreiteten) Ebene liegen darf, und da der ausgebreitete Raum nur durch die Hinzufügung solcher Punkte entsteht so kann die (ausgebreitete) Ebene kein Bestandtheil desselben sein, und, wie leicht einzusehen, noch weniger die (ausgebreitete) Gerade. Es ist demnach auch die Anordnung der Punkte um einen Centralpunkt herum in diesem Falle eine wesentlich andere als in dem zweidimensionalen ausgebreiteten Raume. Die den Punkten A, B, C, D hinzuzufügenden Punkte E, F etc sind nicht mehr um den einen dieser Punkte herum gelegen, sie müssen vielmehr ein Polygon bilden, in dessen Inneren kein realer Punkt vorhanden ist. Berührt sich der Punkt E unmittelbar mit den Punkten DCA, dann muss sich der Punkt F mit den Punkten CED, der Punkt G mit den Punkten CFD etc unmittelbar berühren, woraus hervorgeht, dass die Punkte B, A, E, F, G etc. ein um die Gerade CD gelegenes Polygon bilden werden (vgl. Fig. 17 Taf. III.) Dass nun dieses Polygon nicht ein Sechseck sein könne, folgt einfach daraus, dass in diesem Falle, da sich die Punkte A, B, E, F, G, (H) mit dem Punkte C unmittelbar berühren, sie mit ihm in einer Ebene liegen würden, was offenbar der Voraussetzung widerspricht. Das besagte Polygon ist also entweder ein Dreieck, ein Quadrat oder ein Fünfeck. Dreieck kann dasselbe deshalb nicht sein, weil sich in diesem

Falle (vgl. Fig. 15 Taf. III) der Punkt E mit dem Punkte B sowohl mittelbar wie unmittelbar berühren müsste, was offenbar unmöglich ist, da sich ein Punkt mit einem anderen Punkte nur einmal berühren kann. Quadrat kann dasselbe deshalb nicht sein, weil sich in diesem Falle der Punkt F (vgl. Fig. 16 Taf. III) mit dem Punkte A zweimal in derselben Weise mittelbar berühren würde — die eine mittelbare Berührung ginge durch das Dreieck DCE resp. das einfache Tetraeder ADCE, die andere durch das Dreieck BDC resp. das einfache Tetraeder ABCD hindurch — was offenbar unmöglich ist, weil sich zwei Punkte nur in einer Berührung miteinander berühren können. Es bleibt also nur das Fünfeck übrig, und thatsächlich ist, rein formell genommen, jenes Polygon nur als Fünfeck möglich. Das Fünfeck enthält aber jenen in der Arg. zu Lehrsatz 9 I Th. 1. Ab. dargelegten progressus in infinitum der vielen Berührungsarten und deshalb ist dasselbe absolut unmöglich. Daraus folgt aber, dass fünf Tetraeder um eine Gerade herum nicht bestehen können, und da auch eine kleinere Zahl von solchen nicht bestehen kann, so folgt daraus offenbar, dass aus einfachen Tetraedern der Raum nicht zusammengesetzt werden kann, d. h. dass der ausgebreitete dreieckige Raum von drei Dimensionen nicht bestehen kann.

Anmerkung 1. Könnten fünf Tetraeder um eine Gerade herum bestehen, dann wäre es leicht anzugeben, wie viel Punkte noch nöthig wären, damit der ausgebreitete dreidimensionale Raum um einen Punkt herum geschlossen werde. Wenn sich die fünf Punkte A, B, E, F, G mit den sich miteinander unmittelbar berührenden Punkten D und C unmittelbar berühren, so ist es offenbar dass, wenn wir den Punkt C zum Centralpunkte nehmen, dann um die fünf Geraden AC, BC, EC, FC und GC je fünf Punkte herum liegen müssen und da je drei von ihnen unter den sechs Punkten A, B, D, E, F, G vorhanden sind und je einer gemeinsam ist, so sind nur fünf neue Punkte hinzuzufügen. Diese fünf Punkte würden sich offenbar mit dem Punkte C unmittelbar berühren, so dass wenn noch ein Punkt hinzugefügt wird, der sich mit ihnen ebenso unmittelbar berührt, dann sich dieser neue Punkt und der Punkt C miteinander unmittelbar berühren werden, und damit wäre der ausgebreitete dreidimensionale Raum geschlossen. Aus diesem geht hervor, dass sich in einem solchen Raume, wenn er möglich wäre, jeder Punkt mit zwölf Punkten unmittelbar berühren würde, und dass das regelmässige aus 20 um den einen Punkt herum gelegenen einfachen Tetraedern bestehende Ikosaeder das erste zusammengesetzte Polyeder in diesem Raume wäre.

2. Lehrsatz.

Der quadratische ausgebreitete Raum von drei Dimensionen ist möglich.

Nach Lehrsatz 40, I Th. 1 Ab. ist die quadratische d. h. die aus einfachen Quadraten bestehende Ebene möglich. Während nun (vgl. Anmerkung 3 zu jenem Lehrsatz) das einfache Quadrat nicht in ursprünglicher Weise durch die Hinzufügung der einen Elementargeraden zu der anderen entstehen konnte, was deshalb unmöglich war, weil der Begriff der mittelbaren Berührung damit nicht gegeben war, ist dem ganz anders bei dem einfachen Würfel des dreidimensionalen Raumes. Wir können uns die Entstehung dieses einfachen Würfels des dreidimensionalen Raumes und somit auch die Entstehung des dreidimensionalen quadratischen Raumes selbst ganz unabhängig von der Entstehung des einfachen Tetraeders resp. des ausgebreiteten dreieckigen Raumes von drei Dimensionen denken (diese Unabhängigkeit findet auch darin ihren Ausdruck, dass der ausgebreitete dreieckige zweidimensionale Raum, der die Voraussetzung der quadratischen Ebene bildet, möglich, während der ausgebreitete dreieckige dreidimensionale Raum unmöglich ist). Wir können uns den einfachen Würfel ganz gut auf die Weise entstanden denken, dass dem einfachen Quadrat 0_5 0_6 0_7 0_8 ein zweites Quadrat 0_1 0_2 0_3 0_4 so hinzugefügt (resp. auf dasselbe gelegt) wird, dass sich je einer von jenen ersten vier Punkten mit je einem von diesen zweiten vier Punkten (vgl. Fig 18 Taf. III) unmittelbar berührt. In diesem Falle wird sich dann jeder Punkt mit denjenigen Punkten mittelbar berühren mit denen er sich nicht unmittelbar berührt. Dabei werden nun neben den in jedem einzelnen der sechs den Würfel begrenzenden einfachen Quadraten bestehenden mittelbaren Berührungen mittelbare Berührungen auftreten, die ebenso eine neue Art von solchen darstellen, wie dies mit den mittelbaren Berührungen der quadratischen Ebene in Bezug auf die dreieckige der Fall war. Dass diese neuen mittelbaren Berührungen in dem einfachen Würfel alle ihrer quantitativen Grösse nach einander gleich sein müssen, folgt aus ihrer qualitativen Gleichheit und es kann demnach durch jenes Anlegen des einen einfachen Quadrats auf das andere nur der einfache regelmässige Würfel entstehen.

So unzweifelhaft nun die Möglichkeit des einfachen Würfels auch ist, so ist dieselbe doch noch von einer Bedingung abhängig, einer Bedingung von der die Möglichkeit des einfachen Quadrats nur deshalb nicht abhing, weil seine Entstehung auf eine besondere Weise aus der dreieckigen Ebene folgte was hier wegen der Un-

möglichkeit des entsprechenden dreidimensionalen ausgebreiteten Raumes durchaus fehlt. Wenn das eine einfache Quadrat dem anderen hinzugefügt wird, so wissen wir gar nicht ob die imaginären Rechteckflächen, die im Inneren des dabei entstehenden einfachen Würfels vorhanden sind, nicht so gross sind dass sie in ihrem Inneren reale Punkte enthalten, was wiederum offenbar von der Grösse der entsprechenden imaginären Berührungen (resp. den Diagonalen der Rechtecke) abhängt. Sind nämlich diese imaginären Berührungen so gross dass reale Punkte im Inneren des einfachen Würfels möglich sind, so müssen dieselben offenbar untereinander und mit den Eckpunkten des Würfels in möglichen Berührungen stehen, sind sie aber möglich die entsprechenden Berührungsentfernungen aber unmöglich dann wäre der einfache Würfel selbst unmöglich. Bei dem einfachen Tetraeder als dem Elementarbestandtheile des dreieckigen Raumes wird diese Frage der inneren Möglichkeit desselben nicht auftreten einfach deshalb weil sich alle seine Punkte unmittelbar berühren und im Inneren desselben keine mittelbaren Berührungen vorhanden sind, und dasselbe wird für jeden höherdimensionalen unausgebreiteten Raum gelten; der einfache Würfel resp. jeder höherdimensionale einfache quadratische Raum enthält imaginäre Berührungen in seinem Inneren und es muss somit die Frage nach der Möglichkeit realer Punkte in seinem Inneren erhoben werden (da eine von Punkten eingeschlossene Fläche — resp. ein höherdimensionaler Raum — offenbar nur dann eine leere nichtseiende Lücke darstellen wird, wenn in ihrem Inneren noch reale Punkte möglich sind.) Sind solche Punkte in seinem Inneren möglich, so ist offenbar auch der entsprechende einfache quadratische Raum möglich; möglich ist er auch in dem Falle, wenn die inneren realen Punkte in möglichen Berührungsverhältnissen stehen; unmöglich dagegen wenn diese letzteren unmöglich sind. Wenn wir nun nach diesen Criterien die innere Möglichkeit des einfachen Würfels untersuchen, so werden wir aus den entsprechenden rechtwinkeligen Dreiecken in den besagten Rechtecken leicht finden, dass die Grösse der imaginären Berührungen im Inneren des einfachen Würfels gleich $\sqrt{3}$ ist (Die Diagonale in dem einfachen Würfel ist offenbar die Hypotenuse des rechtwinkeligen Dreiecks, dessen eine Kathete die $\sqrt{2}$ betragende Diagonale des einfachen Quadrats als der Grund- und dessen andere Kathete die 1 betragende Kante des einfachen Quadrats als der Seitenfläche des Würfels ist), in seinem Inneren demnach ein realer Punkt unmöglich und somit der einfache Würfel selbst als solcher möglich ist.

Steht nun einmal die Möglichkeit des einfachen Würfels fest dann ist es leicht einzusehen, dass durch das Hinzufügen (resp. Aufeinanderlegen) der quadratischen Ebenen zueinander, so dass sich je vier Punkte jedes einfachen Quadrats (resp. jeder Punkt) der einen Ebene mit den entsprechenden Punkten (resp. mit je einem Punkte) der anderen Ebene unmittelbar berühren, lauter einfache Würfel entstehen werden die lückenlos nebeneinander stehen und somit den ausgebreiteten quadratischen Raum bilden werden.

3. Lehrsatz.

Der dreieckig-quadratische ausgebreitete Raum von drei Dimensionen ist unmöglich

Es kann gefragt werden ob durch die Hinzufügung (resp. Anlegung) eines einfachen dreieckigen Rhombus zu einem anderen ebensolchen nicht ebenso ein ausgebreiteter Raum entstehen könnte, wie durch die Hinzufügung des einen Quadrats zu dem anderen nach dem vorigen Lehrsatz der quadratische ausgebreitete Raum entstehen konnte. Die zwei grundlegenden Flächenseiten des einfachen Parallelepipedons, das dadurch entstünde, wären dreieckig, die übrigen vier Seiten quadratisch, dasselbe würde also den dreieckig-quadratischen Raum darstellen. Wie nun im vorigen Falle der einfache Würfel nur deshalb möglich war, weil in seinem Inneren kein realer Punkt vorhanden sein konnte, ebenso müssen wir in diesem Falle untersuchen, ob ein solcher Punkt im Inneren des einfachen Parallelepipedons notwendig und möglich ist. Nun zeigt eine einfache Berechnung der mittelbaren Berührung in dem längeren der beiden inneren Rechtecke dass dieselbe $\sqrt{4} = 2$ beträgt, während die mittelbare Berührung in dem kürzeren Rechteck $\sqrt{2}$ beträgt. Während also die Durchgangsstelle jener beiden ersten Berührungen ein realer Punkt sein müsste, müsste dieser Punkt andererseits auch der Schnittpunkt der beiden anderen mittelbaren Berührungen sein, was er eben nicht sein kann. Folglich kann das besagte einfache Parallelepipedon nicht entstehen also auch der dreieckig-quadratische ausgebreitete Raum von drei Dimensionen nicht.

Anmerkung. Unter dem dreieckig-quadratischen ausgebreiteten Raume haben wir hier einen Raum verstanden, der aus rein dreieckigen Ebenen entsteht, die so aufeinander gelegt werden, dass dabei neue rein quadratische Seitenebenen entstehen. Man könnte nun fragen ob aus den gemischten dreieckig-quadratischen Ebenen (vgl. Lehrsatz 60, I, 1 Ab.) nicht ebenso durch ein Aufeinanderlegen derselben ein ausgebreiteter dreidimensionaler Raum entstehen könnte.

der offenbar als solcher auch ein dreieckig-quadratischer wäre. Es ist nun leicht einzusehen dass, da die gemischte dreieckig-quadratische Ebene dreieckige ausgebreitete Ebenenstücke enthält, die Entstehung eines solchen Raumes aus demselben Grunde unmöglich ist aus dem auch die Entstehung des dreidimensionalen Raumes aus reinen dreieckigen Ebenen unmöglich ist.

4. Lehrsatz.

Von den sinnlich wahrgenommenen regelmässigen Körpern sind als einfache Körper nur das Tetraeder, das Quadrat und das Octaeder möglich.

Die sinnlich wahrgenommenen regelmässigen Körper sind bekanntlich diese fünf: Tetraeder, Hexaeder, Octaeder, Pentagondodekaeder und Ikosaeder. Von denselben sind offenbar nach dem 1 und 2 Lehrsatz das Tetraeder und das Hexaeder möglich. Nach der Anmerkung zu Lehrsatz 1., wonach das regelmässige aus 20 regelmässigen Tetraedern bestehende Ikosaeder deshalb unmöglich ist, weil das regelmässige Fünfeck ein unmögliches Polygon ist, folgt zugleich dass auch das aus 20 unregelmässigen Tetraedern bestehende regelmässige Ikosaeder und das Pentagondodekaeder unmöglich sind, weil beide das regelmässige Fünfeck als Bestandtheil in sich enthalten (dasselbe bildet die Begrenzungsflächen bei dem zweiten). Es bleibt also nur noch die Möglichkeit des Octaeders zu untersuchen. Ein dreidimensionales Gebilde ist offenbar — und das ist das Princip, auf Grund dessen wir ja soeben das Ikosaeder und Dodekaeder für unmöglich erklärten — nur dann möglich, wenn alle seine zwei- und eindimensionalen Bestandtheile möglich sind. Nun scheint das einfache Octaeder nach diesem Princip gar nicht möglich zu sein. Denn während das dem einfachen Würfel entsprechende zweidimensionale Gebilde das Quadrat ist und das dem einfachen Quadrat entsprechende eindimensionale Gebilde das einfache Zweieck: ist das dem einfachen Octaeder entsprechende zweidimensionale Gebilde wohl das einfache Quadrat aber das dem einfachen Quadrat als Octaeder entsprechende eindimensionale Gebilde ist nicht mehr das einfache Zweieck, sondern ein Zweieck dessen Grösse gleich $\sqrt{2}$ ist. Daraus folgt nun mit Gewissheit, dass das einfache Octaeder in ursprünglicher Weise nicht entstehen kann, da das einfache Zweieck dessen Grösse $\sqrt{2}$ ist als imaginäre Elementargerade ursprünglich nicht möglich ist. Das einfache zweidimensionale Octaeder ist aber einerseits geometrisch mit dem einfachen Quadrat vollkommen identisch und andererseits ist auch

dieses letztere in ursprünglicher Weise nicht möglich (vgl. Lehrsatz 40, I Th. 1 Ab), so dass das einfache Quadrat, welches in secundärer Weise entsteht, zugleich als das zweidimensionale einfache Octaeder betrachtet werden kann, woraus dann ohne weiters die Möglichkeit des einfachen dreidimensionalen Octaeders folgt.

5. Lehrsatz.

Eine Gerade, welche in Bezug auf zwei Geraden einer Ebene, die durch ihren Fusspunkt gehen, senkrecht ist, ist in Bezug auf diese Ebene senkrecht.

Nach Def. 10 ist eine Gerade senkrecht auf einer Ebene, wenn sie senkrecht zu allen durch ihren Fusspunkt hindurchgehenden Geraden dieser Ebene ist. Es soll also bewiesen werden, dass wenn eine Gerade in Bezug auf zwei von diesen Geraden senkrecht ist, sie dann in Bezug auf alle senkrecht ist. Es sei nun die Gerade PQ (resp. AA_1) senkrecht in Bezug auf die zwei von ihrem Fusspunkt O ausgehenden Geraden OC und OB, die in der Ebene MN liegen Fig. 19 Taf. III). Wird eine dritte durch denselben Fusspunkt O in der Ebene MN hindurchgehende Gerade in Betracht gezogen und zwar eine solche dessen Endpunkt D mit den Endpunkten C und B der Geraden OC und OD in einer Geraden liegt, so ist, wenn die Geraden AC, AD und AB einerseits und die Geraden A_1C, A_1D und A_1B andererseits in Betracht gezogen (selbstverständlich ist dabei $OA = OA_1$) werden (nach Lehrsatz 1, 2 Ab.):

$\triangle AOB \cong A_1OB$, also $AB = A_1B$

$\triangle AOC \cong A_1OC$, also $AC = A_1C$, daraus folgt weiter

(nach Lehrsatz 3 I 2 Ab.) $\triangle ABC \cong A_1BC$, also $\angle ACB = A_1CB$, daraus folgt weiter

(nach Lehrsatz, 1, I, 2 Ab.) $\triangle ACD \cong A_1CD$, also $AD = A_1D$, daraus folgt weiter

(nach Lehrsatz, 3 I, 2 Ab) $\triangle AOD \cong A_1OD$, also $\angle AOD = \angle A_1OD$, und da diese zwei Winkel in der Ebene AA_1OD liegen, so sind sie nach Def. 32 I, 1 Ab. rechte, also $AA_1 \perp OD$.

6. Lehrsatz.

Auf einer und derselben Ebene besteht in einem und demselben Punkte nur eine einzige Senkrechte.

Denn setzt man voraus, dass von einem Punkte in einer Ebene zwei Senkrechte ausgehen, so müssten in der neuen Ebene, in der sich die zwei Senkrechten befänden, diese letzteren nach dem vorigen Lehrsatz senkrecht auf der Schnittgeraden der beiden Ebenen

liegen, und es gingen dann in der Ebene von einem und dem selben Punkte auf einer Geraden zwei Senkrechte aus, was jedoch nach Lehrsatz 39 Nebensatz I, 1 unmöglich ist.

7. Lehrsatz.

Eine Gerade, die parallel in Bezug auf eine in einer Ebene liegende Gerade ist, ist zugleich mit dieser Ebene parallel.

Zieht man die Ebene in Betracht, in der die beiden parallelen Geraden liegen, so müsste, wenn sich die parallele Gerade ausserhalb der Ebene mit dieser letzteren irgendwo begegnen würde, dieselbe sich auch mit der in der Ebene liegenden mit ihr parallelen Geraden begegnen, was jedoch der Voraussetzung widerspricht.

8. Lehrsatz.

Wenn eine Gerade mit einer Ebene parallel ist, so ist sie mit jeder Geraden dieser letzteren parallel, mit der sie in einer Ebene liegt.

Denn wäre sie mit einer solchen Geraden (die zugleich die Schnittgerade der zwei Ebenen ist) nicht parallel, so müsste sie, indem sie sich mit ihr begegnen würde sich zugleich mit der Ebene selbst begegnen, was jedoch der Voraussetzung widerspricht.

1. Nebensatz.

Eine Gerade die in Bezug auf zwei einander schneidende Ebenen parallel ist, ist zugleich in Bezug auf ihre Schnittgerade parallel.

Die vorausgesetzte Gerade wird offenbar mit der Schnittgeraden der beiden Ebenen in einer Ebene liegen, und demnach nach dem obigen Lehrsatz mit ihr parallel sein.

9. Lehrsatz.

Wenn zwei parallele Ebenen von einer dritten Ebene geschnitten sind, so sind ihre Schnittgeraden einander parallel.

Die zwei Schnittgeraden liegen in einer und derselben Ebene, ausserdem sind sie in zwei Ebenen gegeben die sich miteinander nirgends begegnen können, folglich sind sie miteinander parallel.

10. Lehrsatz.

Zwei Ebenen, die in Bezug auf eine und dieselbe Gerade senkrecht sind, sind miteinander parallel.

Denn würden sie sich miteinander begegnen, so hiesse dass offenbar dass von einer und derselben gemeinsamen Stelle des Raumes zwei Ebenen von einer und derselben Richtung (beide Ebenen sind ja auf einer und derselben Geraden senkrecht) ausgehen können, was jedoch unmöglich ist.

11. Lehrsatz.

Jeder ebene Winkel einer dreiseitigen Ecke ist kleiner als die Summe der beiden anderen und grösser als ihr Unterschied.

Wenn in dem grössten der drei ebenen Winkel (resp. Seiten) der dreiseitigen Ecke ein Dreieck in Betracht gezogen wird, in dem der entsprechende Winkel gleich dem einen jener beiden ebenen Winkel ist, so lässt sich leicht auf Grund der Gleichheitssätze für die Dreiecke zeigen, dass ein solches Dreieck auch in dem anderen ebenen Winkel gegeben ist. Der Lehrsatz selbst lässt sich dann leicht auf Grund der entsprechenden Lehrsätze für die Seiten des Dreiecks deducieren.

Nebensatz.

In jeder Ecke ist jeder ebene Winkel kleiner als die Summe aller anderen.

Da jede Ecke aus dreiseitigen Ecken besteht, so lässt sich leicht auf Grund des obigen Lehrsatzes auf diesen Nebensatz schliessen.

12 Lehrsatz.

Die Summe der ebenen Winkel bei einer (drei- oder mehrseitigen) Ecke ist $< 4\,R$.

Zieht man das in einer die Kanten der Ecke schneidenden Ebene bestehende entsprechende Polygon in Betracht, so lässt sich dieser Lehrsatz leicht auf Grund der Lehrsätze 54 und 58 I Th. 1 Ab. und auf Grund des Lehrsatzes 12. Nebensatz deducieren.

Nebensatz.

Die Summe der Flächenwinkel in jeder dreiseitigen Ecke beträgt weniger als 6 R und mehr als 2 R.

Dieser Nebensatz lässt sich auf Grund des obigen Lehrsatzes sehr leicht deducieren, wenn nur eine Ergänzungsecke dabei in Betracht gezogen wird.

13. Lehrsatz.

Zwei dreiseitige Ecken in denen zwei ebene Winkel und der von ihnen eingeschlossene Flächenwinkel gleich sind, sind miteinander gleich.

Sind in den zwei dreiseitigen Ecken die zwei ebenen Winkel (resp. die ebenen Seiten) und der von ihnen eingeschlossene Flächenwinkel quantitativ auf die gleiche Weise gesetzt, so werden (vgl. den analogen Beweis zu Lehrsatz 43, I Th. 1 Ab.) offenbar auch der dritte ebene Winkel und die zwei übrigen Flächenwinkel quantitativ auf gleiche Weise gesetzt sein und demnach die Ecken selbst miteinander gleich sein.

14. Lehrsatz.

Zwei dreiseitige Ecken, in denen ein ebener Winkel und die zwei dem letzteren anliegenden Flächenwinkel einander gleich sind, sind miteinander gleich.

Der Beweis für diesen Lehrsatz ist analog mit dem Beweis zu dem Lehrsatz 45, I Th. 1 Ab.

15. Lehrsatz.

Zwei dreiseitige Ecken, in denen die drei ebenen Winkel einander gleich sind, sind miteinander gleich.

Der Beweis für diesen Lehrsatz ist analog dem Beweis zu der ersten Hälfte des Lehrsatzes 44, I Th. 1 Ab.

16. Lehrsatz.

Zwei dreiseitige Ecken, in denen die drei Flächenwinkel einander gleich sind, sind miteinander gleich.

Der Beweis für diesen Lehrsatz ist analog dem Beweis zu der zweiten Hälfte des Lehrsatzes 44, I Th. 1 Ab.

17. Lehrsatz.

Zwei gerade Prismen mit gleicher (congruenter) Grundfigur und gleicher Höhe sind miteinander gleich (congruent).

Die zwei Prismen sind offenbar qualitativ auf gleiche Weise gesetzt und demnach nach Ax. 9 einander gleich (congruent).

18. Lehrsatz.

Ein schiefes Prisma ist seinem Rauminhalte nach gleich einem geraden Prisma, dessen Seitenflächen in bezüglich denselben Ebenen liegen und dessen Höhe gleich der Seitenkante des schiefen Prisma ist.

Werden in den Ebenen der Seitenflächen des schiefen Prisma die zwei senkrecht auf diesen Seitenflächen stehenden Grundflächen des geraden Prisma in Betracht gezogen, dessen Höhe gleich der Seitenkante des schiefen Prisma ist, dann lässt sich für

die zwei dabei vorhandenen schiefen Prismensegmente leicht nachweisen, dass sie einander gleich (congruent) sind, woraus dann analog dem Beweise zu Lehrsatz 4 I. Th. 2 Ab. die Gleichkeit des schiefen und des geraden Prisma folgt.

19. Lehrsatz.

Das dreiseitige Prisma ist die Hälfte des Parallelopipedons, das mit ihm die doppelte Grundfläche und gleiche Höhe hat.

Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem ob das Parallelopipedon gerade oder schief ist.

1. Das Parallelopipedon ist gerade.

Das gerade Parallelopipedon ist offenbar durch eine Diagonalebene desselben in zwei dreiseitige Prismen zerlegt, die die gleiche (congruente) Grundfläche und gleiche Höhe haben und demnach nach Lehrsatz 18 einander gleich sind.

2. Das Parallelopipedon ist schief.

Das schiefe Parallelopipedon ist offenbar nach Lehrsatz 19 gleich dem geraden Parallelopipedon, desen Seitenflächen in den Ebenen seiner Seitenflächen liegen und dessen Höhe gleich seiner Seitenkante ist. Dieselbe Diagonalebene nun welche in diesem Falle das schiefe Parallelopipedon in zwei dreiseitige Prismen theilt, theilt auch das gerade Parallelopipedon in zwei dreiseitige Prismen. Demnach wird der Lehrsatz 19 auch für jedes Paar der einander entsprechenden geraden und schiefen dreiseitigen Prismen giltig sein, und da nun nach dem ersten Fall die geraden Prismen einander gleich sind, so müssen es auch die schiefen sein, womit der Lehrsatz auch in diesem Falle bewiesen ist.

20. Lehrsatz.

Der Rauminhalt eines Parallelopipedons ist gleich dem Product aus seiner Grundfläche und seiner Höhe.

Für das gerade Parallelopipedon, dessen Grundfläche ein Rechteck ist, lässt sich dieser Satz aus der inneren Struktur des (quadratischen) Raumes ohne weiters deducieren. Es lässt sich nun auf Grund der Lehrsätze 18 und 19 leicht zeigen, dass jedes andere Parallelopipedon gleich dem geraden rechtwinkeligen ist, wenn dasselbe nur die gleiche Grundfläche und Höhe mit dem letzteren hat, und damit ist der Lehrsatz bewiesen.

21. Lehrsatz.

Der Rauminhalt des dreiseitigen Prisma ist gleich dem Product aus seiner Grundfläche und seiner Höhe.

Dieser Lehrsatz folgt unmittelbar aus den Lehrsätzen 19 und 20.

1. Nebensatz.

Der Rauminhalt des mehrseitigen Prisma ist gleich dem Product aus seiner Grundfläche und seiner Höhe.

Da jedes mehrseitige Prisma aus dreiseitigen Prismen besteht, deren Grundflächensumme gleich der Grundfläche des ganzen Prisma ist, so ist die Richtigkeit dieses Nebensatzes auf Grund des obigen Lehrsatzes ohne weiters einleuchtend.

2. Nebensatz.

Zwei Prismen mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe sind miteinander gleich.

Dieser Nebensatz ist die unmittelbare Folge aus dem obigen Lehrsatze und dem ersten Nebensatze.

22. Lehrsatz

Zwei gerade Pyramiden mit gleicher (congruenter) Grundfigur und gleicher Höhe sind miteinander gleich (congruent).

Die zwei Pyramiden sind offenbar qualitativ auf gleiche Weise gesetzt und demnach nach Ax. 9. einander gleich (congruent.)

23. Lehrsatz.

Zwei dreiseitige Pyramiden mit gleicher Grundfläche und Höhe sind miteinander ihrem Rauminhalte nach gleich.

Ob man diese oder die entgegengesetzte Voraussetzung macht, dass nämlich zwei dreiseitige Pyramiden mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe nicht miteinander gleich sind, in jedem Falle kann die eine Pyramide offenbar als die schiefergewordene andere betrachtet werden. Nun sind aber offenbar alle Pyramiden (also auch die dreiseitigen) mit gleicher Grundfläche und Höhe insoweit quantitativ auf gleiche Weise gesetzt, dass wenn einige von ihnen bei ihrem Schieferwerden zunehmen oder abnehmen dies auch alle anderen in gleicher Weise thun werden (während alle Pyramiden mit constanter aber ungleicher Grundfläche und Höhe bei ihrem Schieferwerden ebenso entweder alle zu- oder alle abnehmen werden, nur werden sie dies in verschiedener Weise thun). Steht dies nun fest, dann braucht man nur die Thatsache in Betracht zu ziehen, dass jedes dreiseitige Prisma aus drei dreiseitigen Pyramiden besteht, um dann einzusehen, dass in zwei solchen dreiseitigen Prismen mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe, von denen die eine als die schiefergewordene andere betrachtet werden kann, jeder einzelnen Pyramide in dem einen Prisma eine solche mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe in der anderen entspricht (wir abstrahieren hier gänzlich davon ab, dass in jedem einzelnen dreiseitigen Prisma je zwei von den drei Pyramiden

gleiche Grundfläche und Höhe miteinander haben), wenn nämlich entweder alle die drei Seiten in den zwei Prismen flächengleich sind resp. wenn ihre Grundflächen einander entsprechend congruent sind oder wenn wenigstens die eine in beiden flächengleich ist (in dem Falle, wo alle die drei Seiten flächenungleich sind, haben nur zwei von jenen drei Pyramiden in beiden Prismen gleiche Grundfläche und Höhe, die dritte dagegen nicht) Wenn wir nun also zwei dreiseitige Prismen in Betracht ziehen, in denen die drei dreiseitigen Pyramiden einander entsprechend gleiche Grundfläche und Höhe haben, so sind offenbar die entsprechenden Pyramiden bei ihrem Schieferwerden in dem schieferen der beiden Prismen in ihrer Grösse alle entweder zugenommen oder abgenommen, selbstverständlich unter der Voraussetzung dass die Pyramiden mit constanter Grundfläche und Höhe bei ihrem Schieferwerden zu- oder abnehmen. Das eine oder das andere vorausgesetzt, in jedem Falle müsste das dreiseitige Prisma bei ihrem Schieferwerden (selbstverständlich wenn dasselbe dabei die gleiche Grundfläche und Höhe behält) zunehmen oder abnehmen, was jedoch dem Lehrsatz 22 Nebensatz 2 direkt widerspricht wonach Prismen mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe miteinander gleich sind. Daraus folgt, dass man für die dreiseitigen Pyramiden mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe nicht voraussetzen kann dass sie bei ihrem Schieferwerden ihre Grösse ändern, und damit ist der Lehrsatz bewiesen.

Anmerkung. Derselbe Beweis, der hier für die rauminhaltliche Gleichkeit der dreiseitigen Pyramiden mit gleicher Grundfläche und Höhe angewendet wurde, könnte offenbar in entsprechender Weise auch bei dem Lehrsatz 8 (und 7) I Th. 2 Ab. angewendet werden. Alle Dreiecke mit gleicher Grundlinie und Höhe werden offenbar bei ihrem Schieferwerden entweder ab- oder zunehmen; in zwei Parallelogramen mit gleicher Grundlinie und Höhe sind zwei einander entsprechende Dreiecke mit gleicher Grundlinie und Höhe gegeben; die zwei Dreiecke des einen Parallelograms sind offenbar bei ihrem Schieferwerden in dem anderen Parallelogram entweder beide zu- oder beide abgenommen; in beiden Fällen wären aber die beiden Parallelograme nicht miteinander gleich, was sie jedoch nach den Lehrsätzen 4 und 5 sind; folglich müssen Dreiecke mit gleicher Grundlinie und Höhe miteinander gleich sein. Steht dies nun fest, dann können wir daraus, dass die zwei Dreiecke eines Parallelograms gleiche Grundlinie und Höhe miteinander haben, auf ihre Gleichkeit selbst schliessen, womit der Lehrsatz 6, I Th. 2 Ab. deduciert ist. Während wir also dort aus diesem

Lehrsatze, d. h. aus der Thatsache dass das Dreieck die Hälfte des Parallelograms ist, die Gleichkeit der Dreiecke mit gleicher Grundlinie und Höhe (vgl. Lehrsatz 7 und 8, 1 Th. 2 Ab.) deduciert haben, haben wir hier das Umgekehrte gethan, um damit die Allgemeinheit unseres obigen Beweises für die dreiseitigen Pyramiden in klares Licht zu stellen. Die Umkehrung dieses allgemeinen Beweises war bei den Dreiecken nur deshalb möglich, weil die zwei Dreiecke, aus denen ein Parallelogram besteht, stets miteinander congruent sind, während diese Congruenz bei den drei Pyramiden, aus denen das dreiseitige Prisma besteht, fehlt und demnach auch diese Umkehrung.

24. Lehrsatz.

Die dreiseitige Pyramide ist der dritte Theil des dreiseitigen Prisma, das mit ihr gleiche Grundfläche und Höhe hat.

Wie in der Arg. zum vorigen Lehrsatz bemerkt worden ist, haben je zwei von den drei Pyramiden, aus denen ein dreiseitiges Prisma besteht, gleiche Grundflächen und Höhen, so dass sie alle drei nach dem vorigen Lehrsatz einander gleich sind, womit dieser Lehrsatz bewiesen ist.

25. Lehrsatz.

Der Rauminhalt einer dreiseitigen Pyramide ist gleich dem dritten Theil des Products aus ihrer Grundfläche und ihrer Höhe.

Dieser Lehrsatz folgt unmittelbar aus den Lehrsätzen 21 und 24.

1. Nebensatz.

Der Rauminhalt einer mehrseitigen Pyramide ist gleich dem dritten Theil des Products aus ihrer Grundfläche und ihrer Höhe.

Da jede mehrseitige Pyramide aus vielen dreiseitigen Pyramiden besteht, deren Grundflächensumme gleich der Grundfläche der ganzen Pyramide ist, so ist die Richtigkeit dieses Nebensatzes auf Grund des obigen Lehrsatzes ohne weiters einleuchtend.

2. Nebensatz.

Zwei Pyramiden mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe sind miteinander ihrem Rauminhalte nach gleich.

Dieser Nebensatz ist die unmittelbare Folge aus dem obigen Lehrsatze und dem ersten Nebensatze.

26. Lehrsatz.

Unter den sinnlich wahrgenommenen regelmässigen Polyedern ist als zusammengesetzter Polyeder nur der Würfel möglich, alle anderen aber unmöglich.

Dieser Lehrsatz folgt unmittelbar aus den Lehrsätzen 1, 2 und 4.

III. Theil.

Geometrie des vier- und des n-dimensionalen Raumes.

A. DEFINITIONEN.

1. Der *einfache vierdimensionale (resp. n-dimensionale) Raum* heisst der völlig imaginäre leere Zwischenraum, der entweder von *fünf (resp. $n+1$)* unmittelbar sich berührenden Punkten eingeschlossen wird, oder der von *neun* Punkten eingeschlossen wird, von denen sich der eine Punkt mit allen übrigen acht, die das einfache dreidimensionale Hexaeder bilden, unmittelbar berührt, von diesen sich aber jeder mit vier Punkten unmittelbar und mit den übrigen mittelbar berührt, oder schliesslich der von *acht (resp. 2n-)* Punkten eingeschlossen wird, von denen sich je ein Punkt mit je einem mittelbar und mit allen anderen unmittelbar berührt. Im ersten Falle heisst der vierdimensionale Elementarraum das einfache *Pentaeder*, im zweiten Falle das einfache *Hexaedron* und im dritten das einfache *Hexadekaedroid*

2. Der *quadratisch-hexaedronale vierdimensionale ausgebreitete Raum* ist ein System von quadratischen dreidimensionalen Räumen, in dem sich jeder Punkt des einen nachfolgenden dreidimensionalen Raumes mit acht Punkten des vorhergehenden unmittelbar berührt; der *octaedrische* ein Punktensystem in dem sich jeder Punkt mit vier und zwanzig Punkten unmittelbar berührt.

3. Der *gebrochene dreidimensionale* Raum ist ein System von Flächen in dem sich die Punkte jeder nachfolgenden Fläche mit den Punkten zweier oder mehrerer vorhergehenden Flächen berühren.

4. *Dreidimensionaler Raumwinkel* heisst der Richtungsunterschied zweier einander begegnender dreidimensionalen Räume. Der-

selbe ist *reell*, wenn diese letzteren reell, *imaginär* wenn diese imaginär sind.

5. *Vierdimensionaler Raumwinkel* heisst der Richtungsunterschied von vier oder mehreren von einem Punkte ausgehenden (oder in einer gemeinsamen Raumstelle einander begegnender) dreidimensionalen Räume. *Vierdimensionaler Grundwinkel* heisst der Richtungsunterschied der vier ersten von einem Punkte ausgehenden reellen dreidimensionalen Räumen.

6. Eine *Gerade* ist *senkrecht* in Bezug auf einen vierdimensionalen Raum wenn sie senkrecht in Bezug auf alle durch ihren Fusspunkt hindurchgehenden Geraden dieses Raumes ist.

7. Eine *Gerade* ist *parallel* (gleichgerichtet) in Bezug auf eine Ebene, wenn sie mit ihr in demselben dreidimensionalen Raume liegt und sich mit ihr nirgends begegnet.

8. Eine *Gerade* ist *parallel* in Bezug auf einen dreidimensionalen Raum, wenn sie sich mit ihm nirgends begegnet.

9. Eine *Ebene* ist *parallel* in Bezug auf eine Ebene wenn sie mit ihr in demselben dreidimensionalen Raume liegt und sich mit ihr nirgends begegnet.

10. Eine *Ebene* ist *parallel* in Bezug auf einen dreidimensionalen Raum wenn sie sich mit ihm nirgends begegnet.

11. *Zwei dreidimensionale Räume* sind miteinander *parallel*, wenn sie einander nirgends begegnen können.

12. *Vierdimensionaler Körper* heisst der von dreidimensionalen Körpern eingeschlossene vierdimensionale Raum.

13. *Reell* heisst der *vierdimensionale Körper* wenn seine dreidimensionalen Seiten reell; *imaginär* wenn diese imaginär sind oder es unter ihnen solche giebt.

14. *Pyramide* heisst ein *vierdimensionaler Körper*, der von dreidimensionalen von einem dreidimensionalen Körper ausgehenden an einem ausserhalb dieses befindlichen Punkte zusammengestellten Körpern begrenzt ist.

15. *Prisma* heisst ein *vierdimensionaler Körper*, der von dreidimensionalen Körpern so begrenzt ist, dass zwei von ihnen, die einander gegenüber liegen, miteinander gleich (congruent) und parallel sind, die übrigen aber dreidimensionale Prismen sind.

16. *Octaedroid* (vierdimensionaler Würfel) heisst ein von acht dreidimensionalen Würfeln (Hexaedern) begrenzter vierdimensionaler Körper; dasselbe heisst *einfach*, wenn die begrenzenden dreidimensionalen Würfel einfach sind.

B. LEHRSÄTZE.

1. Lehrsatz.

Der n-dimensionale ausgebreitete dreieckige Raum ist unmöglich, wenn $n > 2$ ist.

Dass der ausgebreitete zweidimensionale dreieckige Raum möglich ist, ist in Lehrsatz 9, I, 1 nachgewiesen worden. Dass dieser Raum unmöglich ist wenn $n = 3$ ist in dem Lehrsatz 1 II Th. nachgewiesen worden. Es bleibt demnach nur noch übrig nachzuweisen, dass er unmöglich ist wenn $n > 3$ ist. Der ausgebreitete dreieckige Raum von n Dimensionen ist nun, wenn $n > 3$ ist, einfach aus demselben Grunde unmöglich aus dem er wenn $n = 3$ unmöglich ist. Dies werden wir hier zunächst für $n = 4$ beweisen, und dann wird es leicht sein dasselbe auch für alle anderen Fälle einzusehen.

In Fig. 19 Taf. III ist eine der dreidimensionalen Figur 17 Taf. III entsprechende vierdimensionale Figur dargestellt, indem der Punkt H als in der vierten Dimension bestehend gedacht werden soll, welcher Punkt sich mit den Punkten A, B, C, D, E, F, G der entsprechenden dreidimensionalen Figur unmittelbar berühren soll. Dass nun dabei diese der dreidimensionalen fünf regelmässige Tetraeder enthaltenden Figur durchaus analoge vierdimensionale fünf regelmässige um eine gemeinsame Axe gelegene Pentaeder enthaltende Figur entstehen muss, ist leicht zu zeigen. Berührt sich der Punkt H mit den vier das dreidimensionale einfache Tetraeder bildenden Punkten A,B,C,D, so ist das einfache Pentaeder ABCDH zum Ausgangspunkt bei der Hinzufügung weiterer Punkte zu nehmen, und es sei der Punkt E der erste Punkt, der zu denselben hinzugefügt wird. Berührt sich der Punkt E mit den Punkten A,C,D,H unmittelbar, so wird er sich mit dem Punkte B offenbar mittelbar berühren, weil er sonst sowohl mit BH wie mit BA, BD und BC in gerader Linie liegen müsste. Nun kann der Punkt E offenbar nicht den vierdimensionalen ausgebreiteten Raum zum geschlossenen machen, weil sich dann derselbe mit dem Punkte B sowohl mittelbar wie unmittelbar berühren müsste, was jedoch unmöglich ist. Der Punkt F, der sich mit den Punkten C,D,E,H des Pentaeders ACDEH berührt, kann dies ebensowenig, weil sich derselbe mit dem Punkte A zweimal in derselben Weise mittelbar berühren müsste (die eine dieser mittelbaren Berührungen ginge durch das einfache Tetraeder CDEH und die andere durch das einfache Tetraeder BCDE, da sich in diesem Falle F mit B unmittelbar berühren würde), was jedoch unmöglich ist und dem

Begriffe der Berührung widerspricht. Der Punkt G der sich mit den Punkten C,D,F,H des Pentaeders CDEFH und mit den Punkten C,D,B,H des Pentaeders ABCDH unmittelbar berührt, könnte dies wohl thun, wenn das regelmässige Fünfeck BAEFG, das dabei die Punkte A,B,E,G,F bilden, als solches möglich und denkbar wäre, was jedoch nach Lehrsatz 9, 1 Ab. unmöglich ist.

Wie die fünf Tetraeder ABCD, ACED, CDEF. CDFG, CDBG um die gemeinsame Axe CD in dem dreidimensionalen Raume gelegen sind, ebenso sind die fünf Pentaeder ABCDH, ACDEH CDEFH, CDFGH, BCDGH um die gemeinsame Axe HD im vierdimensionalen Raume gelegen, und zwar so dass die Axe HD auf der fünfeckigen Ebene BAEGH ebenso (und fictiv auf derselben Stelle), senkrecht steht resp. hindurchgeht wie die Axe CD. Analog dem wird nun ebenso jeder weitere fünf-, sechs-, sieben- etc. dimensionale Punkt mit dem Punkte D eine entsprechende Axe bilden, um die die fünf-, sechs-, sieben- etc., dimensionalen einfachen unausgebreiteten Raumgebilde gelegen sind und die auf der fünfeckigen Ebene ABEFG ebenso senkrecht steht resp. hindurchgeht wie die dreidimensionale Axe CD. Daraus ersieht man, dass derselbe Grund, der den dreidimensionalen dreieckigen ausgebreiteten Raum unmöglich macht, auch jeden solchen von höherer Dimension unmöglich macht. Nicht nur aber dass der dreieckige ausgebreitete Raum von n Dimensionen wenn n > 3 auf Grund desselben Arguments unmöglich ist auf Grund dessen auch der dreidimensionale unmöglich ist, sondern es wäre nicht schwer zu zeigen dass, wenn per impossibile dieser letztere auch möglich wäre. der erstere damit eo ipso nicht möglich sein würde.

Anmerkung. Man könnte den Versuch machen den dreidimensionalen dreieckigen Raum aus dem Hinzufügen resp. Aufeinanderlegen der dreieckigen Ebenen, und zwar so dass sich dabei jeder Punkt einer nachfolgenden Ebene mit drei Punkten der vorhergehenden unmittelbar berührt, zu deducieren. Wie unerlaubt nun eine solche Deduction bei einem unmittelbar aus dem unausgebreiteten Raume entstehenden ausgebreiteten Raume ist, zeigt nur ein Blick auf einen solchen Raum, denn wenn die zwei mit je drei Punkten eines einfachen Rombus sich unmittelbar berührenden Punkte auch untereinander sich unmittelbar berühren würden, dann müssten offenbar um die gemeinsame Axe sechs einfache Tetraeder bestehen können was jedoch unmöglich ist. Damit entfällt also auch der entsprechende Versuch für die höherdimensionalen dreieckigen Räume.

2. Lehrsatz.

Der quadratische (resp. hexaedronale) n-dimensionale Raum ist wenn $n = 4$ möglich wenn $n > 4$ dagegen unmöglich.

Wie wir im Lehrsatz 2 II Th. den einfachen Würfel des dreidimensionalen Raumes aus dem Aufeinanderlegen zweier einfachen Quadrate — und zwar so dass sich jeder Punkt des einen Quadrats mit je einem Punkte des anderen unmittelbar und mit den übrigen mittelbar berührt — deduciert haben, ebenso wird der einfache Würfel (das einfache Octaedroid) des vierdimensionalen Raumes aus dem Aufeinanderlegen zweier einfacher dreidimensionalen Würfel und zwar so, dass sich jeder Punkt des einen einfachen Würfels mit je einem Punkte des anderen unmittelbar und mit den übrigen mittelbar berührt, entstehen. In dem vierdimensionalen einfachen Octaedroid werden offenbar diese inneren mittelbaren Berührungen ebenso eine neue Berührungsart darstellen, wie dies mit den inneren mittelbaren Berührungen des einfachen dreidimensionalen Würfels in Bezug auf diejenigen des einfachen Quadrats der Fall war (vgl. die Arg. zu Lehrsatz 2. II Th.). und da sie offenbar alle qualitativ auf gleiche Weise gesetzt sind so werden sie alle quantitativ miteinander gleich sein, d. h. aus jenem Aufeinander legen zweier einfachen dreidimensionalen Würfel wird nur das einfache vierdimensionale Octaedroid entstehen können.

Wenn wir nun das einfache Octaedroid seiner inneren Möglichkeit nach in Betracht ziehen (vgl. Lehrsatz 2, II Th.) und untersuchen ob sich in seinem Inneren ein realer Punkt befinden kann oder nicht, so zeigt die Berechnung der Grösse der inneren mittelbaren Berührung in dem einfachen Octaedroid, dass dieselbe $\sqrt{4} = 2$ beträgt (diese Elementargerade ist nämlich offenbar die Hypothenuse des rechtwinkeligen Dreiecks, dessen eine Kathete die Diagonale des einfachen dreidimensionalen Würfels — ihre Grösse beträgt $\sqrt{3}$ — und dessen andere Kathete die Kante des einfachen Octaedroids ist), und demnach ein realer Punkt im Inneren des einfachen Octaedroids möglich ist. Dieser reale innere Punkt berührt sich offenbar unmittelbar mit den 16 Eckpunkten des einfachen Octaedroids, er steht also mit ihnen in einer durchaus möglichen Berührungsentfernung und das einfache Octaedroid ist somit unzweifelhaft möglich.

Sobald nun das einfache Octaedroid möglich ist, ist auch der ausgebreitete quadratische vierdimensionale Raum möglich. Denn wenn mehrere dreidimensionale quadratische Räume so aufeinander gelegt werden, dass sich jeder Punkt in dem einen mit je einem Punkte

in dem anderen unmittelbar berührt, so werden offenbar je zwei einfache Würfel der beiden Räume (selbstverständlich mit den sechs dabei entstehenden Seitenwürfeln) einfache Octaedroide bilden, so dass nur noch ein realer innerer Centralpunkt in diesen einfachen Octaedroiden hinzuzudenken ist und der vierdimensionale quadratische Raum ist da.

So unzweifelhaft nun die Möglichkeit des vierdimensionalen ausgebreiten Raumes nach dieser Deduction auch feststeht, so zwingt uns doch gerade dieser innere reale Punkt, der in jedem einfachen Octaedroid hinzuzudenken ist, zur Frage, ob sich die Entstehung desselben nicht auf eine andere direkte Weise denken lässt, ob dieses Hinzudenkenmüssen des inneren realen Punktes nicht zur Annahme einer solchen direkten Entstehung zwingt? Und thatsächlich ist dem so, sobald man sich die Sache näher ansehen will. Denn die innere Lücke, die bei der obigen Entstehung des quadratischen Raumes in jedem einfachen Octaedroid entsteht, ist formell wohl durch das Hinzudenken eines inneren Punktes behoben, sie deutet aber offenbar darauf hin, dass der quadratische vierdimensionale Raum nicht mehr auf dieselbe Weise wie der dreidimensionale entstehen kann, ganz ebenso wie der quadratische zweidimensionale Raum nicht auf dieselbe Weise entstehen konnte. Wie wir diesen auf eine besondere Weise aus dem zweidimensionalen dreieckigen Raume deducieren mussten, ebenso müssen wir nunmehr auch den vierdimensionalen quadratischen Raum auf eine besondere Weise deducieren.

Nun müssen wir uns denselben offenbar auf die Weise entstanden denken, dass je zwei dreidimensionale quadratische Räume so aufeinander gelegt werden dass sich jeder Punkt in dem einen Raume mit je *acht* Punkten in dem anderen unmittelbar berührt. In Fig. 20 Taf. III müssen wir uns die Punkte M und M_1 als in der vierten Dimension vorhanden denken und zwar so dass sich jeder dieser Punkte mit allen acht Punkten des einfachen dreidimensionalen Würfels unmittelbar berührt. Dieses einfache Gebilde, da dasselbe eine einfache sechsseitige Pyramide mit sechsseitig prismatischem Grundgebilde darstellt, haben wir in Def. 1 das einfache Hexaedron genannt, und so ist also der quadratische vierdimensionale Raum ursprünglich als hexaedronal und erst in zweiter Reihe als quadratischer zu betrachten. Dass in den vierdimensionalen einfachen Octaedroiden, die durch das Aufeinanderlegen des einen dreidimensionelen quadratischen Raumes auf den anderen so dass sich je ein Punkt des einen mit je einem des anderen unmittelbar berührt entstehen eine

innere Lücke entsteht, bedeutet nichts anderes als dass der reine quadratische Raum von vier Dimensionen nicht entstelen kann Dass ein solcher durch ein anderes Aufeinanderlegen der dreidimensionalen Räume entsteht ist nur ein Zufall und hat in der Uebereinstimmung der entsprechenden geometrischen Grössen seinen Grund, denn, wie wir im nächsten Lehrsatz sehen werden, entsteht auf dieselbe Weise auch eine besondere Form des dreidimensionalen Raumes aus dem zweidimensionalen, nämlich die octaedrische. Und während in diesem dreidimensionalen Raume, wie wir sehen werden, die einfachen Octaeder nicht alle regelmässig sind, sind in dem hexaedronalen vierdimensionalen Raume alle die einfachen Dodekaedrone (die vierdimensionale Gestalt der Fig. 20, Taf. III. stellt offenbar ein solches einfaches Dodekaedron dar, dessen Hälfte das einfache Hexaedron ist) unregelmässig, da offenbar dem einfachen Octaeder jenes dreidimensionalen Raumes dieses einfache Dodekaedton des vierdimensionalen entspricht (denn beide Räume entstehen aus den entsprechenden quadratischen Räumen auf dieselbe Weise).

Dass der quadratische vierdimensionale Raum wirklich aus einfachen Hexaedronen besteht zeigt nur ein näherer Blick auf seine innere Struktur. Da in demselben um einen Punkt herum 16 einfache Octaedroide (wie in dem dreidimensionalen 8 einfache Würfel und im zweidimensionalen 4 einfache Quadrate) gegeben sind, in jedem einfachen Octaedroid aber je ein realer innerer Punkt gegeben ist, so wird sich obenbar jeder Eckpunkt eines einfachen Octaedroids mit 16 Centralpunkten berühren so wie sich jeder Centralpunkt eines einfachen Octaedroids mit seinen 16 Eckpunkten unmittelbar berührt. Daraus folgt ohne weiters dass der Unterschied der Eck- und der Centralpunkte in diesem Raume insofern ein willkürlicher ist, als sich jeder Punkt sowohl als Eck- wie als Centralpunkt betrachten lässt, was wiederum nichts anderes bedeutet als dass der quadratische vierdimensionale Raum ursprünglich aus einfachen Hexaedronen besteht resp. aus dem Aufeinanderlegen des einen dreidimensionalen Raumes auf den anderen so dass sich dabei je ein Punkt des einen mit acht Punkten des anderen unmittelbar berührt entsteht. Infolgedessen enthält der quadratische vierdimensionale Raum nicht rein quadratische Ebenen sondern es bestehen in demselben neben diesem noch auch rein dreieckige Ebenen. Während nämlich diejenigen Ebenen desselben, deren Elementarebenen die Flächenseiten der einfachen Octaedroiden ausmachen, offenbar alle rein quadratisch sind, sind diejenigen Ebenen, deren Elementarebenen die Diagonalflächen der einfachen Octaedroide

darstellen, dreieckig, da wenn sich in einer Ebene ein Punkt mit sechs Punkten unmittelbar berührt — in jeder einzelnen Diagonalfläche eines einfachen Octaedroids berührt sich deren Centralpunkt mit deren vier Eckpunkten unmittelbar und ebenso unmittelbar mit den zwei in derselben Ebene liegenden Centralpunkten zweier anderen einfachen Octaedroide* — diese Ebene dann nach Lehrsatz 9 I Th. 1 Ab. notwendigerweise dreieckig sein müsse.

Wenn nun der vierdimensionale quadratische Raum nicht in ursprünglicher Weise entstehen konnte so müssen wir, wenn wir die Möglichkeit des fünfdimensionalen quadratischen Raumes untersuchen wollen, dabei im Auge behalten, dass in demselben der quadratische Raum mit dem entsprechenden hexaedronalen nicht notwendigerweise zusammenzufallen braucht. Wir müssen vielmehr von dem vierdimensionalen Raum als dem hexaedronalen ausgehen um die Möglichkeit des fünfdimensionalen quadratischen und hexaedronalen zu untersuchen. Da nun der quadratische vierdimensionale Raum mit dem hexaedronalen zusammenfällt so ist die Entstehungsweise des quadratischen fünfdimensionalen Raumes aus dem vierdimensionalen hexaedronalen zugleich seine Entstehung aus dem quadratischen vierdimensionalen Raume, oder genauer gesprochen, der fünfdimensionale quadratische Raum kann seiner Entstehungsweise gemäss nur als hexaedronal-quadratischer Raum bezeichnet werden (analog dem im Lehrsatz 3 II Th. charakterisierten dreieckig-quadratischen Raume), wobei dann der reine hexaedronale fünfdimensionale Raum als eine besondere Raumform noch übrig bleibt.

Der quadratische fünfdimensionale Raum fällt also mit dem hexaedronal-quadratischen zusammen. Und thatsächlich wenn wir uns zwei vierdimensinnale Räume (in der fünften Dimension) so aufeinandergelegt denken, dass sich je ein Punkt des einen Raumes mit je einem Punkte des anderen unmittelbar berührt, so werden neben den einfachen hexaedronalen fünfdimensionalen Gebilden zugleich einfache fünfdimensionale Würfel resp. Octaedroide entstehen,

* Dass sich die Centralpunkte zweier nebeneinander bestehenden Octaedroide unmittelbar miteinander berühren müssen folgt ohne weiters aus dem obigen Nachweis der willkürlichen Unterscheidung der Eck- und der Centralpunkte, lässt sich aber auch direkt beweisen. Es ist nämlich offenbar, dass diese zwei Centralpunkte mit zwei jenen beiden Octaedroiden gemeinsamen Eckpunkten in einer Ebene liegen müssen und zwar mit denjenigen Eckpunkten deren Berührungsentfernung gleich $\sqrt{3}$ ist. Dann bilden aber die vier Punkte offenbar einen einfachen Rhombus miteinander (da ein einfaches Quadrat dessen Seite = 1 und die Diagonale = $\sqrt{3}$ wäre unmöglich ist) in dem die andere Diagonale d. h. die Berührungsentfernung der beiden Centralpunkte = 1 ist.

und wir fragen nunmehr nur, ob in dem so entstandenen fünfdimensionalen Raume alle Punkte in möglichen Berührungsentfernungen miteinander stehen werden? Eine nähere Untersuchung zeigt nun dass dem nicht so ist, dass es in einem solchen Raume Punkte giebt deren Berührungsentfernung < 1 ist und dass demnach ein solcher Raum unmögltch ist.

In dem besagten fünfdimensionalen quadratischen ausgebreiteten Raume werden nämlich offenbar. um einen einfachen dreidimensionalen Würfel vier fünfdimensionale einfache Würfel liegen (wie um die Gerade im dreidimensionalen Raume vier dreidimensionale. um die Ebene im vierdimensionalen vier vierdimensionale einfache Würfel liegen) und demnach auch vier vierdimensionale einfache Würfel, von denen je zwei senkrecht und je zwei in gerader Richtung d. h. in demselben vierdimensionalen Raume in Bezug aufeinander liegen werden (wie in dem dreidimensionalen Raume die entsprechenden einfachen Quadrate je zwei senkrecht und je zwei in einer Ebene liegen), so das auch die entsprechenden vier Centralpunkte dieser vier vierdimensionalen einfachen Würfel ein Quadrat bilden werden in dem die beiden einfachen Diagonalen gleich 1 sind (da sich die Centralpunkte zweier nebeneinander liegenden vierdimensionalen einfachen Würfel. wenn beide wie in diesem Falle in demselben vierdimensionalen Raume liegen, unmittelbar berühren). Die Seite dieses Quadrats wird, wie sich das leicht aus dem entsprechenden rechtwinkeligen Dreieck berechnen lässt, gleich $\frac{1}{\sqrt{2}}$ sein. und da dieselbe offenbar die Berührungsentfernung der realen Centralpunkte der vierdimensionalen einfachen Würfel im fünfdimensionalen Raume darstellt, so folgt daraus ohne weiters dass sich die Centralpunkte der vierdimensionalen Seitenwürfel, die bei jenem Aufeinanderlegen vierdimensionaler Räume entstehen, ine iner Berührungsentfernung berühren, die absolut unmöglich ist, woraus zugleich ohne weiters die Unmöglichkeit des quadratischen fünfdimensionalen Raumes folgt.* Wenn aber der fünfdimensionale

* Um den oben geführten Beweis besser verstehen zu können, will ich hier einen einfacheren auf Grund der geltendnn Geometrie giltigen Beweis anführen, der als solcher für uns freilich nur einen provisorischen Werth hat. Dass die Entfernung der Centralpunkte zweier im fünfdimensionalen Raume senkrecht aufeinander stehender vierdimensionaler Würfel gleich $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ist wenn man seine Kante gleich 1 setzt, lässt sich sehr leicht auf folgende Weise einsehen. Die Mittelpunkte zweier senkrecht auf einander stehender Seiten eines Quadrats werden offenbar um $\frac{1}{\sqrt{2}}$ voneinander entfernt sein, da die die-

quadratische Raum unmöglich ist, so folgt daraus ebenso dass jeder weitere höherdimensionale quadratische Raum unmöglich ist, da er ja den fünfdimensionalen als seinen Bestandtheil ebenso in sich enthalten muss wie dieser den vierdimensionalen.

Es bleibt uns nur noch die Möglichkeit des hexaedronalen Raumes von fünf Dimensionen zu untersuchen, der offenbar nur dann entstehen wird wenn die vierdimensionalen Räume so aufeinandergelegt werden dass sich je ein Punkt des einen Raumes mit neun Punkten des anderen unmittelbar berührt. Es liesse sich nun leicht zeigen, dass zwei Punkte eines solchen fünfdimensionalen Raumes, die sich mit je neuen Punkten zweier einfachen vierdimensionalen Hexaedrone, deren dreidimensionale Würfel senkrecht aufeinander stehen, unmittelbar berühren, in einer Berührungsentfernung liegen die < 1 ist und dass demnach auch dieser Raum und somit auch jeder entsprechende höherdimensionale unmöglich ist. Schliesslich könnte man noch den Versuch machen, die vierdimensionalen Räume so aufeinanderzulegen dass sich je ein Punkt des einen mit je 17 Punkten (d. h. mit allen das einfache vierdimensionale Octaedroid constituierenden Punkten) des anderen unmittelbar berührt. In diesem Falle müsste sich aber, wie leicht einzusehen ist, ein Punkt mit drei in einer Geraden liegenden Punkten unmittelbar berühren, was jedoch unmöglich ist (da dann vier Punkte um einen Punkt herum in der Ebene lägen).

Anmerkung. Aus der Deduction der quadratischen Räume der vierten und der fünften Dimension ersieht man deutlich, dass der quadratische zweidimensionale Raum wirklich nicht ursprünglich sein kann. Wäre die quadratische Ebene resp. das einfache Quadrat ebenso ursdrünglich wie die dreieckige Ebene resp. das einfache Dreieck, dann wäre in der That keine Möglichkeit vorhanden, die

selben verbindende Gerade offenbar die Hypothenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks ist, dessen Katheten gleich $\frac{1}{2}$ sind; ebenso sind die Mittelpunkte zweier senkrecht aufeinander stehender Seiten eines dreidimensionalen Würfels um $\frac{1}{\sqrt{2}}$ voneinander entfernt, da die dieselben verbindende Gerade wiederum die Hypothenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks ist, dessen Katheten gleich $\frac{1}{2}$ sind, so dass sich dieser Fall auf den vorigen zurückführt; es ist dann leicht einzusehen, dass dieses Letztere auch in Bezug auf die entsprechenden Mittelpunkte des vier- und des fünfdimensionalen Würfels gilt, d. h. dass die Centralpunkte zweier senkrecht aufeinender stehender vierdimensionalen Würfel, die zugleich Seiten eines fünfdimensionalen Würfels sind, um $\frac{1}{\sqrt{2}}$ voneinander entfernt sind.

Grösse der inneren imaginären Berührung in dem einfachen Quadrat zu bestimmen, da ja der entsprechende Lehrsatz von dem Verhältniss der Quadrate der Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks nur auf Grund der schon entstandenen quadratischen ausgebreiteten Ebene bestimmt werden könnte, während diese ja doch die vorherige Möglichkeit des einfachen Quadrats und diese die Möglichkeit der Bestimmung der Grösse der imaginären Berührung in demselben voraussetzt. Und wollte der discrete Geometer noch gar versuchen, den Begriff der imaginären Berührung aus seiner Wissenschaft ganz auszuschliessen, um so die selbstständige Möglichkeit des einfachen Quadrats nur um jeden Preis wenigstens scheinbar zu retten, so würde doch der vierdimensionale quadratische Raum unbedingt dieselbe nur desto nachdrücklicher fordern, da die Lücke die in dessen einfachem Würfel entsteht nur auf Grund jener imaginären Berührung constatiert werden könnte; dieselbe Lücke würde sich in jedem höheren Raume nur vergrössern (die Diagonale eines einfachen n-dimensionalen Würfels ist gleich $\sqrt{n}$) und sie würde ja dadurch gar nicht aufhören zu sein, wenn der discrete Geometer kein Mittel besässe, deren Existenz zu constatieren. Und in der Thatsache der dreieckigen Ebenen, die in dem vierdimensionalen quadratischen Raume erscheinen, zeigt sich recht deutlich der innere Zusammenhang der zwischen ihnen besteht, denn wie könnte die dreieckige Ebene in einem rein quadratischen Raume erscheinen können, wenn das einfache Quadrat und das einfache Dreieck nicht ursprünglich in einem inneren Zusammenhang stünden, und dass dieser Zusammenhang wirklich nur der im Lehrsatz 40 I Th. 1 Ab. dargelegte sein kann, ist auch durch die nunmehrigen und die entsprechenden Ausführungen zu Lehrsatz 2 II Th. genügend gerechtfertigt worden.

3. Lehrsatz.

Der gemischte dreieckig-quadratische Raum von n Dimensionen ist unmöglich.

Dass dieser Raum wenn n = 3 unmöglich ist (formell fängt seine Möglichkeit erst mit der dritten Dimension an, vgl. Lehrsatz 3, II Th.) ist in Lehrsatz 3, II Th. bewiesen worden, woraus ohne weiters auch die Unmöglichkeit jedes weiteren solchen Raumes folgt, da ja jeder solche höherdimensionale den dreidimensionalen als Bestandtheil in sich enthalten müsste.

Anmerkung. Was in der Anmerkung zum Lehrsatz 3, II Th. in Bezug auf die Unmöglichkeit des entsprechenden dreidimensionalen

Raumes aus den gemischten dreieckig-quadratischen Ebenen gesagt worden ist, gilt auch hier in entsprechender Weise.

4. Lehrsatz.

Der reine octaedrische Raum von n Dimensionen ist wenn $n = 2$ und 4 möglich, wenn $n = 3$ und $n > 4$ unmöglich, der unreine octaedrische Raum ist wenn $n = 3$ möglich, unmöglich dagegen wenn $n > 3$.

Dass das einfache Octaeder in dem zwei- und dreidimensionalen Raume möglich ist, ist im Lehrsatz 4 II Th. nachgewiesen worden. Dass das einfache n-dimensionale Octaeder möglich ist folgt einfach daraus dass, wie man zu dem einfachen Octaeder resp. Quadrat des zweidimensionalen Raumes von seinen beiden Seiten in der dritten Dimension zwei Punkte hinzufügen kann, man zu jeden neuen zwei Seiten desselben in jeder höheren Dimension immer zwei neue Punkte hinzufügen kann, die sich sowohl mit den vier Punkten des ursprünglichen Quadrats wie mit allen hinzugefügten Punkten unmittelbar berühren werden, wodurch das n-dimensionale einfache Octaeder entsteht.

Es fragt sich nun ob aus einfachen drei- und n-dimensionalen Octaedern der drei- resp. n-dimensionale Raum zusammengesetzt werden kann, wie dies mit dem zweidimensionalen der Fall war? Eine nähere Untersuhung würde leicht zeigen, dass wenn man die Möglichkeit resp. die Unmöglichkeit der Zusammensetzung des n-dimensionalen Raumes aus einfachen Octaedern in analoger Weise mit derjenigen des dreieckigen n-dimensionalen Raumes aus den entsprechenden n-dimensionalen dreieckigen $(n + 1$-$)$ Gebilden zu beweisen versuchen würde, man dann für jeden Raum einer bestimmten Dimension einen besonderen Beweis führen müsste. Wir müssen demnach einen anderen Beweis suchen, der so allgemein ist, dass er die Möglichkeit resp. die Unmöglichkeit der lückenlosen Zusammensetzusg des Raumes aus einfachen Octaedern für jede mögliche Anzahl von Dimensionen darlegt.

In dieser Hinsicht nun haben wir keinen anderen Beweis ausser demjenigen der schon auf dem Standpunkte der geltenden Geometrie erwähnt wurde (vgl. s. 262). Der Raum von n Dimensionen lässt sich formell nur dann aus einfachen Octaedern zusammensetzen, wenn es in demselben einen regelmässigen Körper giebt dessen Grenzgebilde $n - 1$ - dimensionale Octaeder sind. In dieser Hinsicht nun liessen sich, rein formell betrachtet, nur der drei- und der vierdimensionale Raum aus entsprechenden einfachen Octaedern

zusammensetzen, denn der entsprechende regelmässige Körper ist im ersten Falle der Würfel und in dem zweiten das Ikositetraedroid. Nun zeigt aber eine leicht anzustellende Berechnung, dass der (fiktive) Centralpunkt des ersten nicht um eine einfache Einheit von den Eckpunkten desselben entfernt ist und demnach die Zusammensetzung des dreidimensionalen Raumes aus einfachen Octaedern reell unmöglich ist, während der Centralpunkt des zweiten um eine einfache Einheit von den Eckpunkten desselben entfernt und somit die Zusammensetzung des vierdimensionalen Raumes aus einfachen vierdimensionalen Octaedern möglich ist.

Obgleich nun so der dreidimensionale Raum aus einfachen Octaedern nicht zusammengesetzt werden kann, so lässt sich doch noch eine besondere Zusammensetzung des dreidimensionalen Raumes ausser der quadratischen denken. Der vierdimensionale Raum liess sich, wie wir sahen, aus einfachen vierdimensionalen Würfeln in ursprünglicher Weise nicht zusammensetzen, sondern nur auf die Weise, dass der eine dreidimensionale Raum dem anderen so hinzugefügt wurde, dass sich je ein Punkt des einen mit je acht Punkten des anderen unmittelbar berührte. Dem analog nun lässt sich der dreidimensionale Raum offenbar auch auf die Weise entstanden denken, dass sich je ein Punkt der einen quadratischen Ebene mit je vier Punkten der anderen ihr hinzugefügten unmittelbar berührt. Nun zeigt die nähere Betrachtung eines solchen Raumes, dass um einen Punkt herum in demselben nur zwei einfache regelmässige Octaeder gelegen sind (der eine von oben und der andere von unten) während die übrigen vier (die rechts und links herumliegen) unregelmäsig sind und zwar so, dass von den drei inneren Vierecken in denselben zwei einfache Rhomben sind, während das dritte ein Rechteck darstellt, dessen zwei Seiten ihrer Grösse nach gleich 1 und die übrigen zwei gleich $\sqrt{2}$ sind, und dass dementsprechend von den sechs Eckpunkten zwei einander gegenüberliegende sich unmittelbar berühren während die einander gegenüberliegenden Punkte der übrigen zwei Paare in der mittelbaren Berührungsentfernung $\sqrt{3}$ in Bezug aufeinander gelegen sind. Dass nun dieser unreine octaedrische Raum als dreidimensionaler möglich ist folgt ohne weiters aus seiner Entstehungsweise, diese seine Entstehungsweise zwingt ihn aber auch zugleich nur unter einer ganz bestimmten Bedingung existieren zu können. Denn da das eben beschriebene unregelmässige einfache Octaeder offenbar nicht selbstständig existieren kann (da die Berührungsentfernung $\sqrt{2}$ dann gleich die leere nichtseiende Lücke darstellen müsste,

diese aber nur gleich 1 sein kann) so kann jene Hinzufügung der einen quadratisch-octaedrischen Ebene zu der anderen nur so geschehen, dass sich wirklich je ein Punkt der einen Ebene mit vier Punkten der anderen Ebene unmittelbar berührt, in welchem Falle dann jede nachfolgende Ebene eine stetig kleinere Zahl von Punkten enthalten muss (wenn die Anzahl der Punkte in der ersten Ebene gleich 9, so ist diejenige in der zweiten gleich 4, in der dritten gleich 1, diese Reihe wird offenbar stets eine Reihe von stetig absteigenden Quadratzahlen darstellen), so kann der unreine octaedrische Raum nur so existieren, wenn er selbst als Ganzes die octaedrische Gestalt hat.

Steht nun die Möglichkeit des unreinen octaedrischen Raumes von drei Dimensionen fest, so ist nunmehr die Möglichkeit des vierdimensionalen Raumes dieser Art zu untersuchen. Er wird offenbar wiederum nur auf die Weise entstehen können, dass zu jedem octaedrischen Raum der dritten Dimension ein neuer solcher so hinzugefügt wird, dass sich jeder Punkt des einen dreidimensionalen Raumes mit je sechs Punkten des anderen unmittelbar berührt. Wären nun die einfachen Octaeder, aus denen der dreidimensionale octaedrische Raum besteht, alle regelmässig so wäre eine solche Entstehungsweise formell ganz wohl möglich, da dem aber nicht so ist, so lässt sich leicht zeigen dass sie ohne weiters unmöglich ist. Denn mit all' den sechs Punkten des einfachen regelmässigen Octaeders der dritten Dimension kann sich wohl ein Punkt in der vierten Dimension unmittelbar berühren, ein solcher Punkt kann sich aber mit den sechs Punkten des einfachen unregelmässigen Octaeders gar nicht berühren, was ohne weiters daraus folgt dass er sich auch mit den vier Punkten jedes von jenen zwei inneren einfachen Rhomben berühren müsste was jedoch offenbar unmöglich ist (in diesem Falle würden nämlich sechs einfache Tetraeder um eine gemeinsame Axe im dreidimensionalen Raume liegen, was jedoch unmöglich ist). Der unreine octaedrische Raum von vier Dimensionen ist also unmöglich und dann ist es einleuchtend, dass auch kein solcher höherdimensionaler mehr möglich sein wird.

5. Lehrsatz.

Der vollkommene reine octaedrisch-quadratische Raum von n Dimensionen ist wenn $n = 5$ und 6 möglich wenn $n > 6$ unmöglich, der vollkommene unreine dagegen ganz unmöglich, während der unvollkommene reine stets für einen entsprechenden Raum von n Dimensionen bis $n + 2$ Dimensionen möglich ist.

Seite 434. Der erste Theil von Lehrsatz 5 entfällt vollständig, da der reine octaedrische (resp. hexadekaedrale) vierdimensionale Raum mit dem quadratischen (resp. hexaedronalen, vgl. Lehrsatz 2, s. 425) identisch ist, welche Identität daraus folgt, dass das Ikosatetraedroid, wie sich zeigen lässt, das Octaedroid in sich enthält. Infolgedessen kann der vollkommene ausgebreitete Raum nicht mehr denn vier Dimensionen haben und ausserdem ist der vierdimensionale Raum nicht nur aus Octaedroiden und Hexadekaedroiden (vgl. s. 262) sondern auch aus Ikosatetraedroiden lückenlos zusammensetzbar. Auch hört der auf s. 298 erwähnte Satz auf eine Ausnahme zu haben.

Ein Raum ist vollkommen zu nennen wenn er sich in's Unbestimmte ausdehnen kann, unvollkommen dagegen wenn dies nicht der Fall ist. Wie es nun einen dreieckig-quadratischen Raum formell genommen gab, ebenso ist formell genommen ein octaedrisch-quadratischer Raum ganz wohl denkbar. Derselbe entsteht offenbar dann wenn wir uns zwei dreidimensionale (reine oder unreine) octaedrische Räume so aufeinander gelegt denken dass sich je ein Punkt des einen Raumes mit je einem Punkte des anderen unmittelbar berührt. Wenn der Raum rein octaedrisch ist dann werden, da nach dem vorigen Lehrsatz nur der vierdimensionale Raum aus reinen Octaedern zusammensetzbar ist (der zweidimensionale fällt mit dem quadratischen zusammen), bei dem entsprechenden Aufeinanderlegen zweier solcher Räume aufeinander offenbar in jedem entsprechenden fünfdimensionalen Gebilde (einem Prisma mit pyramidalem Grundgebilde) einfache dreidimensionale Würfel entstehen, und dementsprechend in dem auf die entsprechende Weise entstandenen sechsdimensionalen einfachen Gebilde vierdimensionale und in dem siebendimensionalen fünfdimensionale einfache Würfel entstehen, die jedoch nach Arg. zum Lehrsatz 2 unmöglich sind, und demnach unmöglich auch der siebendimensionale reine octaedrisch-quadratische Raum.

Was den unreinen octaedrischen Raum betrifft so ist derselbe nach dem vorigen Lehrsatz dreidimensional und da seine unregelmässigen einfachen Octaeder in ihrem Inneren einfache Rhomben enthalten, so wird das bei dem entsprechenden Aufeinanderlegen des einen einfachen unregelmässigen Octaeders auf das andere entstandene vierdimensionale Gebilde (ein Prisma mit achtseitig-pyramidalem Grundgebilde) einerseits ein dreidimensionales rechtwinkeliges gerades Parallelopipedon enthalten, dessen Diagonale gleich $\sqrt{4} = 2$ ist in dessen Inneren also ein realer Punkt bestehen müsste, und andererseits zwei dreidimensionale schiefwinkelige gerade Parallelopipeda mit einfach-rhombischer Grundfläche, so dass sich der innere Punkt des ersten Parallelopipedons zugleich im Centrum der zweiten befinden würde in welchem Falle er sich aber mit den vier das einfache innere Quadrat in jedem solchen Parallelopipedon bildenden Punkten in einer Berührung berühren würde die < 1 ist, was jedoch unmöglich ist (vgl. die Arg. zu Lehrsatz 3 II Th.). Daraus folgt also unzweifelhaft, dass der vollkommene unreine octaedrisch-quadratische Raum von vier und demnach auch derjenige von n Dimensionen unmöglich ist.

Aus der Argumentation zu dem ersten Theile dieses Lehrsatzes lässt sich ohne weiters die Richtigkeit des dritten dedu-

cieren. Denn wenn wir zwei einfache Octaeder n-ter Dimension in einer nächst höheren Dimension so aufeinanderlegen, dass sich je ein Punkt des einen mit je einem Punkte des anderen unmittelbar berührt, so werden in dem entsprechenden n + 1-dimensionalen einfachen prismatischen Gebilde einfache dreidimensionale Würfel entstehen (da jedes höherdimensionale Octaeder in seinem Inneren die niederen also auch die dreidimensionalen enthält) und demnach in dem entsprechenden n + 2-dimensionalen einfachen Gebilde vier- und in dem n + 3-dimensionalen fünfdimensionale einfache Würfel entstehen werden, und da diese letzteren unmöglich sind, so ist damit der dritte Theil des Lehrsatzes bewiesen.

Nebensatz.

Der unvollkommene tetraedrisch-quadratische Raum ist stets für einen entsprechenden Raum von n Dimensionen bis n + 3 Dimensionen möglich.

Unter dem tetraedrisch-quadratischen Raume ist, analog dem octaedrisch-quadratischen, ein Raum zu verstehen, der aus dem entsprechenden Aufeinanderlegen zweier einfachen dem Tetraeder entsprechenden n-dimensionalen Gebilde entsteht. Der einfachste Raum dieser Art ist der aus zwei aufeinander gelegten einfachen Dreiecken entstehende. Während nun der vollkommene dreieckig-quadratische Raum von drei und n Dimensionen nicht möglich war (vgl. Lehrsatz 3, II Th. und Lehrsatz 3 dieses Theils), ist der unvollkommene dreieckig-quadratische Raum von drei Dimensionen ganz wohl denkbar, da in seinem Inneren keine mittelbaren Berührungen vorhanden sind, deren Möglichkeit in Frage stünde. Wenn nun zwei solche unvollkommene Räume in der vierten Dimension in entsprechender Weise aufeinander gelegt werden, so werden die Seiten des entstandenen vierdimensionalen einfachen Gebildes dreidimensionale einfache Würfel, in der fünften Dimension einfache vier- und in der sechsten einfache fünfdimensionale Würfel sein, die jedoch unmöglich sind. Analog der Argumentation zu dem dritten Theil des obigen Lehrsatzes ist es leicht einzusehen, dass aus jedem einfachen tetraedrischen n-dimensionalen Gebilde ein unvollkommener gemischter quadratischer Raum bis n + 3 Dimensionen möglich sein wird.

Anmerkung. Es wird vielleicht auf den ersten Blick seltsam erscheinen, dass der vollkommene octaedrisch-quadratische Raum von 5 und 6 Dimensionen möglich ist, während der ihm analoge dreieckig-quadratische Raum von 3 Dimensionen unmöglich ist, da ja in beiden Fällen der entsprechende unvollkommene Raum

möglich ist. Der Grund davon liegt eintach darin, dass in dem ersten Falle der entsprechende unvollkommene Raum mittelbare Berührungen in sich enthält, während diese im zweiten Falle in dem entsprechenden Raume fehlen, bei einem ausgebreiteten Raume aber die ersten mittelbaren Berührungen auf ihre Möglichkeit untersucht werden müssen.

6. Lehrsatz.

Von den sinnlich wahrnehmbaren regelmässigen vierdimensionalen Polyedern sind als einfache Polyeder das Pentraeder, das Octaedroid, das Hexadeka- und das Ikositetraedroid, von den n-dimensionalen die dem Tetraeder und dem Octaeder entsprechenden Gebilde möglich.

Dass die sechs regelmässigen Gebilde, die in dem vier- und die drei die in dem n-dimensionalen continuirlichen Raume construirbar sind (vgl. s. 260, 1) offenbar in der sinnlichen Erfahrung gegeben wären, wenn unser Wahrnehmungsraum vier- oder n- (resp. fünf oder sechs-) dimensional wäre: dies und nichts anderes will der Ausdruck „sinnlich wahrnehmbar“ im obigen Lehrsatze besagen. Von jenen sechs regelmässigen Gebilden des vierdimensionalen Raumes ist das Hexakosiedroid deshalb unmöglich weil dasselbe ein unmögliches dreidimensionales Gebilde, nämlich das Ikosaeder, in sich enthält und das Hekatonikosaedroid deshalb weil dasselbe von einem unmöglichen dreidimensionalen Gebilde, dem Dodekaeder, begrenzt ist. Die Möglichkeit der übrigen vier Gebilde folgt unmittelbar aus den Lehrsätzen 1, 2 und 4. Die Unmöglichkeit des n-dimensionalen einfachen Würfels wenn $n > 4$ folgt aus Lehrsatz 2, die Möglichkeit der beiden übrigen aus den Lehrsätzen 1 und 4.

7. Lehrsatz.

Wenn eine Gerade auf drei durch ihren Schnittpunkt mit einem dreidimensionalen Raume hindurchgehenden Geraden des letzteren, die nicht in einer und derselben Ebene liegen, senkrecht steht, so steht sie auf dem dreidimensionalen Raume selbst senkrecht.

Nach Def. 6 ist eine Gerade in Bezug auf einen dreidimensionalen Raum senkrecht wenn sie senkrecht auf allen durch ihren Schnittpunkt mit dem letzteren gehenden Geraden ist. Ist nun eine Gerade auf zwei solchen Geraden eines dreidimensionalen Raumes senkrecht, so ist sie offenbar nach Lehrsatz 5, II Th. auch auf der Ebene, in der sich diese zwei Geraden befinden, senkrecht; sie wird infolgedessen auch auf jeder Ebene senkrecht stehen, in der sich eine dritte durch denselben Schnittpunkt gehende in Bezug auf sie senk-

rechte Gerade des dreidimensionalen Raumes und irgend welche Gerade jener ersten Ebene befindet, woraus offenbar folgt dass dieselbe auf jeder durch denselben Fusspunkt gehenden Geraden des dreidimensionalen Raumes und demnach auch auf diesem selbst senkrecht stehen wird.

8. Lehrsatz.

Von einem Punkte aus in einem dreidimensionalen Raume besteht nur eine Senkrechte in Bezug auf denselben.

Der Beweis ist mit demjenigen des Lehrsatzes 6 II Th. durchaus analog.

9. Lehrsatz.

Eine Gerade, die parallel in Bezug auf eine in einem dreidimensionalen Raume gelegene Gerade ist, ist zugleich mit diesem selbst parallel.

Der Beweis ist mit demjenigen des Lehrsatzes 7 II Th. durchaus analog.

10. Lehrsatz.

Eine Gerade, die mit einem dreidimensionalen Raume parallel ist, ist zugleich mit jeder Geraden des letzteren parallel, die mit ihr in einer Ebene liegt.

Der Beweis ist mit demjenigen des Lehrsatzes 8 II Th. durchaus analog.

11. Lehrsatz.

Wenn eine Ebene mit einem dreidimensionalen Raume parallel ist, so ist jede Gerade in der ersten parallel mit dem zweiten.

Nach Def. 10 ist eine Ebene mit einem dreidimensionalen Raume parallel, wenn sie sich mit ihm nirgends begegnet möge man sich beide fortgesetzt denken wie viel man wolle; würde sich nun irgend eine Gerade in der ersten mit dem zweiten begegnen so hiesse das, dass sich die Ebene selbst mit dem Raume begegnen würde, was der Voraussetzung widerspricht.

12. Lehrsatz.

Wenn zwei dreidimensionale Räume miteinander parallel sind, so ist jede Gerade und jede Ebene in dem einen parallel in Bezug auf den anderen.

Zwei dreidimensionale Räume die sich miteinander nirgends begegnen werden offenbar miteinander parallel sein (wie dies auch für zwei einander nicht begegnende Ebenen in dem drei- und zwei einander nicht begegnende Geraden in dem zweidimensionalen Raume der Fall ist). Da nun bei zwei dreidimensionalen Räumen, die sich

nirgends miteinander begegnen, dies auch keine Ebene in dem einen mit dem anderen thun kann, und Ebene und ein dreidimensionaler Raum, wenn sie sich nirgends begegnen, nach Def. 10 einander parallel sind, so ist damit der Lehrsatz in Bezug auf die Ebene bewiesen. In Bezug auf die Gerade folgt er daraus, dass zwei dreidimensionale parallele Räume von jeder Ebene, von der sie geschnitten werden, offenbar nach Lehrsatz 10 in zwei einander parallelen Schnittgeraden werden geschnitten werden, und demnach jede Gerade in dem einen Raume wird mit dem anderen parallel sein.

13. Lehrsatz.

Wenn zwei parallele dreidimensionale Räume von einem dritten dreidimensionalen Raume geschnitten werden, so sind ihre Schnittebenen miteinander parallel.

Der Beweis ist mit demjenigen des Lehrsatzes 9 II Th. analog.

14. Lehrsatz.

Zwei gerade Prismen mit gleichem (congruentem) Grundgebilde und gleicher Höhe sind miteinander gleich (congruent).

Der Beweis ist mit demjenigen zu Lehrsatz 17 II. Th. identisch.

15. Lehrsatz.

Ein schiefes Prisma ist seinem Rauminhalte nach gleich einem geraden Prisma, dessen Seitenräume in bezüglich denselben dreidimensionalen Räumen liegen und dessen Höhe gleich der Seitenkante des schiefen Prisma ist.

Der Beweis ist mit demjenigen zu Lehrsatz 18, II Th. analog.

16. Lehrsatz.

Das fünfseitige Prisma mit dreiseitig-prismatischem Grundgebilde ist die Hälfte des Parallelopipedons, das mit ihm den doppelten Grundraum und gleiche Höhe hat.

Der Beweis ist mit demjenigen zu Lehrsatz 19, II Th. analog.

17. Lehrsatz.

Der Rauminhalt des Parallelopipedons ist gleich dem Product aus seinem Grundraum und seiner Höhe.

Der Beweis ist mit demjenigen zu Lehrsatz 20, II Th. analog.

18. Lehrsatz.

Der Rauminhalt des fünfseitigen Prisma mit dreiseitig-

prismatischem Grundgebilde ist gleich dem Product aus seinem Grundraume und seiner Höhe.

Dieser Lehrsatz folgt unmittelbar aus den Lehrsätzen 16 und 17.

1. Nebensatz.

Der Rauminhalt des mehrseitigen Prisma mit mehrseitigem prismatischem Grundgebilde ist gleich dem Product aus seinem Grundraume und seiner Höhe.

Da das mehrseitige dreidimensionale Prisma, welches das Grundgebilde des entsprechenden vierdimensionalen mehrseitigen Prisma ist, aus dreiseitigen Prismen besteht, so wird auch das vierdimensionale mehrseitige Prisma mit prismatischem Grundgebilde aus der entsprechenden Zahl von fünfseitigen Prismen mit dreiseitig-prismatischem Grundgebilde bestehen, so dass dann dieser Nebensatz unmittelbar aus dem obigen Lehrsatze folgt.

2. Nebensatz.

Zwei Prismen mit prismatischem Grundgebilde sind miteinander gleich, wenn sie den gleichen Grundraum und gleiche Höhe haben.

Für fünfseitige Prismen folgt dieser Nebensatz unmittelbar aus dem obigen Lehrsatz, für die mehrseitigen aus dem 1. Nebensatz.

19. Lehrsatz.

Zwei vierseitige Prismen mit dreiseitig-pyramidalem Grundgebilde sind, wenn sie den gleichen Grundraum und gleiche Höhe haben, miteinander gleich.

Da das dreiseitige dreidimensionale Prisma, welches das Grundgebilde des entsprechenden vierdimensionalen fünfseitigen Prisma bildet, aus drei dreiseitigen Pyramiden besteht, so wird offenbar das fünfseitige vierdimensionale Prisma mit dreiseitig-prismatischem Grundgebilde aus drei vierseitigen Prismen mit dreiseitig-pyramidalem Grundgebilde bestehen. Da nun zwei fünfseitige Prismen mit dreiseitig-prismatischem Grundgebilde, wenn sie den gleichen Grundraum und gleiche Höhe haben, nach dem Nebensatz 2 des vorigen Lehrsatzes einander gleich sind, so kann man leicht auf Grund desselben Arguments, auf Grund dessen wir auf die rauminhaltliche Gleichheit der dreiseitigen Pyramiden mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe aus der rauminhaltlichen Gleichheit der entsprechenden dreiseitigen Prismen geschlossen haben, auch hier aus der rauminhaltlichen Gleichheit der fünfseitigen (dreiseitig-prismatischen) Pris-

men mit gleichem Grundraum und gleicher Höhe auf die rauminhaltliche Gleichheit der vierseitigen Prismen mit dreiseitig-pyramidalem Grundgebilde, wenn sie gleichen Grundraum und gleiche Höhe miteinander haben, schliessen.

20. Lehrsatz.

Das vierseitige Prisma mit dreiseitig-pyramidalem Grundgebilde ist der dritte Theil des fünfseitigen Prisma mit dem entsprechenden dreiseitig-prismatischem Grundgebilde.

Da die drei vierseitigen Prismen mit dreiseitig-pyramidalem Grundgebilde, aus denen das fünfseitige Prisma mit dreiseitig-prismatischem Grundgebilde besteht, offenbar (nach Lehrsatz 24 II Th.) den gleichen Grundraum und gleiche Höhe haben, so sind sie nach dem vorigen Lehrsatz miteinander gleich, womit dieser Lehrsatz bewiesen ist.

1. Nebensatz.

Der Rauminhalt des vierseitigen Prisma mit dreiseitig-pyramidalem Grundgebilde ist gleich dem dritten Theil des Products aus seinem Grundraume und seiner Höhe.

Dieser Nebensatz folgt unmittelbar aus Lehrsatz 16 und dem obigen Lehrsatz.

2. Nebensatz.

Der Rauminhalt des mehrseitigen Prisma mit mehrseitig-pyramidalem Grundgebilde ist gleich dem dritten Theil des Products aus seinem Grundraume und seiner Höhe.

Da die mehrseitige dreidimensionale Pyramide, welche das Grundgebilde des entsprechenden vierdimensionalen mehrseitigen Prisma ist, aus dreiseitigen Pyramiden besteht so wird auch das vierdimensionale mehrseitige Prisma mit pyramidalem Grundgebilde aus der entsprechenden Zahl der vierseitigen Prismen mit dreiseitig-pyramidalem Grundgebilde bestehen, so dass dann dieser zweite Nebensatz unmittelbar aus dem ersten folgt.

3. Nebensatz

Zwei mehrseitige Prismen mit pyramidalem Grundgebilde sind, wenn sie den gleichen Grundraum und gleiche Höhe haben, miteinander gleich.

Dieser Nebensatz folgt unmittelbar aus den beiden ersten Nebensätzen.

21. Lehrsatz.

Zwei vierseitige Pyramiden mit dreiseitig-pyramidalem Grund-

gebilde sind, wenn sie den gleichen Grundraum und gleiche Höhe haben, miteinander gleich.

Wie sich leicht zeigen lässt besteht das vierseitige vierdimensionale Prisma mit dreiseitig-pyramidalem Grundgebilde aus vier vierseitigen Pyramiden mit dreiseitig-pyramidalem Grundgebilde so dass, da zwei vierseittge Prismen mit dreiseitig prismatischem Grundgebilde, wenn sie den gleichen Grundraum und gleiche Höhe haben, miteinander gleich sind, auf Grund desselben Arguments auf Grund dessen wir die rauminhaltliche Gleichheit der letzteren aus der rauminhaltlichen Gleichheit der entsprechenden fünfseitigen Prismen deduciert haben, auch die Gleichheit der vierseitigen Pyramiden mit dreiseitig-pyramidalem Grundgebilde, wenn sie den gleichen Grundraum und gleiche Höhe haben, folgt.

22. Lehrsatz.

Die vierseitige Pyramide mit dreiseitig-pyramidalem Grundgebilde ist der vierte Theil des vierseitigen Prisma mit dreiseitig-pyramidalem Grundgebilde.

Da von den vier vierseitigen Pyramiden mit dreiseitig-pyramidalem Grundgebilde, aus denen das vierseitige Prisma mit dreiseitig-pyramidalem Grundgebilde besteht, je zwei miteinander den gleichen Grundraum und gleiche Höhe haben, so sind sie nach dem vorigen Lehrsatze miteinander gleich und damit ist dieser Lehrsatz bewiesen.

1. Nebensatz.

Der Rauminhalt der vierseitigen Pyramide mit dreiseitig-pyramidalem Grundgebilde ist gleich dem zwölften Theil des Products aus ihrem Grundraume und ihrer Höhe.

Dieser Nebensatz folgt aus Lehrsatz 20 Nebensatz 1 und dem obigen Lehrsatz.

2. Nebensatz.

Der Rauminhalt der mehrseitigen Pyramide mit pyramidalem Grundgebilde ist gleich dem zwölften Theil des Products aus ihrem Grundraume und ihrer Höhe.

Da die mehrseitige dreidimensionale Pyramide, welche das Grundgebilde der entsprechenden mehrseitigen vierdimensionalen Pyramide bildet, aus dreiseitigen Pyramiden besteht, so wird auch die vierdimensionale mehrseitige Pyramide aus der entsprechenden Anzahl der vierseitigen Pyramiden mit dreiseitig-pyramidalem Grundgebilde bestehen, so dass dann dieser zweite Nebensatz unmittelbar aus dem ersten folgt.

3. Nebensatz.

Zwei mehrseitige Pyramiden mit pyramidalem Grundgebilde sind, wenn sie den gleichen Grundraum und gleiche Höhe haben, miteinander ihrem Rauminhalte nach gleich.

Dieser Nebensatz folgt unmittelbar aus den beiden ersten.

23. Lehrsatz.

Zwei fünfseitige Pyramiden mit dreiseitig-prismatischem Grundgebilde sind, wenn sie den gleichen Grundraum und gleiche Höhe haben, miteinander gleich

Da das fünfseitige Prisma mit dreiseitig-prismatischem Grundgebilde aus vier fünfseitigen Pyramiden mit dreiseitig-prismatischem Grundgebilde besteht, so lässt sich aus der Gleichheit zweier fünfseitigen Prismen mit dreiseitig-prismatischem Grundgebilde, die den gleichen Grundraum und gleiche Höhe haben (Lehrsatz 18, 2 Nebensatz) auf die Gleichheit der fünfseitigen Pyramiden mit dreiseitig-prismatischem Grundgebilde, die den gleichen Grundraum und die gleiche Höhe haben, auf Grund desselben Arguments schliessen, auf Grund dessen auch die Lehrsätze 19 und 21 bewiesen worden sind.

24. Lehrsatz.

Die fünfseitige Pyramide mit dreiseitig-prismatischem Grundgebilde ist der vierte Theil des fünfseitigen Prisma mit (demselben) dreiseitig-prismatischem Grundgebilde.

Da von den vier fünfseitigen Pyramiden mit dreiseitig-prismatischem Grundgebilde, aus denen das fünfseitige Prisma mit dreiseitig-prismatischem Grundgebilde besteht, je zwei den gleichen Grundraum und gleiche Höhe haben so sind sie ihrem Rauminhalte nach nach dem vorigen Lehrsatz miteinander gleich, und damit ist dieser Lehrsatz bewiesen.

1. Nebensatz.

Der Rauminhalt der fünfseitigen Pyramide mit dreiseitig-prismatischem Grundgebilde ist gleich dem vierten Theil des Products aus ihrem Grundraume und ihrer Höhe.

Dieser Nebensatz folgt unmittelbar aus Lehrsatz 18 und dem obigen Lehrsatz.

2. Nebensatz.

Der Rauminhalt der mehrseitigen Pyramide mit prismatischem Grundgebilde ist gleich dem vierten Theil des Products aus ihrem Grundraume und ihrer Höhe.

Da das mehrseitige dreidimensionale Prisma, welches das Grundgebilde der entsprechenden mehrseitigen vierdimensionalen Pyramide bildet, aus dreiseitigen Prismen besteht, so wird auch die mehrseitige vierdimensionale Pyramide mit prismatischem Grundgebilde aus der entsprechenden Anzahl der fünfseitigen Pyramiden mit dreiseitig-prismatischem Grundgebilde bestehen, so dass dann dieser zweite Nebensatz unmittelbar aus dem ersten folgt.

3. Nebensatz.

Zwei mehrseitige Pyramiden mit prismatischem Grundgebilde sind, wenn sie den gleichen Grundraum und gleiche Höhe haben, miteinander gleich.

Dieser Nebensatz folgt unmittelbar aus den beiden ersten.

25. Lehrsatz.

Von den sinnlich wahrnehmbaren regelmässigen vierdimensionalen Polyedern ist als zusammengesetzter Polyeder nur das Octaedroid möglich.

Dieser Lehrsatz folgt unmitelbar aus den Lehrsätzen 1, 2 und 4.

Anmerkung. Was der Ausdruck „sinnlich wahrnehmbar“ in dem obigen Satze bedeutet darüber vgl. die Anmerkung zu Lehrsatz 4.

Berichtigungen und Zusätze.

Seite		Zeile	von		steht		statt
Seite 5.	6.	Zeile	von oben	steht	*dadurch*	statt	*darin*
„ 47.	8	„	„ unten	„	*für diese*	„	*für die obige*
„ 48.	8	„	„ „	„	*Punkt*	„	*Punkt noch*
„ 64.	13.	„	„ „	„	*quantitative*	„	*numerische*
„ 69.	10.	„	„ oben	„	*jede*	„	*jedes*
„ 90.	20.	„	„ „	„	*vorgangen*	„	*vorgegangen*
„ 95.	8.	„	„ unten	„	*weiss*	„	*Weisse*
„ 100.	14.	„	„ oben	„	*Substanz*	„	*qualitätslose Wirklichkeit*
„ 112.	8.	„	„ „	„	*dasselbe*	„	*derselbe*
„ 115.	5.	„	„ unten	„	*wissen*	„	*sozusagen wissen*
„ 137.	4.	„	„ oben	„	*Raum*	„	*Raum wenn er real ist*
„ 138.	10.	„	„ „	„	*deren*	„	*dessen*
„ 141.	7.	„	„ unten	„	*Raume*	„	*(discreten) Raume*
„ 148.	15.	„	„ „	„	*Notwendigkeit*	„	*die Notwendigkeit*
„ 159.	1.	„	„ „	„	*keine zeitlose*	„	*keine längeren, d. h. länger als ein Augenblick dauernden zeitlosen*
„ 161.	8.	„	„ oben	„	*jede*	„	*jede längere*
„ „	10.	„	„ unten	„	*ohne zeitlose*	„	*ohne längere zeitlose*
„ 163.	12.	„	„ „	„	*zeitloses*	„	*zeitliches*
„ „	18.	„	„ „	„	„	„	„
„ 172.	9.	„	„ „	„	*a*	„	*ja*
„ 186.	„	„	„ „	„	*Verlängerung*	„	*Verminderung*
„ 187.	18.	„	„ oben	„	*dabei*	„	*dann*
„ 194.	8.	„	„ unten	„	*dieselbe*	„	*dieselben*
„ 199.	8.	„	„ „	„	$x+1$	„	$x+1-$
„ „	9.	„	„ „	„	$x_x+1,\ x_x+2,\ x_x+3\ \dots$	statt	$x^x+1,\ x^x+2,\ x^x+3\ \dots$
„ „	12.	„	„ „	„	$x,\ 2x+1,$	„	$x^2,\ x^2+1,$
„ „	15.	„	„ „	„	$\dots 4x \dots x^2$	„	$\dots 4x \dots$
„ 201.	20.	„	„ „	„	*absoluten*	„	*absolut*
„ 203	18.	„	„ „	„	*das*	„	*der*
„ 207.	4.	„	„ oben	„	*nicht giebt*	„	*giebt*

Seite 220. 5. „ „ unten „ *Reie (b)* „ *Reihe (d)*
„ 221. 19. „ „ oben „ *Reihe* „ *Menge*
„ „ 21. „ „ „ „ *Zahl* „ *Zahl* α
„ 223. 6. „ „ unten „ $\tilde{\omega}$ „ $\overline{\omega}$
„ 234. 20. „ „ oben „ *und* „ *und sie*
„ 237. 14. „ „ „ „ *OB und* OB_1 „ OB_1 *und* O_1B_1 *(resp.* OB'_1 *und* $O_1B'_1$*)*
„ „ 16. „ „ „ „ B_1 „ B'_1
„ 260. 7. „ „ oben „ *hergehen* „ *hervorgehen*
„ „ 4. „ „ unten „ *nur wieder* „ *und zwar wieder nur*
„ „ 5. „ „ „ „ *da aus* „ *da dabei nur*
„ „ 6. „ „ „ „ *das Oktaedroid* „ *das Octaedroid und das Ikositetraedroid*
„ „ 7. „ „ „ „ *Kugelpolygonen* „ *Kugelpolygonen (resp. dreidimensionalen Kugelpolyedern)*
„ 279 16. „ „ „ „ *ausgedehnt* „ *vollkommen ausgedehnt*
„ „ „ „ „ „ „ *4* „ *6*
„ 281. 17. und 18. „ oben „ *Grundwerth* „ *Grenzwerth*
„ 285. 20. Zeile von unten steht *die* statt *die (in statischer und dynamischer Weise)*
„ 291. 18. „ „ „ „ *Verengerung* „ *Verengung*
„ 292. 19. „ „ „ „ *Ebene* „ *Elemente*
„ 305. 3 Reihe von unten. Dass unsere Wahrnehmungsflächen quadratisch sind obgleich geometrisch genommen (vgl. den Anhang) der dreidimensionale Raum sowohl (rein) quadratisch wie (unrein) octaedrisch sein kann, folgt daraus dass er an seinen Begrenzungsflächen ganz unregelmässig ist, während der octaedrische dreidimensionale Raum dies nicht sein kann, da seine Gesammtgestalt wiederum nur octaedrisch sein kann.
„ 350. 18. Zeile von unten „ *verschieden sind* „ *es in verschiedener Weise thun*
„ 351. 10. „ „ oben „ *berühren* „ *mittelbar berühren*
„ 354. 15. „ „ unten „ B „ B″
„ 365. 16. „ „ „ „ O,C „ O_1C
„ 372. 11. „ „ oben „ *schliesslich* „ *schliesslich und in letzter Instanz*
„ 375. Der Beweis zum 1. Fall könnte kürzer so gefasst werden:

Die zwei Dreiecke seien ABC und A′B′C′ (vgl. Fig. 14 Taf. II) und es sei $\angle$ A ≌ A′, AB ≌ A′B′. AC ≌ A′C′. Es ist nun offenbar dass, da AC ≌ A′C′, der Punkt C′ auf dieselbe Weise in Bezug auf den Punkt A′ gesetzt ist wie der Punkt C in Bezug auf den Punkt A; dasselbe folgt für die Punkte B und B′ in Bezug auf die entsprechenden Punkte A und A′ aus AB ≌ A′B′; folglich sind auch, da $\angle$ A ≌ A′ ist, die Punkte C′ und B′ in Bezug aufeinander auf dieselbe Weise gesetzt wie die Punkte C und B in Bezug aufeinander, ihre Entfernungen werden also in beiden Fällen nach Ax. 9 die gleichen sein, d. h. B′C′ = BC.

Seite 380. 19. Reihe von oben steht $<$ statt $\angle$
„ 393. 15. „ „ unten „ *Lehrsatz* „ *Lehrsatz in Bezug auf die ersten Imaginären*

Seite 398. 20. „ „ oben „ $OO_8M'_2$ „ $OO_3M'_3$

„ „ 14. „ „ unten „ *dasselbe* „ *entsprechendes*

„ 405. 9. „ „ oben „ *berührt* „ *berührt, oder endlich von sechs Punkten eingeschlossen wird, von denen sich jeder Punkt mit vier Punkten unmittelbar und mit einem mittelbar berührt.*

Seite 405. 10. Zeile von oben „ *(Hexaeder)* „ *(Hexaeder) und im dritten Falle das einfache Octaeder*

„ 406. 8. „ „ unten „ *und einander* „ *congruent und einander*

„ 409. 18. „ „ „ „ Fig. 18. „ Fig. 20.

„ 410. 15. „ „ „ „ *möglich* „ *ohne weiters möglich*

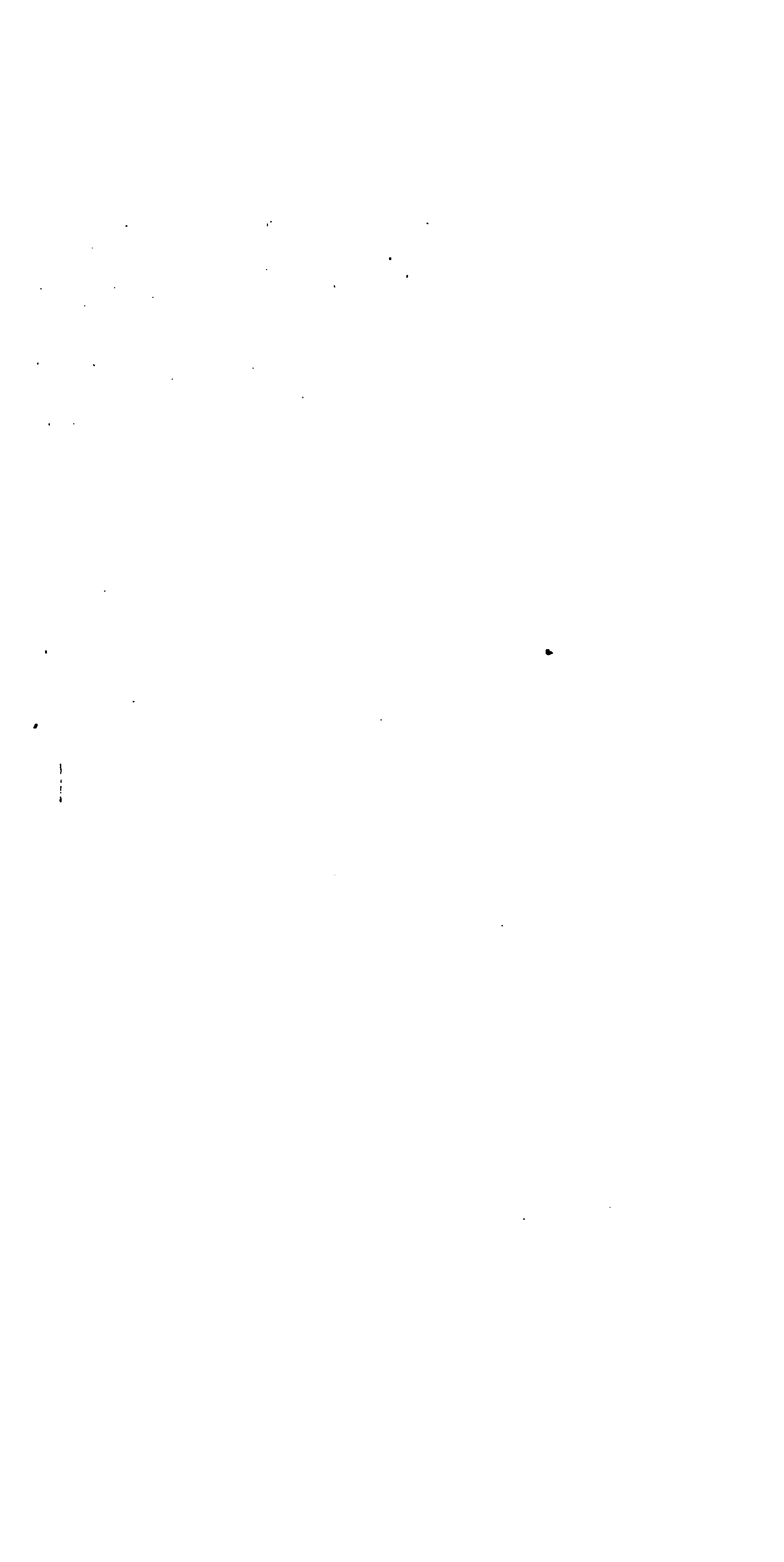
„ „ 16. „ „ „ „ *möglich* „ *unmöglich*

„ 412. 10 „ „ oben „ *Quadrat* „ *Hexaeder*

„ 413. 10 „ „ „ „ Fig. 19. „ Fig. 18.

„ 415. 11. „ „ unten „ *Lehrsatzes 12* „ *Lehrsatzes 11*

Klosterbuchdruckerei in Karlovitz.



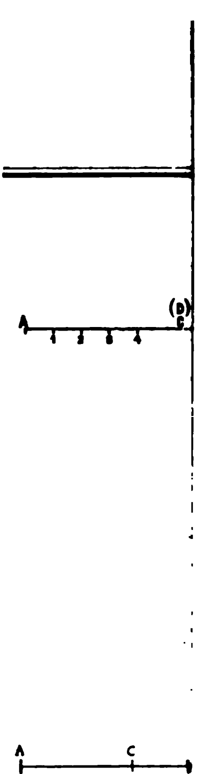


Fig. 4.













